＜研究ノート＞

最小分散不偏推定量について

——線型微分作用素の応用——

竹内　清

1

この研究ノートは竹内［4］,［5］,［6］に続く一連の研究結果の一部である。竹内［5］では最小分散不偏推定量についての一般理論が展開され，竹内［6］ではその特別の場合としての積分作用素の応用が考察されたが，ここでは最小分散不偏推定量を線型微分作用素を用いて表わす問題を考えることにしよう。

さて次の1階の線型微分方程式を考えよう。(1)

$$t^*(x)\phi(x;\theta)=a_0(\theta)\phi(x;\theta)+a_1(\theta)\phi_\theta(x;\theta), \tag{1}$$

ただし，$\phi(x;\theta)$ の範囲は θ とは独立とする。また $\phi_\theta(x;\theta)$ は $\phi(x;\theta)$ を θ に関して微分したものである。また(1)式は次の(2)式のようにも表わすことができよう。

$$t^*(x)=a_0(\theta)+a_1(\theta)\left.\frac{\partial\pi(x;\tau)}{\partial\tau}\right|_{\tau=\theta}, \tag{2}$$

ただし

$$\pi(x;\tau)=\phi(x;\tau)/\phi(x;\theta)\in L^2. \tag{3}$$

すなわち，$\pi(x;\tau)$ は L^2 空間に属するものとする。(2)式の表現は竹内［5］の(58)式の特別な場合であり，また Stein［2］の Corollary 2 の(25)式に対応

(1) ここでは出発点として Nieto［1］の表現を利用することにする。ここでは1階の線型微分方程式だけを考えることとする。

する式と考えられる。

(1)式を θ に関して積分することにより

$$\phi(x;\ \theta)=C(x)exp\left\{t^*(x)\int\frac{1}{a_1(\theta)}d\theta-\int\frac{a_0(\theta)}{a_1(\theta)}d\theta\right\}. \tag{4}$$

上式で

$$\int\frac{1}{a_1(\theta)}d\theta=P(\theta),$$

$$-\int\frac{a_0(\theta)}{a_1(\theta)}d\theta=Q(\theta),$$

$$C(x)=exp\{K(x)\}$$

とおくことにより次の結果が求められる。

$$\phi(x;\ \theta)=exp\{Q(\theta)+t^*(x)P(\theta)+K(x)\}. \tag{5}$$

(5)式の結果は，$\phi(x;\ \theta)$ の Koopman-Darmois form であり，周知の定理から，$t^*(x)$ は

$$\mu(\theta)=\frac{\partial P(\theta)}{\partial\theta}\Big/\frac{\partial Q(\theta)}{\partial\theta}=-\frac{P'(\theta)}{Q'(\theta)}\ ;\ Q'(\theta)\neq 0 \tag{6}$$

の十分統計量であり最小分散不偏推定量 (minimum variance unbiased estimator) となることがわかる。また $a_1(\theta)$ は $t^*(x)$ の分散となり，これは不偏推定量の中で最小の分散をもつことが与えられる。これらの関係を若干の例についてみてみよう。

2

例 1.

パラメーター θ, $0<\theta<\infty$, をもったポアソン分布を考えよう。

$$f(x\,;\ \theta)=\frac{\theta^x e^{-\theta}}{x\,!},\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

$$=0 \quad \text{elsewhere}. \tag{7}$$

この尤度 $\phi(x;\ \theta)$ は次のようになる。

$$\phi(x;\theta)=\frac{\theta^{\Sigma x_i}e^{-n\theta}}{(x!)^n},\quad x=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$
$$=0 \quad \text{elsewhere.} \tag{8}$$

さてこれから(2)式を構成すると

$$t^*(x)=a_0(\theta)+a_1(\theta)\left(\frac{1}{\theta}\sum x_i-n\right). \tag{9}$$

ところで，$t^*(x)$ が不偏推定量であるためには

$$\mathrm{E}\{t^*(x)\}=\mathrm{E}\left\{a_0(\theta)+a_1(\theta)\left(\frac{1}{\theta}\sum x_i-n\right)\right\}$$
$$=a_0(\theta)+a_1(\theta)\mathrm{E}\left\{\frac{1}{\theta}\sum x_i-n\right\}$$
$$=a_0(\theta)=\theta \tag{10}$$

でなければならない。上式の結果は

$$\mathrm{E}\left\{\frac{1}{\theta}\sum x_i-n\right\}=\frac{1}{\theta}\mathrm{E}\left(\sum x_i\right)-n$$
$$=\frac{1}{\theta}n\theta-n=0$$

から容易に得られる。

$t^*(x)$ の分散 $\mathrm{Var}\{t^*(x)\}$ は次のようにして求められる。$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$ が相互に独立であるから

$$\underset{i\neq j}{\mathrm{E}}(x_ix_j)=0.$$

したがって

$$\mathrm{Var}\{t^*(x)\}=a_1^2(\theta)\frac{1}{\theta^2}n\ \mathrm{Var}(x)$$
$$=a_1^2(\theta)\frac{n\theta}{\theta^2}=a_1^2(\theta)\frac{n}{\theta}. \tag{11}$$

ポアソン分布においては，平均と分散が等しい。すなわち，

$$\mathrm{Var}(x)=\theta$$

から，上式は容易に求められる。

ところで，この場合，regularity conditions が満たされているので，

$$\frac{\partial \log \phi(x;\theta)}{\partial\theta}=\frac{1}{\theta}\sum x_i-n$$

$$=\frac{n\bar{x}-n\theta}{\theta}=\frac{\bar{x}-\theta}{\dfrac{\theta}{n}} \tag{12}$$

となり，$\bar{x}$ は θ の最小分散不偏推定量で，その最小分散は θ/n で与えられることが容易にわかる。したがって(11)と(12)の結果から

$$\mathrm{Var}\{t^*(x)\}=a_1{}^2\frac{n}{\theta}=\frac{\theta}{n} \tag{13}$$

が満たされなければならない。これから

$$a_1(\theta)=\frac{\theta}{n} \tag{14}$$

が与えられる。したがって(9)式の表現において $a_1(\theta)$ は $t^*(x)$ の最小分散を表わすことになる。

(10)と(14)の結果から，(9)式は

$$t^*(x)=\theta+\frac{\theta}{n}\left\{\frac{n(\bar{x}-\theta)}{\theta}\right\}$$

$$=\bar{x} \tag{15}$$

ということになる。すなわち，ポアソン分布においては，平均 θ の最小分散不偏推定量 $t^*(x)$ は $\bar{x}$ で与えられ，これは線型微分作用素を用いた(9)式で表わされる。

例 2.

平均 θ, $-\infty<\theta<\infty$，分散 σ^2 をもった正規分布からの n 個の無作為標本を考えよう。

$$f(x;\theta,\sigma^2)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}exp\left\{-\frac{(x-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{16}$$

$$-\infty<x<\infty,\ -\infty<\theta<\infty.$$

ここで分散 σ^2 は与えられた正数としよう。この尤度関数 $\phi(x;\theta)$ は

$$\phi(x;\ \theta)=\phi_1(x;\ \sigma^2)exp\left\{-\frac{\sum(x_i-\theta)^2}{2\sigma^2}\right\}, \tag{17}$$

ただし，$\phi_1(x;\ \sigma^2)$ は θ に依存しない関数とする。これから(2)式を構成すると

$$t^*(x)=a_0(\theta)+a_1(\theta)\frac{\sum(x_i-\theta)}{\sigma^2}. \tag{18}$$

$t^*(x)$ が θ の不偏推定量であるためには

$$\mathrm{E}\{t^*(x)\}=a_0(\theta)=\theta \tag{19}$$

でなければならない。上式は

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\{\textstyle\sum(x_i-\mu)\}&=n\mathrm{E}(x)-n\mu\\&=0\end{aligned}$$

であるから容易に求められる。

$t^*(x)$ の分散，$\mathrm{Var}\{t^*(x)\}$，は，例 1 の場合と同様にして

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}\{t^*(x)\}&=a_1{}^2(\theta)\frac{n\sigma^2}{\sigma^4}\\&=a_1{}^2(\theta)\frac{n}{\sigma^2}.\end{aligned} \tag{20}$$

ところで，例 1 の場合と同様にして，

$$\begin{aligned}\frac{\partial\ \log\ \phi(x;\ \theta)}{\partial\theta}&=\frac{\sum(x_i-\theta)}{\sigma^2}\\&=\frac{\bar{x}-\theta}{\frac{\sigma^2}{n}}.\end{aligned} \tag{21}$$

これから $\bar{x}$ は最小分散の不偏推定量であり，その分散は σ^2/n であることが容易に導かれる。したがって，この結果と(20)式から

$$\mathrm{Var}\{t^*(x)\}=a_1{}^2(\theta)\frac{n}{\sigma^2}=\frac{\sigma^2}{n}.$$

これから

$$a_1(\theta)=\frac{\sigma^2}{n} \tag{22}$$

が求められる。すなわち，$a_1(\theta)$ は $t^*(x)$ の最小分散を表わす。

⑲式と㉒式から，⑱式は次のようになる。

$$t^k(x)=\theta+\frac{\sigma^2}{n}\,\frac{n(\bar{x}-\theta)}{\sigma^2}$$
$$=\bar{x}.$$

すなわち，例2のような正規分布においては，分散 σ^2 が与えられた場合，平均 θ の最小分散不偏推定量 $t^k(x)$ は $\bar{x}$ で与えられ，これは線型微分作用素を用いた⑱式で表わされる。

参 考 文 献

[1] J. Nieto de Pascual, *Theory of Minimum Variance Estimation with Applications*, (unpublished Ph. D. dissertation), 1961.

[2] C. Stein, "Unbiased estimates with minimum variance," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 21, 1950, pp. 406–415.

[3] K. Takeuchi, "On unbiased minimum variance estimators," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 37, 1966, pp. 1860–1861.

[4] K. Takeuchi, "On minimum variance unbiased estimators," *The Economic Review*, Vol. 18, No. 1, 1967, pp. 89–99.

[5] 竹内清，"最適推定の問題—minimum variance unbiased estimators について—"，『商学討究』，第18巻，第2号，pp. 1–13 (1967)。

[6] 竹内清，"最小分散不偏推定量についての一考察"，『商学討究』，第18巻，第4号，pp. 87–96 (1968)。