Non-Malleable Vintage Model について

戸島 凞

1. 序，2. 仮定と方程式，3. 定常解，4. 命題の検討，5. 結言

1. Solow [3] が開発した vintage model は，embodied technical progress という考え方を資本理論の中にもち込むことによって epoch-making であったが，その後，この model は学界の共有財産として，種々の関連で用いられるようになった。

Uzawa [7] は vintage model を一般の neo-classical production function と Harrod のいみで neutral technical progress の枠組の中で formulate して，growth equilibrium の path が漸近的に steady state に接近して行くことを主張する stability theorem を証明した。

一方， Solow は Johansen [1] を嚆矢とする， ex-ante substitutable, ex-post non-substitutable といういみで non-malleable な model を， Johansen とは異なった方法で formulate し [4]，興味ぶかい実験を行なった [5]。

こうした non-malleable model も多くの著者達によって広く用いられるところとなっている。

さて，Sheshinski [2] は Solow-Uzawa の vintage model に Johansen-Solow の non-malleability を導入して，Uzawa の stability theorem と類似の命題が，そのように修正された model においてもなり立つことを証明しようとした。実際，Sheshinski の model は non-malleability という1点を除いて多くの点で Uzawa の formulation を踏襲しているようにおもわ

れる。

ところで，この種の model を扱った論文では，証明の過程の論理が何にもまして重要性をもつことはいうまでもない。この観点から Sheshinski の論文をよむ時に，筆者は論理的に必ずしも首肯しえない，いくつかの点が Sheshinski の行論の中にあるのを感ずる。

この小論は Sheshinski の論文に対する critical note として，Sheshinski の行論の中の 2，3 の点を問題にする。従って，議論の性質上，この小論は必ずしも self-contained にはならないことを予め断っておかなければならない。しかし，Sheshinski の論文をある程度 reproduce することは避けることができないので，その範囲で，なるべく一貫性を保つように心がけた。

なお，以下では，経済的いみには一切ふれず，もっぱら数学的な観点のみから議論をすすめる。

2. $g(\lambda)$[(1)] は非負の実数に対して定義された twice continuously differentiable な実数値関数で，次の条件をみたす。

$$g(\lambda)>0,\ g'(\lambda)>0,\ g''(\lambda)<0 \text{ for all } \lambda>0,$$

$$g(0)=0,\ g(\infty)=\infty.$$

$\mu(t)$[(2)] は非負の実数に対して定義された differentiable な実数値関数で，次の条件をみたす。

$$\mu(0)=1,\ \mu(t)=0 \text{ for } t \geqq z,$$

$$\mu(t)>0,\ \mu'(t)\leqq 0 \text{ for all } 0<t<z.$$

ここで，z は正の実数または

$$z=+\infty$$

である[(3)]。

(1) $g(\lambda)$ は生産関数である。

(2) $\mu(t)$ は capital depreciation の pattern をあらわす。

(3) これは Sheshinski の論文にのべられている通りであるが，以下では，$z=+\infty$ である時のみを考える。z が有限の正の実数の時は，Sheshinski がふれている以上にこみ入った分析が必要になるので，ここではその問題には立ち入らない。しかし，以下では，Sheshinski が z とかいているところは，形式上，われわれも z とかくことにする。

さて，$k(t)$, $\lambda(t)$, $w(t)$ に関する次のような方程式を考えよう。

(1) $w(t)=g'(\lambda(t))$, $t\geqq 0$,

(2) $$1=\int_{V(t,w)}\lambda(v)e^{-(\beta+n)(t-v)}\mu(t-v)k(v)dv,$$

(3) $$k(t)=s\int_{V(t,w)}g(\lambda(v))e^{-(\alpha+\beta+n)(t-v)}\mu(t-v)k(v)dv,$$

(4) $$V(t,w)=\left\{t-z\leqq v<t \,\middle|\, \frac{g(\lambda(v))}{\lambda(v)}e^{-\alpha(t-v)}-w(t)\geqq 0\right\}.$$

ただし，α, β, n, s[4] は定数で

$\alpha>0$, $\beta\geqq 0$, $n>0$, $1\geqq s>0$

とする。$g(\lambda)$ については，さらに，次の仮定 (S) がおかれる。いま，

$$\sigma(\lambda)=-\frac{g'(\lambda)(g(\lambda)-\lambda g'(\lambda))}{\lambda g(\lambda)g''(\lambda)}$$

と定義する。[5]

(S) $\sigma(\lambda)\leqq 1$ for all $\lambda>0$.

(1)〜(4) の system をみたす ($k(t)$, $\lambda(t)$, $w(t)$) を *equilibrium solution* と呼ぶ。

3. (1)〜(4) の system には，すくなくてもひとつの equilibrium solution が存在する。すなわち，次の命題がなり立つ。

命題 1： (S) がなり立っているとする。その時，ある正の定数 k^*, λ^*, w^*, m^* が存在して

(1′) $w^*=g'(\lambda^*)$,

(2′) $$1=\int_0^{m^*}\lambda^* e^{-(\beta+n)v}\mu(v)k^*dv,$$

---

(4) α, β, n, s はそれぞれ embodied technical progress の率，disembodied technical progress の率，労働量の成長率，貯蓄率をあらわす。

(5) 一見してあきらかなように，$\sigma(\lambda)$ は代替の弾力性である。$g(\infty)=\infty$ と仮定されているから，$\sigma(\lambda)$ は定数で，かつ

(*) $\sigma(\lambda)<1$

となることはありえない。なぜならば，(*) をみたす $g(\lambda)$ は有界となることが，CES 生産関数の理論によって確立されているからである。

(3′) $k^*=s\int_0^{m^*}g(\lambda^*)e^{-(\alpha+\beta+n)v}\mu(v)k^*dv,$

(4′) $g'(\lambda^*)=\dfrac{g(\lambda^*)}{\lambda^*}e^{-\alpha m^*}$

となる。[(6)] しかも，この k^*, λ^*, w^*, m^* は unique である。

この命題は，(S) がなり立てば

(5) $\eta(\lambda)=\dfrac{\lambda g'(\lambda)}{g(\lambda)}$

が，λ の non-increasing function になる，[(7)] ということを使って直ちに証明することができる。

さて，ここで，$\underline{k}_0$, $\overline{k}_0$, $\underline{\lambda}_0$, $\overline{\lambda}_0$ を

$$\underline{k}_0\leqq k^*\leqq\overline{k}_0,\quad \underline{\lambda}_0\leqq\lambda^*\leqq\overline{\lambda}_0$$

という関係をみたす任意の正の実数としてえらんでおく。

4. Sheshmski の論文の主要な部分は，(1)～(4) の system の任意の equilibrium solution[(8)] が，$t\to\infty$ の時に，定常解 (k^*, λ^*, w^*) に converge

---

(6) ここの v は，(1)～(4) の system の v と同じものではなく，(1)～(4) の $t-v$ がここの v にあたるように変数変換をほどこしてある。(1′)～(4′) に対しては

$$V(t, w^*)=\{t-z\leqq v<t\mid \frac{g(\lambda^*)}{\lambda^*}e^{-\alpha(t-v)}-w^*\geqq 0\}$$
$$=\{v\mid t-m^*\leqq v<t\}$$

となることはあきらかである。すなわち，(1′)～(4′) の v が属さなければならない集合は

$$\{v\mid 0<v\leqq m^*\}$$

である。

(7) ここで，基本方程式

$$\frac{d\eta(\lambda)}{d\lambda}=\frac{\sigma(\lambda)-1}{\sigma(\lambda)}\cdot\frac{\eta(\lambda)[1-\eta(\lambda)]}{\lambda}\leqq 0 \quad \text{for all } \lambda>0$$

となることは，実際に，微分演算をやってたしかめることができる。$\eta(\lambda)<1$ となることについては，脚注(10)をみよ。

(8) **命題1** によって，(1)～(4) には，すくなくても，ひとつの equilibrium solution があることがわかったが，この他に equilibrium solution があるか，どうかは不明である。この点に関して，(1)～(4) の解の存在をたしかめなければならないが，Sheshinshi はそれにふれていない。また，仮に，解が存在しても，すべての $t\geqq 0$ に対して解が定義されうるか，どうか，わからない。

することを示すことに費されているが（これを **Sheshinski の stability theorem** と呼ぶ），そのために Sheshinski はいくつかの命題をかかげている。

まず，

$$(6)\quad \begin{aligned} y &= \frac{g(\lambda)}{\lambda} e^{-\alpha m},\ \lambda,\ m>0, \\ 1 &= \lambda k \int_0^m e^{-(\beta+n)v} \mu(v) dv,\ k>0 \end{aligned}$$

によって implicit に定義される関数

$$y = y(\lambda, k)$$

について考えよう。Sheshinski は，あきらかに

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} < 0$$

がなり立つ[(9)]，としているが，これは厳密性をかいている。なぜならば，

$$(7)\quad \frac{\partial y}{\partial \lambda} = e^{-\alpha m} \left[\frac{g'(\lambda)\lambda - g(\lambda)}{\lambda^2} - \alpha \frac{g(\lambda)}{\lambda} \cdot \frac{\partial m}{\partial \lambda} \right]$$

であるから，右辺の角括弧の中の第 1 項は，$g(\lambda)$ の性質により負となり[(10)]，第 2 項は，$\frac{\partial m}{\partial \lambda}<0$ から正になる[(11)]ことに注意すれば，α が充分に大である時（α は正でありさえすればよい）

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda} > 0$$

となる。この $\frac{\partial y}{\partial \lambda}$ の符号に関して，正しくは次のようにのべなければならな

(9) Sheshinski [2, p. 243]

(10) 中間値の定理と $g(\lambda)$ の concavity ($g''(\lambda)<0$) を使えば

$$\frac{g(\lambda)-g(0)}{\lambda-0} = g'(\bar{\lambda}) > g'(\lambda) \text{ for some } \bar{\lambda}\epsilon(0, \lambda),\ \lambda>0$$

がなり立つ。これから

$$g(\lambda) - \lambda g'(\lambda) > 0$$

または

$$\eta(\lambda) = \frac{\lambda g'(\lambda)}{g(\lambda)} < 1$$

がえられる。なお，完全競争がおこなわれていれば，$g'(\lambda)$ は利潤率にひとしいはずであるから，$\eta(\lambda)$ は利潤の分配率である。

(11) すぐあとの**命題 2** の証明の冒頭の部分をみよ。

い。

命題2： (S) がなり立っているとする。その時，どんな $\alpha>0$ に対しても，ある $\bar{\lambda}$ が存在して，$\lambda>\bar{\lambda}$ ならば

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}<0$$

がなり立つ。

証明： いま，k を任意の値に固定しておく。そうすると，(6) から

$$\frac{dm}{d\lambda}=-\frac{e^{(\beta+n)m}}{\lambda^2 k\mu(m)}$$

がえられる。これと (5) を使って，(7) の右辺をかきかえると

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}=\frac{g(\lambda)e^{-\alpha m}}{\lambda^2}\left[(\eta(\lambda)-1)+\frac{\alpha}{\lambda}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{(\beta+n)m}}{\mu(m)}\right]$$

となる。仮定 (S) のもとでは

$$\lim_{\lambda\to\infty}(\eta(\lambda)-1)=\pi^*\overset{(12)}{<}0$$

がなり立つ。また，$\lambda\to\infty$ となる時

$$\frac{1}{\lambda}\to 0,$$

$$m\to 0$$

となり，$m\to 0$ となる時

$$e^{(\beta+n)m}\to 1,$$

$$\mu(m)\to 1$$

となるから

---

(12) ある $\varepsilon>0$ があって，$\sigma(\lambda)<1-\varepsilon(>1+\varepsilon)$ for all $\lambda>0$ ならば，$\pi^*=-1(0)$ となることは脚注(7)の基本方程式を使って証明することができる。経済的にいえば，このことは「新古典派の生産関数において，利潤の分配率 $\eta(\lambda)$ は，代替の弾力性が1より小 (大) ならば $\lambda\to\infty$ の時に，0(1) に接近して行く」(**Ackerlof-Nordhaus の lemma**) ということである。なお，**命題2**の仮定 (S) は，より一般的には

$$(\mathrm{S}')\quad \lim_{\lambda\to\infty}\eta(\lambda)\neq 1$$

におきかえることができる。あきらかに，(S) ならば (S′) がなり立つ。

$$\frac{e^{(\beta+n)m}}{\mu(m)}\to 1 \text{ as } \lambda\to\infty.$$

従って

$$\frac{\alpha}{\lambda}\cdot\frac{1}{k}\cdot\frac{e^{(\beta+n)m}}{\mu(m)}\to 0 \text{ [13] as } \lambda\to\infty.$$

よって, λ が十分大ならば

$$\frac{\partial y}{\partial\lambda}<0$$

がえられる。このことから命題の成立はあきらかである。Q. E. D.

ところで, 任意の k に対して

$$y(\lambda, k)=g'(\lambda)$$

となる unique な λ が存在するから,[14] $\bar{k}\geqq\bar{k}_0$ となる $\bar{k}$ に対して $\underline{\lambda}$ を

$$y(\underline{\lambda}, \bar{k})=g'(\underline{\lambda})=\frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}}e^{-\alpha\underline{m}},$$

$$1=\underline{\lambda}\bar{k}\int_0^{\underline{m}}e^{-(\beta+n)v}\mu(v)dv$$

によって定義する。同様に, $\underline{k}\leqq k_0$ となる $\underline{k}$ に対して $\bar{\lambda}$ を

$$y(\bar{\lambda}, \underline{k})=g'(\bar{\lambda})=\frac{g(\bar{\lambda})}{\bar{\lambda}},$$

$$1=\bar{\lambda}\underline{k}\int_0^{\bar{m}}e^{-(\beta+n)v}\mu(v)dv$$

によって定義する。

さて, 任意の $t^0\geqq 0$ 対して

$$\underline{k}\leqq k(t)\leqq\bar{k},\ \underline{\lambda}\leqq\lambda(t)\leqq\bar{\lambda}\quad\text{for all } t<t_0$$

となる equilibrium solution があると仮定した時に, $k(t_0)$, $\lambda(t_0)$ がどんな範囲に入るかを見よう。

まず, Sheshinski は上の条件のもとで $k(t_0)$ がとりうる値の最大 (小) 値

---

(13) いうまでもなく, この convergence のはやさは α に depend しているから, この項が $|\pi^*|$ 以下になる λ の infimum も α に depend してきまる。

(14) Sheshinski は証明をあたえていないが, その証明は容易である。

k_{max} (k_{min}) が

$$k_{max}<\bar{k} \quad (\underline{k}<k_{min})$$

となることを示しているが,[15] minor な書き誤りとおもわれる個所[16]は別にしても, 証明の肝心の個所が heuristic にかかれているのみなので理解しにくい。しかし, よくよめば, その部分は, 結局, 次の**問題**:

$$\max_{\varphi}\int_0^T e^{-\xi x}\varphi(x)dx,\ \xi>0,\ T\epsilon[0,\tau],\ \tau>0,$$

subject to

$$be^{-\gamma x}\leqq\varphi(x)\leqq ae^{-\gamma x},\ 0\leqq b<a,\ \gamma>0,$$

$$\int_0^T\varphi(x)dx=1$$

を

$$\int_0^{T'}ae^{-\gamma x}dx=1$$

となる, ある $T'<\tau$ が存在する場合についてといた時の解 $\varphi^*(x)$ は

$$\varphi^*(x)=ae^{-\gamma x},\ 0\leqq x<T'$$

によってあたえられる[17]という主張をしていると考えてよいことがわかる。ここでは, うえの命題を**命題3**として証明を補っておこう。

命題3の証明: いま,

$$0\leqq\bar{T}<T'<\bar{\tau}\leqq\tau$$

となる, ある $\bar{T}$, $\bar{\tau}$ と条件をみたすある $\varphi(x)$ について

$$\int_{\bar{T}}^{T'}(ae^{-\gamma x}-\varphi(x))dx=\int_{T'}^{\bar{\tau}}\varphi(x)dx\equiv K$$

---

(15) Sheshinski [2, p. 245]

(16) Sheshinski [2, p. 245] の当該個所は次のようにならなければならない。

$$\max_{\Psi,\,\delta} J(\psi,\delta)=s\int_S g(\delta(t_0-v))e^{-(\alpha+\beta+n)}\mu(v)\psi(t_0-v)dv,$$

$$1=\int_S\delta(t_0-v)e^{-(\beta+n)v}\mu(v)\psi(t_0-v)dv.$$

(17) Sheshinski が refer している, Solow, Tobin, Weizsäcker and Yarri [6] でも, このことは formal に証明されていない。

となったとする。この時

$$\int_0^{T'} e^{-\xi x} a e^{-\gamma x} dx \geqq \int_0^{\bar{T}} e^{-\xi x} a e^{-\gamma x} dx$$
$$+ \int_{\bar{T}}^{\bar{\tau}} e^{-\xi x} \varphi(x) dx$$

がいえれば命題が証明されたことになる。

さて,

$$\int_{\bar{T}}^{T'} e^{-\xi x}(a e^{-\gamma x} - \varphi(x)) dx$$
$$\geqq e^{-\xi T'} \int_{\bar{T}}^{T'} (a e^{-\gamma x} - \varphi(x)) dx = e^{-\xi T'} K$$
$$= e^{-\xi T'} \int_{T'}^{\bar{\tau}} \varphi(x) dx \geqq \int_{T'}^{\bar{\tau}} e^{-\xi x} \varphi(x) dx.$$

すなわち

$$\int_{\bar{T}}^{T'} e^{-\xi x}(a e^{-\gamma x} - \varphi(x)) dx \geqq \int_{T'}^{\bar{\tau}} e^{-\xi x} \varphi(x) dx$$

がなり立つ。この両辺に

$$\int_0^{\bar{T}} e^{-\xi x} a e^{-\gamma x} dx + \int_{\bar{T}}^{T'} e^{-} \varphi^{\xi x}(x) dx$$

を加えれば,所期の結果をうる。とくに,$\bar{T}=0$ ならば

$$\int_0^{T'} e^{-\xi x} a e^{-\gamma x} dx \geqq \int_0^{\bar{\tau}} e^{-} \varphi^{\xi x}(x) dx$$

である。Q. E. D.

これで,とにかく,$k(t_0)$ についての Sheshinski の命題は正しいのであるが,次に $\lambda(t_0)$ について検討しよう。

Sheshinski は

$$k(t) \leqq \bar{k},\ \lambda(t) \geqq \underline{\lambda} \quad \text{for all } t < t_0$$

である時,$\lambda(t_0)$ がとりうる値の最小値 λ_{min} は

$$g'(\lambda_{min}) = \frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}} e^{-\alpha \underline{m}},$$

$$1=\underline{\lambda}\bar{k}\int_0^{\underline{m}} e^{-(\beta+n)v}\mu(v)dv$$

によってあたえられると主張している。[18] すなわち，(1)～(4) の system を考慮すれば，ここでは，次のような**問題**が考えられているのである。

$$\max_{\lambda}\ w(t_0)=\frac{g(\lambda(t_0-m))}{\lambda(t_0-m)}e^{-\alpha m},$$

subject to

$$\frac{g(\lambda(t_0-m))}{\lambda(t_0-m)}e^{-\alpha m}\leqq\frac{g(\lambda(t_0-v))}{\lambda(t_0-v)}e^{-\alpha v},$$

$$1=\int_0^m k(t_0-v)\lambda(t_0-v)e^{-(\beta+n)v}\mu(v)dv,$$

$$k(t_0-v)\leqq\bar{k},\ \lambda(t_0-v)\geqq\underline{\lambda},\ 0<v\leqq m.$$

従って，Sheshinski の主張は，この問題の解が上の形であたえられるという内容をもっていることになる（これを**命題4**とする)。しかし，これは正しくない。このことを示すために，ひとつの反例をあげよう。

命題4の反例：

いま，

$$\varepsilon\equiv\frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}}(1-e^{-\alpha\underline{m}})$$

とおく。$g(\lambda)$ の連続性によって，ある $\lambda'(>\underline{\lambda})$ が存在して

$$0<\frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}}-\frac{g(\lambda')}{\lambda'}<\frac{\varepsilon}{2}$$

となる。ここで

$$\Delta\equiv\lambda'-\underline{\lambda}$$

とおく。$0\leqq\delta<\underline{m}$ となる任意の δ に対して

$$\lambda(t_0-v;\ \delta)=\begin{cases}\underline{\lambda}, & \delta\leqq v\leqq\underline{m},\\ \underline{\lambda}+\dfrac{\Delta}{\delta^3}(\delta-v)^3, & 0<v<\delta\end{cases}$$

---

(18) ここでの記号法と議論の関連は，多少，Sheshinski と違うけれども，論理的内容はまったく同じである。Sheshinski [2, p. 246] をみよ。

という関数を定義する。あきらかに，$\lambda(t_0-v;\ \delta)$ は連続で integrable である。[19] しかも

$$\underline{\lambda}<\lambda(t_0-v;\ \delta),\ 0<v<\delta$$

であるから

$$1=\bar{k}\int_0^{x(\delta)}\lambda(t_0-v;\ \delta)e^{-(\beta+n)v}\mu(v)dv$$

となる $x(\delta)$ を考えれば

$$x(\delta)<\underline{m}$$

でなければならない。また

(8) $x(\delta)\to\underline{m}$ as $\delta\to 0$

となることは容易にわかる。さらに

$$G(\delta)=\frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}}(1-e^{-\alpha\delta})$$

という関数を定義すれば

$$G(\delta)>0,$$

$$\lim_{\delta\to 0} G(\delta)=0$$

となるから，δ_1 を

$$G(\delta)<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{for } \delta<\delta_1$$

となるように適当にえらぶことができる。さらに，(8)によって

$$\frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}}(e^{-\alpha x(\delta)}-e^{-\alpha\underline{m}})<\frac{\varepsilon}{2}\quad \text{for } \delta<\delta_2$$

となる適当な δ_2 をえらぶことができる。

そこで

$$\delta^*=\min\ (\delta_1,\ \delta_2),$$

$$x^*=x(\delta^*)$$

とおけば

(19) さらに，differentiable でもある。

$$x^* < \underline{m}$$

はあきらかであるから

$$\frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}} e^{-\alpha x^*} > \frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}} e^{-\alpha \underline{m}},$$

$$\frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}} e^{-\alpha x^*} \leqq \frac{g(\lambda(t-v;\ \delta^*))}{\lambda(t-v;\ \delta^*)} e^{-\alpha v},$$

$$1 = \bar{k} \int_0^{x^*} \lambda(t-v;\ \delta^*) e^{-(\beta+n)v} \mu(v) dv,$$

$$\lambda(t-v;\ \delta^*) \geqq \underline{\lambda},\ 0 < v \leqq x^*$$

となって，Sheshinski の解が最大値（従って，$\lambda(t_0)$ の最小値）をあたえないことがわかる。

5. λ_{min} が

$$g'(\lambda_{min}) = \frac{g(\underline{\lambda})}{\underline{\lambda}} e^{-\alpha \underline{m}}$$

をみたすという主張は Sheshinski の stability theorem の証明の中での重要な point になっており，これがいえなければ，Sheshinski の論理は重大な困難に遭遇することになる。

従って，Sheshinski の stability theorem は Sheshinski の論法によっては，いまだ，証明されていないことになる。

引 用 文 献

[1] Johansen, L. "Substitution Versus Fixed Production Coefficient in the Theory of Economic Growth," *Econometrica*, vol. 27, no. 2 (April, 1959), pp. 157–176.

[2] Sheshinski, E. "Balanced Growth and Stablity in the Johansen Vintage Model," *Review of Economic Studies*, vol. XXXIV(2), no. 98 (April, 1967), pp. 239–248.

[3] Solow, R. "Investment and Technical Progress," in K. J. Arrow, S. Karlin and P. C. Suppes (ed. by), *Mathematical Methods in the Social Sciences, 1959*, Stanford University Press (1960), pp. 89–104.

[4] Solow, R. "Substitution and Fixed Production in the Thory of Capital," *Review of Economic Studies*, vol. XXIX(3), no. 80 (June, 1962), pp. 207–218.

[5] Solow, R. "Heterogeneous Capital and Smooth Production Functions: An Experimental Study," *Econometrica*, vol. 31, no. 4 (October, 1963), pp. 623–645.

[6] Solow, R., J. Tobin, C. C. von Weizsäcker and M. E. Yaari "Neoclassical Growth with Fixed Factor Proportions," *Review of Economic Studies*, vol. XXXIII(2), no. 94 (April, 1966), pp. 79–116.

[7] Uzawa, H. "A Note on Professor Solow's Model of Technical Progress," *Economic Studies Quarterly*, vol. XIV, no. 3 (June, 1964), pp. 63–68.