資本の相対的分け前について*

戸島　煕

1. 序，2. elasticity of substitution，3. 定義，4 資本の相対的分け前，5 lemmas，6 主要結果，7 結語。

1. 30年代の初期に Hicks [2]，Robinson [4] らによって，任意の生産要素の増加が，その生産要素に対する生産物の分け前にどんな影響を与えるかという問題に関連して，elasticity of substitution という興味ぶかい概念が導入せられた。Hicks の与えた結論は，よく知られているように，次のようなものである。もし elasticity of substitution が1より大ならば，任意の要素の増加は，その相対的分け前を増加させ，もし elasticity of substitution が1より小ならば，その相対的分け前を減少させる。elasticity of substitution という概念とこの結論をめぐって創刊されたばかりの Review of Economic Studies 誌上でいくつかの議論が行なわれて，結局，elasticity of substitution という概念は経済分析の武器のひとつとして広く承認をうけるようになった。

ところで，最近になって，CES 生産関数の開発とか，neoclassical school の成長理論などに関連して，ふたたび，この elasticity of substitution という概念が脚光をあびるにいたった。

Ackerlof and Nordhaus [1]，Nordhaus [3] はうえの Hicks の命題を1歩すすめた次のような命題を提出している。もし生産が substitution-inelastic

---

* 本稿は，本誌前号に掲載された拙稿「Non-Malleable Vintage Model について」の appendix としてかかれた。すなわち，前稿の脚註(7)，(12)で簡単にふれた事柄を，ここでは一層敷延してのべた。しかし，topics としては前稿とは独立である。なお，本稿の1，2の点については，北大大学院の若林信夫氏に負っている。

ならば，資本の相対的分け前は，capital / labor ratio が限りなく増大して行くにつれて，次第に0に近づく。もし生産が substitution-elastic ならば，資本の相対的分け前は，capital / labor ratio が限りなく増大して行くにつれて，次第に1に近づく。Ackerlof and Nordhaus は，この命題は elasticity of substitution と相対的分け前の間のよく知られた関係に depend している，とのべているのみで，証明はあたえていない。ここでは，Hicks の命題も Ackerlof and Nordhaus の命題も用語を厳密に定義しないで，いわば，heuristic にのべたが，これらは元来もっと厳密にのべられるべき命題である。ことに neoclassical school における elasticity of subslitution という概念の重要性を考えればこのことは当然であろう。

この小論では Ackerlof and Nordhaus の命題を証明して，併せて Hicks の命題との関係を考える。以下では，行論の必要上 elemental な点にもふれたが，self-containedness のために，繁をいとわず証明をあたえるべき所は証明をあたえ，注意すべき点については注意をよびおこしておいた。

2. 生産はふたつの生産要素—労働 L と資本 K—によって homogeneous な生産物 Y がつくられるものとし，その関係を

(1)　$Y=F(K, L)$

であらわす。関数 F は R_+^2 (1) で定義され，連続2回微分可能でかつ正値1次同次であるとする。さらに，F は次のような neoclassical な性質をもつものとする。

$$F(K, L)>0,$$

(2)　$F_K>0,$　　　for all $K, L>0.$

$$F_{KK}<0,$$

以下では $L>0$ と仮定する。いま

(1)　2次元の Euclidean space の非負象限を示す。

$$y \equiv Y/L,$$
$$k \equiv K/L,$$
$$f(k) \equiv F(k,\ 1)$$

とおけば，(1)は

(3)　$y = f(k)$

とかくことができる。このとき(2)は

$$f(k) > 0,$$

(4)　$f'(k) > 0, \quad \text{for all } k > 0,$

$$f''(k) > 0,$$

とかきかえられる。[2] さて，(1)で Y を適当に（例えば，1に）固定した時の isoquant を考えよう。この isoquant に対する接線の勾配の絶対値[3]は imputed wage / rental ratio であるが，この ratio の変化が k にどのような変化をよびおこすかの measure として，次のような関数 $\sigma(k)$ を定義することができる。

$$\sigma(k) \equiv \frac{d\left(\frac{K}{L}\right) \Big/ \frac{K}{L}}{d\left(\frac{F_L}{F_K}\right) \Big/ \frac{F_L}{F_K}} = \frac{dk/k}{d\left(\frac{f(k)}{f'(k)} - k\right) \Big/ \frac{f(k)}{f'(k)} - k}.$$

いま

$$d\left(\frac{f(k)}{f'(k)} - k\right) = -\left(\frac{f(k)f''(k)}{[f'(k)]^2}\right) dk$$

であることに注意して，$\sigma(k)$ をかきかえれば

$$\sigma(k) = -\frac{f'(k)[f(k) - kf'(k)]}{kf(k)f''(k)}$$

となる。(4)により

$$\sigma(k) > 0 \quad \text{for all } k > 0$$

---

(2)　$F_{LL} = \frac{1}{L} f''(k) k^2$ であるから，$f''(k) < 0$ であれば，$F_{LL} < 0$ である。

(3)　$\left|\frac{dK}{dL}\right| = \frac{F_L}{F_K}.$

である。$\sigma(k)$ を elasticity of substitution とよぶ。

3．ここで，次のような定義をおく。

定義： $f(k)$ が substitution-inelastic な生産関数であるとは，ある $\bar{k}\geqq 0$ とある $\varepsilon>0$ が存在して

$$\sigma(k)<1-\varepsilon \quad \text{for all } k>\bar{k}$$

がなり立つことである。

$f(k)$ が substitution-elastic な生産関数であるとは，ある $\bar{k}\geqq 0$ とある $\varepsilon>0$ が存在して

$$\sigma(k)>1+\varepsilon \quad \text{for all } k>\bar{k}$$

がなり立つことである。

substitution-inelastic であれば，elasticity of substitution は1より小であり，substitution-elastic であれば，elasticity of substitution は1より大である。しかし，逆は必ずしもなり立たない。なぜならば，この定義では，例えば，次のような生産関数は考慮外におかれているからである。

$$Y=L\ \log\left(\frac{L+K}{L}\right).$$

これを per capita の表現に直すと

$$y=\log(1+k)$$

となる。また

$$y'=\frac{1}{1+k},\ y''=-\frac{1}{(1+k)^2}$$

であるから

$$\sigma(k)=-\frac{y'(y-ky')}{kyy''}=\frac{\log(1+k)-1}{\log(1+k)}+\frac{1}{k}$$

がえられる。従って

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(k)=1$$

となるから，定義にあるような ε をえらぶことはできない。そこで，自明のことではあるが，elasticity of substitution が 1 よりも小または大であるという性質から導かれる結論は， substitution-inelastic または substitution-elastic という性質からも導くことができるが，後者の性質から導ける命題は必ずしも前者の性質からは導けないということになる。

4.　さて，次の lemma を証明しよう。

Lemma 1.　(4)のもとで，$f(k)-kf'(k)>0$ for all $k>0$.

証明：　f の連続性と(4)によって

$$f(0)\geqq 0$$

でなければならない。いま，$f(0)=0$ と仮定すれば，中間値の定理により，任意の $k>0$ に対して

$$\frac{f(k)}{k}=\frac{f(k)-f(0)}{k-0}=f'(\hat{k})$$

となる $\hat{k}\in(0,k)$ が存在する。(4)により

$$f'(\hat{k})>f'(k)$$

であるから，結局

$$\frac{f(k)}{k}>f'(k)\quad \text{for all } k>0$$

がなり立つ。また，$f(0)>0$ のときは

$$g(k)\equiv f(k)-f(0)$$

とおけば

$$g(0)=0$$

かつ

$$g(k)>0,$$

$$g'(k)=f'(k)>0, \quad \text{for all } k>0,$$
$$g''(k)=f''(k)<0,$$

であるから，任意の $k>0$ に対して

$$f(k)-kf'(k)=[g(k)-kg'(k)]+f(0)>0$$

となる。（**証明終**）

いま

$$\eta(k)=\frac{kf'(k)}{f(k)}$$

とおく。lemma 1 と(4)によって

(5)　$0<\eta(k)<1 \quad \text{for all } k>0$

である。$\eta(k)$ は経済的には 2 つの解釈をもつ。まず，競争経済では，$\eta(k)$ は資本の相対的分け前をあらわす。実際，いま，γ を資本への return, p を生産物価格とすれば，競争経済では

$$\gamma=pf'(k)$$

がなり立たなければならない。よって，資本の相対的分け前は

$$\frac{\gamma k}{pf(k)}=\frac{kf'(k)}{f(k)}=\eta(k)$$

となる。一方，(per capita の) 生産の (k に関する) 弾力性 $\xi(k)$ を考えてみれば

$$\xi(k)=\frac{df(k)}{dk}\cdot\frac{k}{f(k)}=\frac{kf'(k)}{f(k)}=\eta(k)$$

となって，$\eta(k)$ は $\xi(k)$ にひとしくなる。従って，以下の議論はふたつの弾力性 $\sigma(k)$ と $\xi(k)$ の関係に関するものであるとみなすこともできる。

5.　さて

$$\rho(k)=\frac{1-\sigma(k)}{\sigma(k)}$$

とおいて，$\rho(k)$ の簡単な性質をのちの言及のために lemma としてのべてお

こう。以下では，$\bar{k}=0$ とする。

Lemma 2. substitution-inelastic であれば，$0<\varepsilon<1$ となるある ε が存在して

$$0<\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}<\rho(k)<\infty \quad \text{for all } k>0$$

がなり立つ。

Lemma 3. substitution-elastic であれば，ある $\varepsilon>0$ が存在して

$$-1<\rho(k)<-\frac{\varepsilon}{1+\varepsilon}<0 \quad \text{for all } k>0$$

がなり立つ。

これらの lemma は $\rho(k)$ と substitution-inelastic または substitution-elastic の定義から容易に導かれるものなので証明は省略する。

Lemma 4. もし

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1-\eta(k)}{\eta(k)}=\infty$$

ならば

$$\lim_{k\to\infty}\eta(k)=0$$

となる。

証明： (5)により

$$0<\eta(k)<1$$

であるから，もし，$0<\eta^*\leqq 1$ となる η^* が存在して

$$\lim_{k\to\infty}\eta(k)=\eta^*$$

となったとすれば

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1-\eta(k)}{\eta(k)}=\frac{1-\eta^*}{\eta^*}<\frac{1}{\eta^*}<\infty$$

となり矛盾である。**（証明終）**

Lemma 5. もし

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1-\eta(k)}{\eta(k)}=0$$

ならば

$$\lim_{k\to\infty}\eta(k)=1$$

となる。

この lemma の証明は limma 4 の証明とまったく同じであるから省略する。

さて，ここで重要な式を導いておくことにしよう。

$$(6)\quad \frac{d\eta(k)}{dk}=\frac{kf''(k)f(k)+f'(k)[f(k)-kf'(k)]}{[f(k)]^2}$$

$$=-\frac{f''(k)\eta(k)[\sigma(k)-1]}{f'(k)}$$

$$=-\rho(k)\eta(k)[1-\eta(k)]\frac{1}{k}.$$

6. (6)の最初の式と第 3 の式をぬき出せば

$$(7)\quad \frac{d\eta(k)}{dk}=-\frac{f''(k)\eta(k)[\sigma(k)-1]}{f'(k)}$$

となる。[(4)] (4), (5)により(7)の右辺が正（負）である必要かつ十分条件は

$$\sigma(k)>(<)1$$

がなり立つことである。よって，次の theorem をうる。

(4) notation の違いを別にすれば，これは Hicks [2] がすでに導いている式であって，Hicks の結論はまさにこの(7)を根拠としてなり立っている。

Theorem 1 (Hicks の命題).　もし elasticity of substitution $\sigma(k)$ がすべての $k>0$ に対して 1 よりも大ならば，k が増加するとき，資本の相対的分け前は増加する。もし elasticity of substitution $\sigma(k)$ がすべての $k>0$ に対して 1 よりも小ならば，k が増加するとき，資本の相対的分け前は減少する。

この theorem は $k\to\infty$ のときの $\eta(k)$ の値について何も言っていないことに注意しなければならない。すなわち，この theorem によって，$\sigma(k)$ が 1 より大であるかまたは小であるかによって，$\eta(k)$ は k の有界単調増加関数かまたは有界単調減少関数となるから，$k\to\infty$ のときの $\eta(k)$ の極限値はたしかに存在する。しかし，その極限値がどんな値になるかはこれだけでは不明である。それをあきらかにするのが次の theorem である。

Theorem 2 (Ackerlof and Nordhaus の命題).　もし生産関数が substitution-inelastic ならば

$$\lim_{k\to\infty}\eta(k)=0$$

がなり立つ。もし生産関数が substitution-elastic ならば

$$\lim_{k\to\infty}\eta(k)=1$$

がなり立つ。

証明：　(6)の最初の式と最後の式をぬき出せば

$$\frac{d\eta(k)}{dk}=-\rho(k)\eta(k)[1-\eta(k)]\frac{1}{k}$$

となり，これは都合よく変数分離形の微分方程式となっている。そこで，これをかきかえると

$$\frac{-d\eta}{\eta(1-\eta)}=\rho(k)\frac{dk}{k}$$

となるから

$$(8)\quad \int \frac{-d\eta}{\eta(1-\eta)} = \int \frac{\rho(k)}{k} dk + C$$

をうる。ここで C は任意定数である。(8)の左辺は次のように計算される。

$$(9)\quad \int \frac{-d\eta}{\eta(1-\eta)} = \int -\left[\frac{1}{\eta} + \frac{1}{1-\eta}\right] d\eta$$

$$= \log\ (1-\eta) - \log\ \eta$$

$$= \log\ \frac{1-\eta}{\eta}.$$

一方，(8)の右辺は次のようになる。まず，substitution-inelastic な場合を考えると，lemma 2 により

$$(10)\quad \int \frac{\rho(k)}{k} dk > \int \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \frac{1}{k} dk$$

$$= \frac{\varepsilon}{1-\varepsilon} \int \frac{1}{k} dk$$

$$= \log\ k^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

となる。(8)，(9)と(10)をあわせると

$$(11)\quad \frac{1-\eta}{\eta} > A_1 k^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$$

がなり立つ。ここで，$A_1 = e^C$ である。$0<\varepsilon<1$ に注意すれば，(11)から，k が限りなく増加するときは，$A_1 k^{\frac{\varepsilon}{1-\varepsilon}}$，従って，$\frac{1-\eta}{\eta}$ は限りなく増加する。lemma 4 により，このことは

$$\lim_{k\to\infty} \eta = 0$$

をいみする。次に，substitution-elastic であれば，lemma 3 により

$$(12)\quad \int \frac{\rho(k)}{k} dk < \int \frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} \frac{1}{k} dk$$

$$= \frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon} \int \frac{1}{k} dk$$

$$= \log\ k^{\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

となる。(8), (9)と(12)をあわせると

(13) $$\frac{1-\eta}{\eta}<A_2k^{\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$$

がなり立つ。ここで，$A_2=e^C$ である。$\varepsilon>0$ と $\frac{1-\eta}{\eta}>0$ に注意すれば，(13)から，k が限りなく増加するときは，$A_2k^{\frac{-\varepsilon}{1+\varepsilon}}$，従って，$\frac{1-\eta}{\eta}$ は次第に 0 に近づく。lemma 5 により，このことは

$$\lim_{k\to\infty}\eta=1$$

をいみする。（**証明終**）

7. substitution-inelastic または substitution-elastic という条件は $\eta(k)$ の $k\to\infty$ のときの極限値が 0 または 1 であることの十分条件ではあるが必要条件ではない。このことは前にあげた生産関数

$$y=\log\ (1+k)$$

によって例示することができる。この生産関数について，資本の相対的分け前を求めれば

$$\eta(k)=\frac{k}{1+k}\Big/\log\ (1+k)$$

となる。

$$\lim_{k\to\infty}\frac{k}{1+k}=1,$$

$$\lim_{k\to\infty}\log\ (1+k)=\infty$$

であるから，

$$\lim_{k\to\infty}\eta(k)=0$$

となる。一方，この生産関数について

$$\lim_{k\to\infty}\sigma(k)=1$$

となることは，すでに示した通りである。このことは，$\eta(k)$ の asymptotic bebavior に関して，さらに，一般的な theorem が成立することを予想させる。

引　用　文　献

[1] Ackerlof, G. and W. Nordhaus, "Balanced Growth: A Razor Edge?," *International Economic Review*, Vol. 8, No. 3 (October, 1967), pp. 343–348.

[2] Hicks, J. R., *Theory of Wages*, MacMillan and Co., Ltd., London, 1932.

[3] Nordhaus, W., "The Optimal Rate and Direction of Technical Change," in K. Shell (ed. by), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, The M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts (1967), pp. 53–65.

[4] Robinson, J., *The Economics of Imperfect Competition*, MacMillan and Co., Ltd., 1933.