最 適 推 定 の 問 題

—— minimum variance unbiased estimators について —— *

竹 内 清

1

計量経済学の分野において，推定の問題は最も基本的で重要な問題の一つである。計量経済学での推定の問題領域においては，統計学固有の領域で展開された統計的推定の理論ならびに手法を活用するとともに，計量経済学固有の問題の特殊性と関連して独自の理論と手法が発展してきた。

ここでは，計量経済学への応用を背景に考えながら，第一段階として，最も基礎的な母集団のパラメーターの推定の問題を，変分法の手法を用いて分析することを試みた。変分法は，計画の問題，その他計量経済学の分野で広く応用されるべき性格を持っているが，ここでは上述のごとく母集団パラメーターの推定の問題への適用を試みた。

統計学においては，パラメーターの推定の問題と関連して，sufficient statistic の有用性が強調されてきた。たとえば，Rao [7] は，Blackwell—Rao の定理の観点からして，sufficient statistic の函数のクラスの中でのみ

---

* 本論文は，Prof. H. O. Hartley, Director of the Institute of Statistics, Texas A & M University，との討論ならびにその示唆を通して発展してきた研究の一部であるが，Prof. Hartley ならびに Prof. O. Morgenstern, Director of the Econometric Research Program, Dept. of Economics, Princeton University，の絶えざる温かい精神的な励まし，ならび financial support に負うところがきわめて大きい。ここに衷心より感謝の意を表する次第である。なお，あるかもしれない誤りはすべて筆者の責に帰するものである。

なお，本論文は第5回計量経済学研究会議（於宝塚ホテル：昭和42年7月17日～20日）において，報告のため予め提出した原形のままのものである。

minimum variance estimators を探さなければならない，と強調している。また **Каган** [4] は，L^2 空間を用いて，sufficient system という概念を導入し，Blackwell—Rao の定理（**Каган** はこの定理を Blackwell—**Колмогоров** の定理とよんでいる）を拡張している。しかしながら，sufficient statistic とか sufficient system が常に存在するとは限らない。

われわれは，sufficient statistic が存在しない場合も含めて，変分法を用い minimum variance unbiased estimator を導くであろう。この場合，もし sufficient statistic が存在する場合には，Cramér—Rao の lower bound と等しい結果が導かれるであろう。

母集団のパラメーターの minimum variance estimator を導くに当り，変分法を用いた例はきわめて少ない。たとえば，Aitken & Silverstone [1], Nieto [6] などが散見されるに過ぎない。Aitken & Silverstone が導いた結果は，数学的に欠点を持っており，これは **Романовский** [8] および Nieto によって批判が加えられている。

われわれは，Nieto とは違った変分法の活用の仕方をもって，数学的な不備を補ない，彼とは若干異なった結果を導くであろう。本論文は Takeuchi [11] の基礎をなすものであり，Takeuchi [12] の後半に続くものである。

2

われわれの問題を定式化する前に，若干の定義を与えておこう。

$P(x;\theta)$ は区間 $[a, b]$ において非減少函数で定数ではないとしよう。a, b はそれぞ $-\infty$ および $+\infty$ をとりうるが，

$$P(-\infty)=\lim_{x\to-\infty} P(x;\theta)$$

および

$$P(\infty)=\lim_{x\to+\infty} P(x;\theta)$$

は有界としよう。$P(x;\theta)$ に関して可測で，Stieltjes—Lebesgue 積分

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dP$$

が存在するような函数 $f(x)$ のクラスはクラス L_P^2 とよばれる。以下では L_P^2 の代りに L^2 と書くことにしよう。上述のことから，任意の $f(x) \in L^2$ に対して

$$\int_a^b |f(x)|^2\, dP < \infty \tag{1}$$

が成り立つ。

ここではパラメーターが 1 個の場合の分布函数を考えるが，その確率密度函数は，

$$\phi(x\,;\theta)$$

で与えられるものとする。無作為標本 $x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n$ の結合密度函数は，

$$\phi(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n\,;\ \theta) = \phi(x\,;\theta) \tag{2}$$

で表わされるものとしょう。上で考察した可測函数 $P(x\,;\theta)$ は

$$dP(x\,;\theta) = \phi(x\,;\theta)dx \tag{3}$$

なるような一般の累積分布函数と考えてよいであろう。

われわれは，まず L^2 の元としては，パラメーター θ の推定量，

$$t(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_n) = t(x) \tag{4}$$

とし，これは θ とは独立で，θ において一様に

$$\int_{R(x)} t(x)\phi(x\,;\theta)dx = g(\theta), \tag{5}$$

ただし $R(x)$ は x の範囲，なる関係が成り立つものとする。$t(x) \in L^2$ から

$$\int_{R(x)} |\,t(x)|^2\ \phi(x\,;\theta)dx < \infty \tag{6}$$

が導かれる。

さて，われわれの問題は次のように定式化できるであろう。

$$\int_{R(x)} t(x)\phi(x\,;\theta_j)dx = g(\theta_j) \quad (j = 1, 2, \dots, m), \tag{7}$$

ただし $\{\theta_j\}$ はパラメーター空間 Θ に属するという条件の下で，$\theta=\theta_0$ において，

$$J[t]=\int_{R(x)}\{t(x)-g(\theta_0)\}^2\phi(x;\theta_0)dx \tag{8}$$

なる汎函数 $J[t]$ を最小にするような推定量 $\bar{t}(x)$ を見出すことである。(7)なる条件の下で(8)を最小にするような $\bar{t}(x)$ を見出すことは，(7)なる条件の下で，

$$J[t]=\int_{R(x)}|t(x)|^2\phi(x;\theta_0)dx \tag{9}$$

を最小にするような推定量 $\bar{t}(x)$ を見出すことと同等であるから，以下では(8)の代りに(9)を使うことにしょう。

このように定式化すると，われわれの問題は，Hilbert 空間である L^2 における条件付最小の問題，あるいは変分法における isoperimetric problem と考えることができるであろう。(たとえば，Гельфанд и Фомин [3] 参照)。一般の測度理論を用いる通常の Hilbert 空間である L^2 空間の理論への通常の接近と，われわれの確率測度を用いた場合の一応の差は，われわれの場合，空間のノルムとして定義される内積が二つの確率ベクトルの期待値として定義されることである。(たとえば，Deutsch [2] 参照)。

われわれは，まずパラメーター θ が有限個の値，$\theta_j (j=1, 2, \ldots, m)$，をとる場合を考えることにしょう。

変分法における direct method を用いて，上の問題における解の存在を証明し，ついで解が linear operator を通して表わされることを見ることにしょう。変分法における direct method としては，Ritz の方法を用いることにしょう。(direct method の理論ならびにその応用については，たとえば，Гельфанд и Фомин [3] および Канторович и Крылов [5] を参照)。

さて，

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots \tag{10}$$

を, $\phi(x;\theta)$ に関して L^2 における2乗可積分函数の完備な正規直交系としょう。

なお参考までに, L^2 に関して完備な正規直交系の例を若干あげてみよう。(たとえば, Sansone [9] 参照)。

三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}exp(ikx)\right\} \quad (k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots) \tag{11}$$

は, L^2 に関して区間 $(0,\ 2\pi)$ で完備な正規直交系をつくる。

Hermite 函数系

$$\left\{\frac{(-1)^k}{\sqrt{2^k k!\sqrt{\pi}}}\, exp\left(\frac{x^2}{2}\right)\frac{d^k exp(-x^2)}{dx^k}\right\} \quad (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{12}$$

は, L^2 に関して区間 $(-\infty,\ +\infty)$ で完備な正規直交系をつくる。

Laguerre 函数系

$$\left\{\Gamma^{\frac{1}{2}}(n+1)\Gamma^{-\frac{1}{2}}(n+\alpha+1)exp\left(-\frac{x}{2}\right)x^{\frac{\alpha}{2}}\ L_n^{(\alpha)}(x)\right\} \tag{13}$$

$$(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

は, L^2 に関して $[0,\ +\infty)$ で完備な正規直交系をつくる。ただし,

$$(-1)^n L_n^{(n)}(x)=\sum_{m=0}^{n}(-1)^m\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{m!(n-m)!\Gamma(\alpha+n-m+1)}x^{n-m} . \tag{14}$$

Legendre 函数系

$$\left\{\sqrt{\frac{2n+1}{2}}P_n(x)\right\} \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots) \tag{15}$$

は, L^2 に関して区間 $[-1,\ +1]$ で完備な正規直交系をつくる。ただし,

$$P_0(x)=1$$

$$P_n(x)=\frac{1\times 3\times 5\times\cdots\times(2n-1)}{n!}\left[x^n-\frac{n(n-1)}{2(2n-1)}x^{n-2}\right.$$
$$\left.+\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2\times 4\times(2n-1)(2n-3)}x^{n-4}-\cdots\right] . \tag{16}$$

さて, $L^2_{(n)}$ を, (10)の最初の n 個の函数によって張られる L^2 の n 次元線型部分空間としょう。すなわち, $L^2_{(n)}$ は,

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x) \tag{17}$$

のようなすべての線型結合の集合，ただし $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は適当な実数。そうすると，各部分空間 $L^2_{(n)}$ の上で，汎函数 $J[t]$ は，n 個の変数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の函数（2次形式）

$$J_n[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)]=J_n[t_n] \tag{18}$$

ということになる。(18)は一般に α の連続函数と考えられるであろう。

(9)は下に有界，すなわち，

$$\inf_t J[t]=\mu>-\infty \tag{19}$$

なることは明らかである。

もし(17)が admissible であるとすれば，これは条件(7)と(9)を満足しなければならない。条件(7)は，

$$\int_{R(x)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\phi(x;\theta_j)dx=g(\theta_j) \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m) \tag{20}$$

という条件になる。さらに，(17)に対して汎函数 $J[t]$ は

$$J_n[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]=\int_{R(x)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\right\}^2\phi(x;\theta_0)dx \tag{21}$$

ということになるが，これは n 個の変数，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の函数である。

かくして，変数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の関係を通して，われわれの問題は，(20)なる条件の下で，n 次元球面上で $J_n[\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n]$ を最小にする問題に帰着することになる。この最小値を $\mu_n^{(1)}$ で表わすと，これは $L^2_{(n)}$ の元である。

(20)から

$$\begin{aligned} g^2(\theta_j)&=\left[\int_{R(x)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\phi(x;\theta_j)dx\right]^2 \\ &\leq\int_{R(x)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\right\}^2\phi(x;\theta_j)dx\int_{R(x)}\phi(x;\theta_j)dx \\ &=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^2\leq M^2<\infty \quad (j=1,\ 2,\ \ldots,\ m), \end{aligned} \tag{22}$$

ただし M^2 は適当に大きな定数。

かくして，(22)から所要の同時的条件は，

$$g_m^2(\theta)=\max_j\{g^2(\theta_j)\}\leq\sum_{i=1}^n \alpha_i^2\leq M^2 \tag{23}$$

ということになる。したがって，n 次元空間の有界な閉領域において函数(21)の最小値を見出さなければならないことになる。連続函数(21)は，このような閉領域において最小解を持つことは明らかである。かくして，われわれは適当な n に対して最小解を持つことになる。

このようにして得られる minimal polynomial を $\{\bar{t}_n(x)\}_1^\infty$ と表わすことにしよう。各 polynomial $t_n(x)$ は，polynomial $t_{n+1}(x)$ の特別の場合であるから，次の不等式が成り立つ。

$$J[\bar{t}_{n+1}(x)]\leq J[\bar{t}_n(x)]. \tag{24}$$

このことから

$$\mu_n^{(1)}=J[\bar{t}_n(x)] \tag{25}$$

は，$n\to\infty$ にしたがって単調減少であり，したがってある値 μ^* に収束することが導かれるが，これに関しては事前には，

$$\mu^*\geq\mu \tag{26}$$

といえるだけである。というのは，μ は(19)で定義されるものであり，

$$\mu=J[\bar{t}(x)]=\inf_t\ J[t(x)]$$

であるから。

さて，任意の $\tilde{t}_n(x)$ に対して次の差を考えよう。

$$\begin{aligned}
&J[\tilde{t}_n(x)]-J[\bar{t}(x)]\\
&=\int_{R(x)}\{\tilde{t}_n{}^2(x)-\bar{t}^2(x)\}\phi(x;\theta_0)dx\\
&=\int_{R(x)}\{\tilde{t}_n(x)-\bar{t}(x)\}\{\tilde{t}_n(x)+\bar{t}(x)\}\phi(x;\theta_0)dx\\
&\leq\int_{R(x)}|\tilde{t}_n(x)-\bar{t}(x)\,||\,\tilde{t}_n(x)+\bar{t}(x)|\,\phi(x;\theta)dx.
\end{aligned}$$

ところで，$\varepsilon>0$ に対して

$$\int_{R(x)} |\tilde{t}_n(x)-\bar{t}(x)|^2\,\phi(x\,;\theta)dx<\varepsilon \tag{27}$$

なるように，$\tilde{t}_n(x)$ を選ぶことができるから，次の不等式を得るであろう：

$$\begin{aligned} J[\tilde{t}_n(x)]-J[\bar{t}(x)] &\leq \varepsilon \int_{R(x)} |2\bar{t}(x)+\varepsilon|\,\phi(x\,;\theta_0)dx \\ &\leq 2\varepsilon \int_{R(x)} |\bar{t}(x)|\,\phi(x\,;\theta_0)dx+\varepsilon^2. \end{aligned} \tag{28}$$

ただし，$n\to\infty$ にしたがって $\varepsilon\to 0$ という ことは，(28)の右辺が $n\to\infty$ にしたがって0に近ずくことを意味する。したがって，適当な $\eta>0$ に対して，われわれは，$n>N(\eta)$ に対し，

$$0\leq J[\tilde{t}_n(x)]-J[\bar{t}(x)]<\eta \tag{29}$$

なるような $N(\eta)$ を見出すことができるから，

$$J[\tilde{t}_n(x)]<\mu+\eta. \tag{30}$$

しかし，minimal polynomial の $\bar{t}_n(x)$ の定義は，

$$J[\bar{t}_n(x)]\leq J[\tilde{t}_n(x)] \tag{31}$$

なることを意味する。したがって，

$$\mu^*\leq J[\bar{t}_n(x)]<\mu+\eta. \tag{32}$$

(32)から

$$\mu^*=\mu \tag{33}$$

が導かれる。このことから，(7)なる条件の下で，$J[t]$ を最小にする minimum variance unbiased estimator $\bar{t}(x)$ が存在することが証明された。

3

Lagrange 乗数の理論から，2次形式

$$J_n[\alpha_1,\ \alpha_2,\ \dots,\ \alpha_n]=\int_{R(x)}\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)\right\}^2\phi(x\,;\theta_0)dx$$

が，(20)の条件の下で，$\theta=\theta_0$ において最小値をとる点（$\alpha_1^{(1)},\ \alpha_2^{(1)},\ \dots,\ \alpha_n^{(1)}$）に

おいて，われわれは次の関係を得る：

$$\frac{\partial}{\partial \alpha_i^{(1)}}\left\{J_n[\alpha_1^{(1)}, \alpha_2^{(1)}, \dots, \alpha_n^{(1)}] - \sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0, \theta_j)\int_{R(x)}\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(1)}\varphi_i(x)\phi(x;\theta_j)dx\right\}=0 \tag{34}$$

$$(i=1, 2, \dots, n),$$

ただし，$\lambda(\theta_0, \theta_j)(j=1, 2, \dots, m)$ は Lagrange 乗数。ここでは $n \geq m$ を仮定する。上において(34)を次のように表わすことができる：

$$\int_{R(x)}\varphi_k(x)\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(1)}\varphi_i(x)\right\}\phi(x;\theta_0)-\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0, \theta_j)\phi(x;\theta_j)\right]dx=0$$

$$(k=1, 2, \dots, m). \tag{35}$$

(35)に適当な定数 C_k を乗じ，1 から n まで合計することにより，

$$\int_{R(x)}\sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x)\left[\left\{\sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(1)}\varphi_i(x)\right\}\phi(x;\theta_0) - \sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0, \theta_j)\phi(x;\theta_j)\right]dx=0. \tag{36}$$

さて

$$\begin{aligned} h_n(x) &= \sum_{k=1}^{n}C_k\varphi_k(x) \\ \bar{t}_n(x) &= \sum_{i=1}^{n}\alpha_i^{(1)}\varphi_i(x) \end{aligned} \tag{37}$$

とおくと，(36)は次のように表わされるであろう。

$$\int_{R(x)}h_n(x)\left[\bar{t}_n(x)\phi(x;\theta_0)-\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0, \theta_j)\phi(x;\theta_j)\right]dx=0. \tag{38}$$

もし $h(x)$ が L^2 において(20)を満足する適当な函数であれば，われわれは，

$$\lim_{n\to\infty}\int_{R(x)}|h_n(x)-h(x)|^2\phi(x;\theta)dx=0 \tag{39}$$

なるように係数 C_k を選ぶことができる。また，

$$\lim_{i\to\infty}\int_{R(x)}|\bar{t}_{n_i}(x)-\bar{t}(x)|^2\phi(x;\theta)dx=0 \tag{40}$$

であるから

$$\lim_{i\to\infty}\int_{R(x)} h_{n_i}(x)\left[\bar{t}_{n_i}(x)\phi(x;\theta_0)-\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0,\theta_j)\phi(x;\theta_j)\right]dx$$

$$=\int_{R(x)} h(x)\left[\bar{t}(x)\phi(x;\theta_0)-\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0,\theta_j)\phi(x;\theta_j)\right]dx=0. \quad (41)$$

上式から次の結果が得られる：

$$\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0,\theta_j)\int_{R(x)} h(x)\phi(x;\theta_j)dx=\int_{R(x)}\bar{t}(x)h(x)\phi(x;\theta_0)dx. \quad (42)$$

(42)は，linear operator T を用いると，次のように表わすことができるであろう：

$$T\int_{R(x)} h(x)\phi(x;\theta)dx=\int_{R(x)}\bar{t}(x)h(x)\phi(x;\theta_0)dx. \quad (43)$$

上式は，Stein [10] の記号を用いると次のように表わすことができるであろう：

$$T\int_{R(x)} h(x)\pi(x;\theta)dP=\int_{R(x)}\bar{t}(x)h(x)dP, \quad (44)$$

ただし，

$$\pi(x;\theta)=\phi(x;\theta)/\phi(x;\theta_0). \quad (45)$$

ただし(45)では $\pi(x;\theta)\in L^2$ と仮定する。

(41)が任意の $h(x)\in L^2$ に対して成り立つためには，次の関係が成り立つことが必要である：

$$\bar{t}(x)\phi(x;\theta_0)=\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0,\theta_j)\phi(x;\theta_j) \quad (46)$$

または，

$$\bar{t}(x)=\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0,\theta_j)\pi(x;\theta_j). \quad (47)$$

4

本節では，(20)の条件において，$j=1, 2, \ldots$ なる場合を考察することにしょう。すなわち，

$$\int_{R(x)} t(x)\phi(x\,;\theta_j)dx=g(\theta_j) \qquad (j=1,\ 2,\ \ldots) \tag{48}$$

なる条件の下で，(8) または (9) を最小にする推定量 $t^*(x)$ を見出すことである。

さて，はじめに $i\to\infty$ を考え，次いで $j\to\infty$ を考えることにより，(22)に対応する不等式は次のようになるであろう：

$$g^2(\theta_j)=\left[\int_{R(x)}\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i\varphi_i(x)\phi(x\,;\theta_j)\,dx\right]^2\leq\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2\leq M^2<\infty \tag{49}$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots).$$

ところで

$$\{\max_j\ [g^2(\theta_j)]\} \quad (j=1,\ 2,\ \ldots)$$

は非減少であるから，これはある一定の値 $g^*(\theta)$ に収束するであろう。かくして

$$[g^*(\theta),\ M^2]\subseteq[g_m^2(\theta),\ M^2]<\infty \tag{50}$$

ただし，$g_m^2(\theta)$ は(23)によって定義されたものである。

したがって，条件(48)の下で(8)または(9)の最小値が存在することは明らかであり，これは，条件(7)の下での(8)または(9)の最小値より小さくはないであろう。

この場合，(47)に対応する結果は次のように表わされるであろう：

$$t^*(x)=\lim_{m\to\infty}\sum_{j=1}^{m}\lambda(\theta_0,\ \theta_j)\pi(x\,;\theta_j)=R\pi(x\,;\tau) \tag{51}$$

ただし，R は(43)または(44)に対応する linear operator で，$\tau\in\Theta$.

5

本節では，前の節で用いた linear operator の T や R について，これをより一般的な観点から簡単に考察することにしょう。

まず $\pi(x\,;\theta_j)$，$(j=1,\ 2,\ \ldots)$，は l^2 に属するものと仮定しょう。すなわち，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \pi^2(x;\theta_j) < \infty. \tag{52}$$

$t(x) \in L^2$ で，$\{\bar{t}_n(x)\}$ は $t^*(x)$ に収束するから，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda(\theta_0, \lambda_j)\pi(x;\theta_j) \tag{53}$$

は収束しなければならない。これが収束するためには，

$$\sum_{j=1}^{\infty} \lambda^2(\theta_0, \theta_j) < \infty \tag{54}$$

なることが十分である。これは $\lambda(\theta_0, \theta_j) \in l^2$, $(j=1, 2, \ldots)$ なることを意味する。ところで L^2 と l^2 は isomorphic であるから，(53)は，Stieltjes 積分の考え方を用いて，次のように表わすことができるであろう：

$$t^*(x) = \sum_{j=1}^{\infty} \lambda(\theta_0, \theta_j)\pi(x;\theta_j) = \int K(\theta_0, \tau)\pi(x;\tau)d\tau, \tag{55}$$

ただし，K は integral operator で，

$$\left.\begin{array}{l} K(\theta_0, \tau) \in L^2, \\ \pi(x;\tau) \in L^2. \end{array}\right. \tag{56}$$

もし連続函数 $K(\theta_0, \tau)$ が，

$$\int K^{(k)}(\theta_0, \tau)\psi(x;\tau)d\tau = 0 \quad \text{for } \theta_0 \neq \tau, \tag{57}$$

ただし，$\psi(x;\tau)$ は τ 関して無限回微分可能を満足すれば，$\pi(x;\tau)$ が $\tau=\theta_0$ において k 回微分可能な場合，次の関係が導かれるであろう：

$$\begin{aligned} \int K(\theta_0, \tau)\pi(x;\tau)d\tau &= \int \sum_{i=0}^{k} a_i \delta^{(i)}(\tau-\theta_0)\pi(x;\tau)d\tau \\ &= \sum_{i=0}^{k} a_i D^{(i)}\pi(x;\theta_0), \end{aligned} \tag{58}$$

ただし，a_i, $(i=1, 2, \ldots, k)$, は適当な定数，δ は Dirac の δ "汎函数"，D は differential operator で，

$$D^{(i)}\pi(x;\theta_0) = \left.\frac{d^i \pi(x;\tau)}{d\tau^i}\right|_{\tau=\theta_0}. \tag{59}$$

上のことから，本節で述べた条件が満足される場合，(51)によって linear operator R を定義するのは妥当といえよう。（なお，本節で論議した

generalized function または distribution については，たとえば，Zemanian [13] を参照。)

われわれは，次の機会にここで展開した理論を具体的ないくつかの分布に適用して minimum variance unbiased estimators を求めることにしょう。さらに，パラメーターが一つ以上の場合に，ここでの理論を拡張することにしょう。(1967 年 5 月 30 日)

References

[1] A. C. Aitken & H. Silverstone, "On the estimation of statistical parameter," *Proc. Roy. Soc. Edingburg*, Vol. 61, 1942, pp. 186–194.

[2] R. Deutsch, *Estimation Theory*, 1965, pp. 34–45.

[3] И. М. Гельфанд и С. В. фомин, *Вариационное Исчисление*, 1961.

[4] А. М. Каган, "Достаточные системы," *Труды Матемамимеского Инстимута имени В. А. Стеклова*, LXXIX, 1965, стр. 17–23.

[5] А. В. Канторович и В. И. Крылов, *Приълиженные Методы Высшего Анализа*, 1962.

[6] J. Nieto de Pascual, *Theory of Minimum Variance Estimation with Applications*, (unpublished Ph. D. dissertation), 1961.

[7] C. R. Rao, *Linear Statistical Inference and its Applications*, 1965, p. 261.

[8] В. И. Романовский, *Математическая Стамисмика*, Книга Вторая, 1963, стр. 305–311.

[9] G. Sansone, *Orthogonal Functions*, (translated by A. H. Diamond), 1959.

[10] C. Stein, "Unbiased estimates with minimum variance," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 21, 1950, pp. 406–415.

[11] K. Takeuchi, "On unbiased minimum variance estimators," *Ann. Math. Stat.*, Vol. 37, 1966, pp. 1860–1861.

[12] K. Takeuchi, "On minimum variance unbiased estimators," *The Economic Review*, Vol. 18, No. 1, 1967, pp. 89–99.

[13] A. H. Zemanian, *Distribution Theory and Transform Analysis*, 1965, pp. 81–96.