＜研究ノート＞

最小分散不偏推定量についての一考察

竹　内　　　清

1

このノートは竹内［4］に続くものであり，既に導いた最小分散不偏推定量についての線型作用素 (linear operator) に関する一般理論を，若干の具体例に適用してみたものである。今回は特に積分作用素 (integral operator) についてみることにする。

比較の意味で，まずわれわれに周知の Cramér-Rao の不等式を出発点として，それがどのような場合に等号が成立して最小分散推定量が求められるのか，またそれは十分統計量とどのような関係にあるのかを概観することにする（これについては，たとえば，Романовский［3］，Hogg & Craig［1］を参照）。

さて，$x_1, x_2, \dots, x_n$ はそれぞれ確率密度関数 $f(x, \theta)$ をもった独立な確率変数としよう。ただし，$\theta \epsilon \Omega$ で，Ω はパラメーター空間。$t(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を θ の推定量とし，

$$E_\theta[t]=\theta+b(\theta) \tag{1}$$

が成り立つものとする。ただし，$b(\theta)$ は推定量 t の偏りで θ の微分可能な関数とする。次のような一定の正則条件が成り立つものとする：

（i）ほとんどすべての x に対して，$\partial L/\partial\theta$ はすべての $\theta \epsilon \Omega$ に対して存在する。ただし，$L=L(x, \theta)$ は尤度関数。

(ii) $$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{L}(x,\ \theta)dx_1\ \dots\ dx_n$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial\theta}\mathrm{L}(x,\ \theta)dx_1\ \dots\ dx_n.$$

(iii) すべての $\theta\epsilon\Omega$ に対して
$$\mathrm{E}\left[\frac{\partial\ \log\ \mathrm{L}(x,\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2>0.$$

(iv) $$\frac{\partial}{\partial\theta}\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}t(x_1,\ \dots,\ x_n)\mathrm{L}(x,\ \theta)dx_1\ \dots\ dx_n$$
$$=\int_{-\infty}^{\infty}\cdots\int_{-\infty}^{\infty}t(x_1,\ \dots,\ x_n)\frac{\partial\mathrm{L}(x,\ \theta)}{\partial\theta}dx_1\ \dots\ dx_n.$$

上の諸条件が成り立つ場合，すべての $\theta\epsilon\Omega$ に対して次の Cramér-Rao の不等式が成立する：

$$\mathrm{Var}[t]=\mathrm{E}[t-\mathrm{E}(t)]^2\geq\frac{[1+b'(\theta)]^2}{n\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial\ \log\ f(x,\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2}. \tag{2}$$

上の(2)の不等式の右辺は次のようにも書けることは容易に分るであろう：

$$\frac{[1+b'(\theta)]^2}{n\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial\ \log\ f(x,\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2}=\frac{[1+b'(\theta)]^2}{\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial\ \log\ \mathrm{L}(x,\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2}$$
$$=-\frac{[1+b'(\theta)]^2}{\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial^2\ \log\ \mathrm{L}(x,\ \theta)}{\partial\theta^2}\right]}. \tag{3}$$

もし t が不偏推定量である場合，$b(\theta)=0$ であるから，(2)の不等式の右辺の分子は1になり

$$\mathrm{Var}[t]\geq\frac{1}{n\mathrm{E}\left[\dfrac{\partial\ \log\ f(x,\ \theta)}{\partial\theta}\right]^2} \tag{4}$$

が導かれる。

ところで Cramér-Rao の不等式において等号の成立する場合，すなわち，Cramér-Rao の下限が達成されるための条件はどうなるであろうか。

$$\phi=\sum_{i=1}^{n}\frac{\partial \log f(x_i,\ \theta)}{\partial\theta}$$

$$=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{f(x_i,\ \theta)}\ \frac{\partial f(x_i,\ \theta)}{\partial\theta}=\frac{\partial \log L(x,\ \theta)}{\partial\theta} \tag{5}$$

とおいた場合，ϕ が t に関して線型，すなわち，

$$\phi=\frac{\partial \log L(x,\ \theta)}{\partial\theta}=A(\theta)t(x_1,\ \ldots,\ x_n)+B(\theta) \tag{6}$$

と表わされ，かつ $t=t(x_1,\ \ldots,\ x_n)$, $y_2=x_2,\ \ldots,\ y_n=x_n$ と変換したとき

$$f(x_1,\ \ldots,\ x_n|\theta)=f(t|\theta)f(y_2,\ \ldots,\ y_n|t,\ \theta) \tag{7}$$

において，$f(y_2,\ \ldots,\ y_n|t,\theta)$ が θ に依存しないときに限って，Cramér-Rao の不等式における等号が成立する。すなわち，t は十分統計量であることになる。

なお，(6)式は次のようにも表わされるであろう：

$$\phi=\frac{\partial \log L(x,\ \theta)}{\partial\theta}=\frac{t-\theta}{\lambda(\theta)}, \tag{8}$$

ただし，$\lambda(\theta)$ は θ に依存するかもしれないが t には依存せず，また t は不偏推定量である。なお(8)の関係式から

$$\mathrm{Var}[t]=\lambda(\theta) \tag{9}$$

なることが導かれる。

(6)から次の関係が導かれる。

$$L(x,\theta)=exp[A^*(\theta)t(x_1,\ldots,x_n)+B^*(\theta)+R(x_1,\ldots,x_n)], \tag{10}$$

ただし，

$$A^*(\theta)=\int_{R(\theta)}A(\theta)d\theta$$

$$B^*(\theta)=\int_{R(\theta)}B(\theta)d\theta$$

で，$R(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ は $x_1,\ \ldots,\ x_n$ のある関数。すなわち，これは Darmois-Koopman の定理である。

次に完備十分統計量 (complete sufficient statistic) を導入すると，次の

結果が導かれる。すなわち，$t=t(x)$ を θ に対する完備十分統計量とすると，各推定可能関数 (estimable function) $g(\theta)$ は，一様最小分数不偏推定量 (uniformly minimum variance unbiased estimator) で推定することができ，さらにこの $g(\theta)$ の一様最小分散不偏推定量は，$g(\theta)$ の一義的な不偏推定量であり，t の関数である。

次に若干の具体例について以上の結論を適用してみよう。

例 1.

平均 μ, 分散 σ^2 の正規母集団 $N(\mu, \sigma^2)$ からの大きさ n の無作為標本を考える。σ^2 は既知とする。尤度関数 $L(x, \mu)$ は次のようになる：

$$L(x, \mu)=\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}e^{-\frac{\sum(xi-\mu)^2}{2\sigma^2}}. \tag{11}$$

これから

$$\phi=\frac{\partial \log L(x, \mu)}{\partial\mu}=\frac{\bar{x}-\mu}{\frac{\sigma^2}{n}} \tag{12}$$

となるので，$\bar{x}$ は μ の不偏推定量になり，その分散は σ^2/n であり，これは μ の不偏推定量のクラスの中で最小となる。なお，$\bar{x}$ は μ の完備十分統計量であるから，$\bar{x}$ は μ の一様最小分散不偏推定量となる。

例 2.

例 1 で，$\mu=0$ で σ^2 が既知なる場合は

$$\phi=\frac{\partial \log L(x, \sigma^2)}{\partial\sigma^2}=\frac{\frac{\sum x_i^2}{n}-\sigma^2}{\frac{2\sigma^4}{n}} \tag{13}$$

となるので，$\sum x_i^2/n$ は σ^2 の不偏推定量となり，その分散は $2\sigma^4/n$ となる。これは，σ^2 の不偏推定量のクラスの中で最小である。なお，$\sum x_i^2/n$ は σ^2 の完備十分統計量となるので，これは σ^2 の一様最小分散不偏推定量となる。

例 3.

次のガンマー分布を考えよう。

$$f(x)=\frac{1}{\Gamma(p)\theta^p}x^{p-1}e^{-x/\theta}, \qquad (14)$$

$$\theta>0,\ p>0,\ 0<x<\infty.$$

ここで p を既知と仮定しよう。

$$\frac{\partial \log \mathrm{L}(x,\theta)}{\partial\theta}=\frac{\dfrac{\bar{x}}{p}-\theta}{\dfrac{\theta^2}{np}} \qquad (15)$$

となり，$\bar{x}/p$ は θ の不偏推定量となり，その分散は θ^2/np となる。これは θ の不偏推定量のクラスの中で最小となる。なお $\bar{x}$ は θ の十分統計量であり，

$$\mathrm{E}[\bar{x}/p]=0$$

は，$\bar{x}/p=0$ のときだけ妥当するので，$\bar{x}/p$ は θ の完備十分統計量となり，$\bar{x}/p$ は θ の一様最小分散不備推定量であることが導かれる。

2

次にわれわれは，竹内［4］で考察した積分作用素を用いて最小分散不偏推定量を求めることにしよう。

パラメーター $\theta\in\Omega$ として，確率密度 $f(x,\theta)$ の，あるパラメーターの値 $\theta_0\in\Omega$ に対する確率密度 $f(x,\theta_0)$ に対する比 $\pi(x,\theta)$ を次のように定義しよう：

$$\pi(x,\theta)=f(x,\theta)/f(x,\theta_0). \qquad (16)$$

われわれはここで

$$\pi(x,\theta)\in \mathrm{L}^2 \qquad (17)$$

を仮定する。さて，積分作用素 λ を考え，θ の最小分散不偏推定量 $t^*(x)$ を次のように表わすことにする：

$$t^*(x)=\lambda\pi=\int_{\mathrm{R}(\theta)}\lambda(\theta_0,\theta)\pi(x,\theta)d\theta, \qquad (18)$$

ただし，$\lambda(\theta_0,\theta)$ は積分方程式の核（kernel）で，

$$\lambda(\theta_0, \theta) \in L^2$$

と仮定する。問題を具体化するために，以下の例では

$$\lambda(\theta_0, \theta) = \lambda_1(\theta_0)\lambda_2(\theta) \tag{19}$$

とする。

なお(18)の関係から次式が導かれる：

$$t^*(x)f(x, \theta_0) = \int_{R(\theta)} \lambda(\theta_0, \theta) f(x, \theta) d\theta. \tag{20}$$

次に $t^*(x)$ の期待値ならびに分散は，Fubini の定理を利用して以下のように求められる（例えば，Nieto [2] 参照)。

$$\begin{aligned} E[t^*(x)] &= \int_{R(x)} t^*(x) f(x, \theta_0) dx \\ &= \int_{R(x)} \int_{R(\theta)} \lambda(\theta_0, \theta) f(x, \theta) d\theta dx \\ &= \int_{R(\theta)} \lambda(\theta_0, \theta) d\theta \int_{R(x)} f(x, \theta) dx \\ &= \int_{R(\theta)} \lambda(\theta_0, \theta) d\theta = \mu(\theta_0). \end{aligned} \tag{21}$$

上式では，$f(x, \theta)$ が密度関数であるから

$$\int_{R(x)} f(x, \theta) dx = 1. \tag{22}$$

なお $t^*(x)$ の分散は次のようにして求められる。

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}[t^*(x)] &= \int_{R(x)} t^{*2}(x) f(x, \theta) dx - \mu^2(\theta_0) \\ &= \int_{R(x)} t^*(x) \int_{R(\theta)} \lambda(\theta_0, \theta) f(x, \theta) d\theta dx - \mu^2(\theta_0) \\ &= \int_{R(x)} \lambda(\theta_0, \theta) \left(\int_{R(x)} t^*(x) f(x, \theta) dx \right) d\theta - \mu^2(\theta_0) \\ &= \int_{R(\theta)} \lambda(\theta_0, \theta) \mu(\theta) d\theta - \mu^2(\theta_0). \end{aligned} \tag{23}$$

以上の結果を，前節で考察した若干の具体例に応用してみよう。

例 4.

まず $\mu=0$ で σ^2 が既知なる正規分布の場合を考えよう。

$$f(x,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right\} \tag{24}$$

においては，尤度関数は次式で表わされる：

$$\mathrm{L}(x,\sigma^2)=(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\sigma^{-n}exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2\sigma^2}\right\}. \tag{25}$$

この場合，$\lambda(\theta_0,\ \theta)$ としては $\lambda(\sigma^2,\theta)$ となり，これを次のようにする：

$$\begin{aligned}\lambda(\sigma^2,\ \theta)&=(n-2)\theta^{n-3}/\sigma^n,\ 0\leq\tau<\sigma\\ &=0, \qquad\qquad \tau>\sigma.\end{aligned} \tag{26}$$

これは L^2 に属することは明らかである。また

$$\pi(x,\ \theta)=exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2}\left(\frac{1}{\theta^2}-\frac{1}{\sigma^2}\right)\right\} \tag{27}$$

も L^2 に属することは明らかであり，われわれのはじめに設定した仮定が満たされることになる。さて

$$\begin{aligned}t^*(x)f(x,\ \sigma^2)&=\frac{(n-2)}{\sigma^n}(2\pi)^{-\frac{n}{2}}\int_0^\sigma\theta^{-3}\,exp\left\{-\frac{\sum x_i^2}{2\theta^2}\right\}d\theta\\ &=\frac{(n-2)}{\sum x_i^2}f(x,\ \sigma^2).\end{aligned} \tag{28}$$

したがって

$$t^*(x)=\frac{n-2}{\sum x_i^2}. \tag{29}$$

次に $t^*(x)$ の期待値は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}[t^*(x)]&=\sigma^{-n}\int_0^\sigma(n-2)\theta^{n-3}d\theta\\ &=\frac{1}{\sigma^2}.\end{aligned} \tag{30}$$

かくして，$t^*(x)=(n-2)/\sum x_i^2$ は $1/\sigma^2$ の最小分散不偏推定量となる。ところで $t^*(x)$ の最小分散は，(23) から次のようにして求められる：

$$\mathrm{Var}[t^*(x)] = \int_0^\sigma \lambda(\sigma^2, \theta)\mu(\theta)d\theta - \mu(\sigma^2)$$

$$= \sigma^{-n}\int_0^\sigma (n-2)\theta^{n-3}\frac{1}{\theta^2}d\theta - \frac{1}{\sigma^2}$$

$$= \frac{(n-2)}{(n-4)}\ \frac{1}{\sigma^4} - \frac{1}{\sigma^4}$$

$$= \frac{2}{n-4}\cdot\frac{1}{\sigma^4}. \tag{31}$$

例 5.

ガンマー分布

$$f(x) = \frac{1}{\Gamma(p)\theta^p}x^{p-1}e^{-x/\theta} \tag{32}$$

$$\theta > 0,\ p > 0,\ 0 < x < \infty,$$

を考えよう。p は既知とする。尤度関数は

$$\mathrm{L}(x, \theta) = \phi_1(x, p)\theta^{-np}e^{-n\bar{x}/\theta} \tag{33}$$

となるが，$\phi_1(x, p)$ は θ に依存しない関数とする。ここで $\lambda(\theta, \tau)$ としては次のものを考えよう：

$$\lambda(\theta, \tau) = \frac{(np-1)\tau^{np-2}}{\theta^{np}}, \quad \tau \leq \theta,$$

$$= 0, \qquad\qquad \tau > \theta. \tag{34}$$

$\lambda(\theta, \tau) \in \mathrm{L}^2$ で，また

$$\pi(x, \tau) = \left(\frac{\tau}{\theta}\right)^{-np} exp\left\{-n\bar{x}\left(\frac{1}{\tau} - \frac{1}{\theta}\right)\right\} \tag{35}$$

も L^2 に属することは明らか。さて

$$t^*(x)f(x, \theta) = \int_0^\theta \frac{(np-1)\tau^{np-2}}{\theta^{np}}f(x, \tau)d\tau$$

$$= (np-1)\phi_1(x, p)\theta^{-np}\int_0^\theta \tau^{-2}e^{-n\bar{x}/\tau}d\tau$$

$$= \frac{np-1}{n\bar{x}}f(x, \theta). \tag{36}$$

したがって

$$t^*(x)=\frac{np-1}{n\bar{x}}. \tag{37}$$

次に $t^*(x)$ の期待値と分散を求めよう。

$$\begin{aligned}E[t^*(x)]&=\int_0^{\theta}\frac{(np-1)\tau^{np-2}}{\theta^{np}}d\tau\\&=\frac{1}{\theta}.\end{aligned} \tag{38}$$

したがって，$(np-1)/n\bar{x}$ は $1/\theta$ の不偏推定量となる。その最小分散は

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}[t^*(x)]&=\int_0^{\theta}\frac{(np-1)\tau^{np-2}}{\theta^{np}}\cdot\frac{1}{\tau}d\tau-\frac{1}{\theta^2}\\&=\frac{np-1}{(np-2)\theta^2}-\frac{1}{\theta^2}\\&=\frac{1}{(np-2)}\cdot\frac{1}{\theta^2}.\end{aligned} \tag{39}$$

前節の例1の場合には，微分作用素を用いて，μ の最小分散不偏推定量を求めることができるが，微分作用素を用いて最小分散不偏推定量を求める問題は別の機会にゆずることにする。

以上の結果からも分るように，われわれの線型作用素を用いて求めた最小分散不偏推定量は，一般に Rao-Cramér の下限よりは小さくない分散をもつことになる。これは問題の定式化の差に帰因するものである。

References

[1] R. V. Hogg & A. T. Craig, *Introduction to Mathematical Statistics*, 2nd ed., 1965, pp. 204–253.

[2] J. Nieto de Pascual, *Theory of Minimum Variance Estimation with Applications*, (unpublished Ph. D. dissertation), 1961, pp. 37–38.

[3] В. И. Романовский, *Математицеская Статистика*, Книга Вторая, 1963, *стр.* 167–476.

[4] 竹内清,「最適推定の問題 — mminimu variance unbiased estimators について —」『商学討究』, 第18巻第2号, 1967, pp. 1–13.