古瀬の微分方程式による摸索過程の安定性*

戸島　凞

目　次

1. 序　論

ある関数の極値を求めるという問題は，実用上の価値もあるため，昔から多くの数学者の興味をひいてきた。この問題のもっとも単純な形は，拘束条件が何もない場合であるが，この場合は，すくなくても，関数が十分に smooth でさえあれば，微分法の機械的な適用によって，極値の必要条件を容易に求めることができるので，理論的には，それほど問題にならないであろう。これに反して，多くの慎重なとり扱いが必要なのは，拘束条件が存在する場合の関数の極値問題であるが，これも拘束条件がすべて等式であるときは，通常の微積分の text にもでているように，理論的には，比較的容易

---

* この論文は筆者の doctoral dissertation の一部分に基づくものである。この機会に，古瀬大六教授の日頃の学恩に深く感謝する。なお，筆者は，たまたま，本年（昭和43年）度の前期に mathematical programming について講義する機会にめぐまれたが，そこでは，この論文で述べたような topics に関して，ついに，ふれることができなかった。本稿はかなり expository な部分をふくむので，筆者の講義をうけた諸君が，この論文によって，あらためてこの方面に興味をもたれるならば幸いである。

にとり扱うことができる。そこで，もっとも問題をはらんでいるのは，拘束条件が不等式の形で存在している場合であって，通常，拘束条件つきの関数の極値問題というときは，とりもなおさず，この type の問題をさすと考えてよい。以下では，極値の中でも，とくに最大値を考えることにする。最小値は符号をかえたものの最大値と考えればよいから，このことは何ら一般性を損なうものではない。

さて，不等式の拘束条件つきの最大値問題は，多くの経済問題にその適用領域を見出すことができる。例えば，技術的な生産可能性の拘束のもとで，ある種の評価関数の値を最大にせよ，という問題などはそのひとつの典型であろう。これらの極値問題に登場する関数がすべて linear であれば，それらは理論上の側面からも，計算上の側面からも十分に究明されている linear programming problem として定式化することができることはよく知られている。他方，それらの問題に登場する関数が必ずしも linear でなければ，それらは non-linear programming problem になるが，これらの中では関数の形が，とくに concave または convex(1) である場合，すなわち，concave programming problem が比較的よく研究されている。

non-linear programming の理論的問題のひとつは，拘束条件つきの極値問題を無拘束の極値問題に帰着させる必要かつ十分条件をもとめることである。その先駆的業績は，周知のように，Kuhn and Tucker [6] によるものである。彼らは classical な saddle-point という概念の revival をこころみて，concave programming problem は，ある constraint qualification のもとで，もとの問題の Lagrangean form の saddle-point を求める problem と同等であるということを証明した。すなわち，Kuhn and Tucker は不等式の拘束条件つきの極値問題も，等式の拘束条件つきの極値問題と同様に，

(1) $f(x)$ が concave であるとは，$\theta \epsilon [0, 1]$ に対して

$$f(\theta x^1+(1-\theta)x^2) \geqq \theta f(x^1)+(1-\theta)f(x^2)$$

がなり立つことをいう。$f(x)$ が convex とは $-f(x)$ が concave であることをいう。

無拘束の極値問題に転化しうることをあきらかにしたのであって，これは種々の点できわめて有用な定理である。この定理では，saddle-point の存在は concave programming problem の解の存在をつねに imply するが，逆は，必ずしも，つねに真ではなく，constraint qualification が利くのは，この逆の implication の導出においてであることが証明されている。Kuhn and Tucker の constraint qualification はかなり一般的な条件であるために，具体的問題が実際にこの constraint qualification をみたしているか，どうかを判定することは困難である。そこで，容易に判定ができる constraint qualification が求められるが，Uzawa [10] は Slater の条件のもとで Kuhn and Tucker の定理に別証をあたえた。Slater の条件は簡潔な形をしているので，Kuhn and Tucker の constraint qualification に比べて，それが実際にみたされているか，どうかの判定が比較的容易である。Slater の条件が，Kuhn and Tucker の constraint qualification をやや一般化した constraint qualification のひとつの十分条件になっていることの証明は Arrow, Hurwicz and Uzawa [2] によってあたえられている。いずれにしても，何らかの constraint qualification のもとで，programming problem とその Lagrangean form の saddle-point を求める問題とは同等になる。このことは，前者の問題をとく代りに後者の問題をといてもよいということをいみしている。

さて，無拘束の極値問題をとくには，上述したように微分法を適用すればよいが，このことは，多変数の場合には，一般的にいえば，非線型の連立方程式を結果することになってしまい，これは必ずしも容易にはとけないし，しかも，変数に非負の制約が課せられているときは，連立不等式となるから，とくことが非常に困難になる。ところで，このような situation に対して，経済学では伝統的にひとつの実践的解法が考えられてきた。すなわち，Walras が最初の定式者であるために，Walras の名を冠して Walrasian tâtonnement といわれ，その厳密な定式化を Samuelson に負うところが大

である market mechanism の数学的表現こそがそれに他ならない。Walras は経済の一般均衡体系は机上でとくことはむずかしいが，市場参加者の日日の実践的行動を通じて解があたえられて行くと考えたが，無拘束の saddle-point を求めるという極値問題の解法にも同様の考えを使うことができる。method of steepest decent とか gradient method とよばれる concave programming の algorithm はこの考え方を formulate したものということができる。実際，linear programming の simplex method の経済的解釈が可能なように，gradient method の経済的解釈も，のちに見られるように，また可能なのである。こうした gradient method は Kose [5]，Arrow, Hurwicz and Uzawa [1] らによって研究されている。

この論文では，Kose [5] が formulate した gradient method のある種の微分方程式の解の安定性の証明を一般化する。Kose はこの微分方程式の解の安定性に関しては linear programming の場合についてのみ代数的な証明をあたえたにとどまり，non-linear programming については同様であると述べているにすぎないが，われわれは linear, non-linear の両方をふくむ一般的な case に対して証明を行なった。その証明には Liapounov の second method を用いたが，ここで扱われる微分方程式に対しては，通常の Euclidean distance を Liapounov function として用いても，証明はうまく進行しないので，われわれはこの微分方程式に対してうまく働く Liapounov function を新しく導入した。証明の核心はこの Liapounov function の値が時間とともに減少して行き，解が saddle-point に次第に接近して行くことを導くことにある。従って，われわれの議論は gradient method あるいは market mechanism に対する1つの modification とみなすこともできるであろう。

以下，**2** 節では concave programming problem を定式化し，Kuhn and Tucker の定理を lemma として述べる。**3** 節では，うえの問題の algorithm をあらわす微分方程式を定式化する。**4** 節では定理の証明の準備としていく

つかの lemma を述べる。5節ではこの論文の主要結果である安定性定理を証明する。

2. Concave Programming

$f(x)$, $g^j(x)$ $(j=1, \ldots, m)$ は

$$x=\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \geqq 0$$

に対して定義せられた連続2回微分可能な実数値関数とする。さらに，$f(x)$, $g^j(x)$ $(j=1, \ldots, m)$ は concave function とする。このとき，次のような type の問題を concave programming の最大値問題という。

最大値問題：

max $f(x)$

subject to

$g^j(x) \geqq 0 \quad (j=1, \ldots, m)$,

$x \geqq 0$.

この問題に associate した function として次のような関数 $\varphi(x, \lambda)$ を定義する。

$$\varphi(x, \lambda)=f(x)+\sum_{j=1}^{m}\lambda_j g^j(x),$$

$$\lambda=\begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_m \end{pmatrix}.$$

この $\varphi(x, \lambda)$ を concave programming problem の Lagrangean form という。Lagrangean form は，あきらかに，x に関して concave, λ に関して linear である。$(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が $x \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ における $\varphi(x, \lambda)$ の saddle-point であるとは

$$\varphi(x, \bar{\lambda}) \leqq \varphi(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqq \varphi(\bar{x}, \lambda) \quad \text{for all } x \geqq 0,\ \lambda \geqq 0;\ \bar{x} \geqq 0,\ \bar{\lambda} \geqq 0$$

がなり立つことをいう。さて，saddle-point problem とは次の問題をいう。

saddle-point problem：

Lagrangean form $\varphi(x, \lambda)$ の $x \geqq 0$, $\lambda \geqq 0$ における saddle-point を求めよ。

Kuhn and Tucker の定理は concave programming の最大値問題が，ある constraint qualification の下に，saddle-point problem に帰着することを証明したものであるが，ここでは，そのような constraint qualification として Kuhn and Tucker によるものよりもややきついけれども，より transparent な Slater の条件をかかげておこう。

Slater の条件：

ある $x^* \geqq 0$ が存在して，$g^j(x^*) > 0$ $(j=1, \ldots, m)$ がなり立つ。

Slater の条件は要するに

$$C = \{x \mid g^j(x) \geqq 0 \ (j=1, \ldots, m)\}$$

という集合に interior が存在することを要請するものである。従って，Slater の条件がなり立てば

$$\text{int } C \neq \phi$$

となる。

Lemma 1 (Kuhn and Tucker の定理). $f(x)$, $g^j(x)$ は $x \geqq 0$ で定義された concave function とする。また，$g^j(x)$ は Slater の条件をみたすものとする。このとき，$\bar{x}$ が concave programming の最大値問題の解である必要かつ十分条件は，ある $\bar{\lambda} \geqq 0$ が存在して，$(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が saddle-point problem の解となることである。

この lemma の statement で注意しなければならないのは，関数に微分可能性が仮定せられていないことである。従って，この lemma はもっと一般化することができるのであって，このことに関しては，Hurwicz [4] によ

る定理がある。

さて，以下では，$\varphi(x, \lambda)$ を具体的な Lagrangean form から切りはなして，次のような性質だけを仮定するやや一般化した形で考えよう。$\varphi(x, \lambda)$ は $x \geqq 0, \lambda \geqq 0$ に対して定義せられた実数値関数で，x に関して concave, λ に関して convex とする。さらに，$\varphi(x, \lambda)$ は x, λ に関して連続 2 回微分可能とする。このとき，つぎの lemma がなり立つ。(2)

Lemma 2. $\varphi(x, \lambda)$ はうえの性質をもつものとする。そのとき，$(\bar{x}, \bar{\lambda})$ が $\varphi(x, \lambda)$ の $x \geqq 0, \lambda \geqq 0$ における saddle-point である必要かつ十分条件は次の(1)，(2)がなり立つことである。

$$
(1) \quad \begin{aligned}
&\varphi_{x_i}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \leqq 0 \quad (i=1, \dots, n), \\
&\sum_{i=1}^{n} \bar{x}_i \varphi_{x_i}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0, \\
&\bar{x} \geqq 0,
\end{aligned}
$$

$$
(2) \quad \begin{aligned}
&\varphi_{\lambda_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}) \geqq 0 \quad (j=1, \dots, m), \\
&\sum_{j=1}^{m} \bar{\lambda}_j \varphi_{\lambda_j}(\bar{x}, \bar{\lambda}) = 0, \\
&\bar{\lambda} \geqq 0.
\end{aligned}
$$

これからは簡便なかき方として関数記号の上に bar をつけたときは $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ における評価を示すことにする。lemma 2 によって，$\varphi(x, \lambda)$ が concave-convex のときには，saddle-point problem の解としては条件(1)，(2)をみたす $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ を見出せばよいことがわかる。ところで，$\varphi(x, \lambda)$ が strictly に concave-convex でないときは，$\varphi(x, \lambda)$ の $x \geqq 0, \lambda \geqq 0$ における saddle-point は必ずしも unique ではない。従って，lemma 2 の条件(1)，(2)をみたす $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ は，もし存在するとしても，一般には unique ではない。すなわち，

(2)　証明は Kuhn and Tucker [6] の lemma 1 and 2 をみよ。

ある無限集合 $\mathfrak{S}$ があって，$(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathfrak{S}$ ならば，lemma 2 の条件(1), (2)をみたすという場合がある[(3)]。この $\mathfrak{S}$ を saddle-point set という。saddle-point set $\mathfrak{S}$ のごく基本的な性質は Toshima [9] によって注意された。なお，いうまでもないが，$\mathfrak{S}=\phi$ となる可能性を排除することはできない。そこで，lemma 2 の条件(1), (2)をみたす $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ を具体的に求める前に，あらかじめ $\mathfrak{S} \neq \phi$ が確認されていなければならないであろう。

いま，$\varphi(x, \lambda)$ が Lagrangean form である場合には，$\mathfrak{S} \neq \phi$ であることのひとつの十分条件は，集合

$$R_+^n \cap C = \{x \mid x \geqq 0,\ g^j(x) \geqq 0 \quad (j=1, \dots, m)\}$$

が compact になることである。実際，この条件がみたされれば，concave programming の最大値問題には，すくなくても，ひとつの解が存在するから，Kuhn and Tucker の定理によって，Slater の条件がみたされているときには，すくなくても，ひとつの saddle-point が存在する。よって，$\mathfrak{S} \neq \phi$ である。

以下では，$\mathfrak{S} \neq \phi$ と仮定する。

3. Walrasian Tâtonnement

lemma 2 の条件(1), (2)をみたす $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ に asymptotical に attain するために，次のような model を考えてみよう。いま，2人の player X, Λ がいて，X は vector x のみを control することができ，Λ は vector λ のみを control することができるものとする。また，player X の gain は $\varphi(x, \lambda)$ であらわされ，player Λ の gain は $-\varphi(x, \lambda)$ であらわされるものとする。すなわち，player X と plarer Λ の total gain は0である。これからしばらくの間は，x, λ がえらばれる範囲に何の制約もないものと考えておこ

(3) $\varphi(x, \lambda)$ が x に関して concave, λ に関して convex ならば，saddle-point の convex linear combination は，また，saddle-point になるから，saddle-point が unique でなければ，$\mathfrak{S}$ は無限集合になる。

う。player X, Λ は互いに適当に，それぞれ，x, λ をえらんで，自己の gain を最大にするように行動するものとする。そうすれば

$$\varphi_{x_i}(x, \lambda)$$

は，player X が x_i を control することによってえられる marginal gain である。従って，もしこれが正であるならば，player X は x_i をさらに増加させるように control することによって，彼の gain を増加させることができるであろう。逆に，負であるならば x_i を減少させた方がよい。同様に

$$-\varphi_{\lambda_j}(x, \lambda)$$

は，player Λ の λ_j に関する marginal gain であるから，彼はこれが正であるか，または，負であるかによって，λ_j を増加または減少させて自己の gain を増加させることができる。例えば，X は生産者で，$\varphi_{x_i}(x, \lambda)$ は第 i 財の限界収益（限界収入と限界費用の差）をあらわし，Λ は生産要素の供給者で，$\varphi_{\lambda_j}(x, \lambda)$ は第 j 生産要素の超過供給量をあらわすと考えれば，上で述べたことは，生産者は限界収入と限界費用を比較して，その正負に従って生産量 x を control し，生産要素供給者は生産要素の需給量を比較して，生産要素価格 λ を定めるという behavior をあらわすものであって，これは，まさに，生産物市場と生産要素市場の mechanism に他ならない。そこで，これを微分方程式を用いて

(3.1)　$\dot{x}_i = \varphi_{x_i}$　$(i=1, \ldots, n)$,

(3.2)　$\dot{\lambda}_j = -\varphi_{\lambda_j}$　$(j=1, \ldots, m)$

のように表現することができる。[(4)] ところが，ここで問題なのは生産量 x と生産要素価格 λ は，本来，非負でなければならないという条件が課されていることである。すなわち

$$x \geqq 0, \ \lambda \geqq 0$$

(4) 変数の上の dot は時間 t に関して微分することを示す。すなわち

$$\dot{x} \equiv \frac{d}{dt} x$$

である。

でなければならない。このため，例えば，(3.1) で第 i 生産物の限界費用が限界収入を上廻っていても（すなわち，φ_{x_i} が負になっていても），すでに x_i が0になっているときは，x_i はもはや減少しないようにしなければならない。(3.2) についても同様のことを考えれば，微分方程式(3)は次のようにかきあらためられなければならないことになる。

$$(4)\quad \begin{aligned} \dot{x}_i &= \begin{cases} 0 \text{ if } x_i=0 \text{ and } \varphi_{x_i}<0, \\ \varphi_{x_i} \text{ otherwise,} \end{cases} \qquad (i=1, \dots, n), \\ \dot{\lambda}_j &= \begin{cases} 0 \text{ if } \lambda_j=0 \text{ and } \varphi_{\lambda_j}>0, \\ -\varphi_{\lambda_j} \text{ otherwise,} \end{cases} \qquad (j=1, \dots, m). \end{aligned}$$

もし微分方程式(4)に解が存在して，ある $(\bar{x}, \bar{\lambda})$ で，$\dot{x}_i=\dot{\lambda}_j=0$ $(i=1, \dots, n;$ $j=1, \dots, m)$ となるならば，$(\bar{x}, \bar{\lambda}) \in \mathfrak{S}$ である。実際，$\dot{x}_i=0$ であれば，$\bar{\varphi}_{x_i}=0$ か，または，$\bar{x}_i=0$ かつ $\bar{\varphi}_{x_i}<0$ でなければならないから，lemma 2 の条件 (1) がなり立つことはあきらかであろう。条件 (2) が成立することも同様にしてわかる。従って，微分方程式 (4) に解が存在して，$t\to\infty$ のとき，$\dot{x}_i\to 0$, $\dot{\lambda}_j\to 0$ となれば，(4) であらわされる market mechanism は実践的に saddle-point problem をといたことになるであろう。微分方程式 (4) の解の存在と安定性の問題は Kose [5], Uzawa [11], Morishima [7], Yamamoto [13], 福岡 [14], 古瀬 [15], 戸島 [16] などによってかなり詳細に論じられている。(5) さて，微分方程式(4)の解の x 成分が安定となるためには $\varphi(x, \lambda)$ が x に関して strictly concave でなければならない。このためには，$\varphi(x, \lambda)$ が Lagrangean form である場合には，$f(x)$, $g^j(x)$ $(j=1, \dots, m)$ のうちのすくなくてもひとつの関数が strictly concave でなければならず，linear programming の場合が排除されてしまうことになる。$\varphi(x, \lambda)$ が x に関して strictly concave でなければ Samuelson [8] が述べている通り，(4) の解は

(5)　微分方程式(4)の右辺は不連続であるから，通常の微分方程式の解の存在定理によって，(4)の解の存在をいうことはできない。これがこの型の微分方程式についていくつかの論文がかかれたひとつの理由である。

安定ではなく，limit cycle をつくる。そこで，linear programming の場合には，saddle-point に attain する market mechanism として微分方程式(4)は妥当性を欠くものである。そのため，Kose [5] は(4)を modify した次のような微分方程式を propose した。

$$
(5)\quad
\begin{aligned}
&\dot{x} = \delta_{x_i}(\varphi_{x_i} + \dot{\varphi}_{x_i}) \quad (i=1,\ \dots,\ n),\\
&\dot{\lambda}_j = -\delta_{\lambda_j}(\varphi_{\lambda_j} + \dot{\varphi}_{\lambda_j}) \quad (j=1,\ \dots,\ m),\\
&\delta_{x_i} = \begin{cases} 0 \text{ if } x_i = 0 \text{ and } \varphi_{x_i} + \dot{\varphi}_{x_i} < 0,\\ 1 \text{ otherwise};\end{cases}\\
&\delta_{\lambda_j} = \begin{cases} 0 \text{ if } \lambda_j = 0 \text{ and } \varphi_{\lambda_j} + \dot{\varphi}_{\lambda_j} > 0,\\ 1 \text{ otherwise}.\end{cases}
\end{aligned}
$$

(5)と(4)の違いは微分方程式の右辺に $\dot{\varphi}_{x_i}$ あるいは $\dot{\varphi}_{\lambda_j}$ という term が含まれているか，否かというところにあることは一見してあきらかであろう。これは経済的にはどのように解釈することができるであろうか。[(6)] Arrow and Solow [3] によれば，微分方程式(5)は，linear case では，extrapolation に基づいた market mechanism をあらわすもので，生産者は current price ではなく，extrapolated price と cost との比較を行ない，一方，生産要素市場は current excess supply ではなく，extrapolating excess supply によって adjust をうけるという解釈を許すものである。Kose は微分方程式(5)が linear であるとき，その特性根の real part は負となることを証明した。このことから(5)が linear であれば，その解は安定であり，従って，$t\to\infty$ のとき，$\dot{x}\to 0$, $\dot{\lambda}_j\to 0$ となることがいえるから，(5)の market mechanism は linear programming に対応する saddle-point problem を実践的にとくものである。しかし，Kose は，non-linear case に対しては，この market mechanism によって解は一層 damp するであろうという conjecture を述

(6) 古瀬教授は，$\dot{\varphi}_{x_i}$ などは，物理的には，摩擦と考えられる，と筆者に個人的に語られたことがある。この解釈は limit cycle を示す(4)の解が(5)では安定的になることの直観的理由を明快に示している。

べているのみで，解の安定性の証明はあたえていない。われわれは，以下で，$\varphi(x, \lambda)$ が concave-convex であるときにも，微分方程式(5)の解は安定であることを証明する。

4. 予備的結果

vector と matrix を次のように定義する。

$$\varphi_x=\begin{pmatrix}\varphi_{x_1}\\ \vdots \\ \varphi_{x_n}\end{pmatrix},\quad \varphi_\lambda=\begin{pmatrix}\varphi_{\lambda_1}\\ \vdots \\ \varphi_{\lambda_m}\end{pmatrix},$$

$$\varphi_{xx}=[\varphi_{x_i x_j}]\quad (i=1,\ \ldots,\ n\,;\ j=1,\ \ldots,\ n),$$

$$\varphi_{\lambda\lambda}=[\varphi_{\lambda_i \lambda_j}]\quad (i=1,\ \ldots,\ m\,;\ j=1,\ \ldots,\ m),$$

$$\varphi_{x\lambda}=[\varphi_{x_i \lambda_j}]\quad (i=1,\ \ldots,\ n\,;\ j=1,\ \ldots,\ m),$$

$$\varphi_{\lambda x}=[\varphi_{\lambda_i x_j}]\quad (i=1,\ \ldots,\ m\,;\ j=1,\ \ldots,\ n).$$

次の lemma はあきらかである。

Lemma 3. $\varphi(x, \lambda)$ が連続 2 回微分可能であるならば

$$\varphi_{x\lambda}=\varphi_{x\lambda}{}'$$ [7]

がなり立つ。

さて，微分方程式(5)は vector notation と matrix notation によって，次のようにかくことができる。[8]

$$(5')\quad \begin{aligned}\dot{x}&=\delta_x(\varphi_x+\varphi_{xx}\dot{x}+\varphi_{x\lambda}\dot{\lambda}),\\ \dot{\lambda}&=-\delta_\lambda(\varphi_\lambda+\varphi_{\lambda x}\dot{x}+\varphi_{\lambda\lambda}\dot{\lambda}),\end{aligned}$$

$$\dot{x}=\begin{pmatrix}\dot{x}_1\\ \vdots \\ \dot{x}_n\end{pmatrix},\quad \dot{\lambda}=\begin{pmatrix}\dot{\lambda}_1\\ \vdots \\ \dot{\lambda}_m\end{pmatrix},$$

---

(7) prime は vector または matrix の転置を示す。

(8) $\dot{\varphi}_x$ などは実際に微分演算を実行してみよ。

$$\delta_x=\begin{pmatrix}\delta_{x_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{x_n}\end{pmatrix},\quad \delta_\lambda=\begin{pmatrix}\delta_{\lambda_1} & & 0\\ & \ddots & \\ 0 & & \delta_{\lambda_m}\end{pmatrix}.$$

Lemma 4.(9) $\varphi(x, \lambda)$ が x に関して concave, λ に関して convex であるとする。さらに，$\varphi(x, \lambda)$ は微分可能であるとする。そのとき

$$\varphi(\bar{x}, \lambda)-\varphi(x, \lambda)\leqq\varphi_x'(\bar{x}-x),$$

$$\varphi(x, \bar{\lambda})-\varphi(x, \lambda)\geqq\varphi_\lambda'(\bar{\lambda}-\lambda)$$

がなり立つ。

Lemma 5. $\varphi(x, \lambda)$ が x に関して concave, λ に関して convex であるとする。さらに，$\varphi(x, \lambda)$ は微分可能であるとする。そのとき

$$0\leqq\varphi_x'(\bar{x}-x)-\varphi_\lambda'(\bar{\lambda}-\lambda)\quad \text{for } (\bar{x}, \bar{\lambda})\in\mathfrak{S}$$

がなり立つ。

証明： lemma 4 により，一般に

$$\varphi(\bar{x}, \lambda)-\varphi(x, \bar{\lambda})\leqq\varphi_x'(\bar{x}-x)-\varphi_\lambda'(\bar{\lambda}-\lambda)$$

がなり立つ。他方，$(\bar{x}, \bar{\lambda})\in\mathfrak{S}$ ならば，saddle-point の定義から

$$\varphi(x, \bar{\lambda})\leqq\varphi(\bar{x}, \bar{\lambda})\leqq\varphi(\bar{x}, \lambda)\quad \text{for all } x\geqq0,\ \lambda\geqq0$$

であるから

$$0\varphi\leqq(\bar{x}, \lambda)-\varphi(x, \bar{\lambda})$$

がえられる。**（証明終）**

Lemma 6. $\varphi(x, \lambda)$ は x に関して concave, λ に関して convex とする。さらに，$\varphi(x, \lambda)$ は連続 2 回微分可能であるとする。そのとき，φ_{xx} は negative semi-definite, $\varphi_{\lambda\lambda}$ は positive semi-definite になる。すなわち

(9) 証明は Kuhn and Tucker [6] の lemma 3 をみよ。

$$\eta'\varphi_{xx}\eta \leqq 0 \quad \text{for all } \eta \in R^n,$$

$$\xi'\varphi_{\lambda\lambda}\xi \geqq 0 \quad \text{for all } \xi \in R^m$$

がなり立つ。

この lemma の証明は，例えば，戸島［17］にみられるが，その証明は，多少，不完全であったので，ここで改めて証明しておくことにしたい。

lemma 6 の証明： $\varphi_{\lambda\lambda}$ が positive semi-definite であることは，φ_{xx} が negative semi-definite であることとまったく同じ方法によって証明できるから，ここでは，φ_{xx} が negative semi-definite であることのみを証明する。いま，$x \in \text{int } R_+^n$, $\eta \in R^n$ ならば，十分小さな t の値，例えば $0<t\leqq\bar{t}$, に対して

$$x+t\eta \in R_+^n$$

とすることができる。x, $\lambda \in R_+^m$, η を固定して

$$F(t)=\varphi(x+t\eta,\ \lambda)$$

とおく。t_1, $t_2 \in (0,\ \bar{t}]$ ならば

$$\begin{aligned}F(\theta t_1+(1-\theta)t_2)&=\varphi(x+[\theta t_1+(1-\theta)t_2]\eta,\ \lambda)\\&=\varphi[\theta(x+t_1\eta)+(1-\theta)(x+t_2\eta),\ \lambda]\\&\geqq\theta\varphi(x+t_1\eta,\ \lambda)+(1-\theta)\varphi(x+t_2\eta,\ \lambda)\\&=\theta F(t_1)+(1-\theta)F(t_2)\quad(\theta\in[0,\ 1])\end{aligned}$$

となるから，$F(t)$ は $(0,\ \bar{t}]$ で concave function である。よって

$$\frac{d^2F(t)}{dt^2}\leqq 0 \quad \text{for all } t \in (0,\ \bar{t}]$$

がなり立つ。ここで，極限をとれば

$$\frac{d^2F(0)}{dt^2}\leqq 0$$

となる。これから，左辺を実際に計算すれば

$$\eta'\varphi_{xx}(x,\ \lambda)\eta\leqq 0$$

がえられる。x は int R_+^n の任意の vector, λ は R_+^m の任意の vector で

あるから

$$\eta'\varphi_{xx}(x,\ \lambda)\eta \leqq 0 \quad \text{for all } x \in \text{int } R_+^n,\ \lambda \in R_+^m$$

がなり立つ。φ_{xx} は仮定によって連続であるから，実は上の不等式はすべての $x \in R_+^n$, $\lambda \in R_+^m$ に対してなり立つ。ここで，η は R^n に属する任意の vector であるから，結局は

$$\eta'\varphi_{xx}\eta \leqq 0 \quad \text{for all } \eta \in R^n$$

となる。すなわち，φ_{xx} は negative semi-definite である。（**証明終**）

いま，matrix K を

$$K=\begin{bmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{x\lambda} \\ -\varphi_{\lambda x} & -\varphi_{\lambda\lambda} \end{bmatrix}$$

と定義する。

Lemma 7. $\varphi(x,\ \lambda)$ は x に関して concave, λ に関して convex とする。さらに，$\varphi(x,\ \lambda)$ は連続2回微分可能とする。このとき，K は negative semi-definite である。

証明： $\eta \in R^n$, $\xi \in R^m$ とすれば

$$\begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}' K \begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}' \begin{bmatrix} \varphi_{xx} & \varphi_{x\lambda} \\ -\varphi_{\lambda x} & -\varphi_{\lambda\lambda} \end{bmatrix} \begin{pmatrix}\eta\\ \xi\end{pmatrix}$$

$$=\eta'\varphi_{xx}\eta+\eta'\varphi_{x\lambda}\xi-\xi'\varphi_{\lambda x}\eta-\xi'\varphi_{\lambda\lambda}\xi.$$

lemma 3 を使えば，右辺はさらに次のようになる。

$$\eta'\varphi_{xx}\eta+\eta'\varphi_{x\lambda}\xi-\eta'\varphi_{x\lambda}\xi-\xi'\varphi_{\lambda\lambda}\xi$$

$$=\eta'\varphi_{xx}\eta-\xi'\varphi_{\lambda\lambda}\xi \leqq 0$$

この最後の不等式は lemma 6 から出る。（**証明終**）

Lemma 8. $\varphi(x,\ \lambda)$ は x に関して concave, λ に関して convex とする。

さらに，$\varphi(x, \lambda)$ は連続 2 回微分可能とする。このとき

$$\dot{x}\dot{\varphi}_x - \dot{\lambda}\dot{\varphi}_\lambda \leqq 0$$

がなり立つ。

証明： $$\dot{x}\dot{\varphi}_x - \dot{\lambda}\dot{\varphi}_\lambda = \dot{x}(\varphi_{xx}\dot{x} + \varphi_{x\lambda}\dot{\lambda}) - \dot{\lambda}(\varphi_{\lambda x}\dot{x} + \varphi_{\lambda\lambda}\dot{\lambda}) = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix}' K \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{\lambda} \end{pmatrix}$$

となるから，lemma 7 により

$$\dot{x}\dot{\varphi}_x - \dot{\lambda}\dot{\varphi}_\lambda \leqq 0$$

がなり立つ。**(証明終)**

さて，ここで，quasi-stable という concept を定義しておこう。微分方程式 (5′) の解が quasi-stable であるとは，任意の初期条件 $(x^0, \lambda^0) \geqq 0$ に対して，次の 2 つの条件；

(1) (5′) の解 $(x(t), \lambda(t))$ は bounded である。すなわち，ある M が存在して

$$\|(x(t), \lambda(t))\| \leqq M$$

となる。

(2) $t \to \infty$ のときの $(x(t), \lambda(t))$ の limit point はすべて $\mathfrak{S}$ に属する。すなわち，$t_\nu \to \infty$ となるある数列 $\{t_\nu : \nu = 1, 2, \ldots\}$ に対して

$$\lim_{\nu \to \infty} (x(t_\nu), \lambda(t_\nu))$$

が存在して

$$\lim_{\nu \to \infty} (x(t_\nu), \lambda(t_\nu)) \in \mathfrak{S}$$

となる。

がみたされることである。ここで，次の lemma を Uzawa [12] に従って証明することができる。

Lemma 9. (A) 微分方程式 (5′) には，任意の初期条件 $(x^0, \lambda^0)\geqq 0$ に対して，unique でかつ continuous に定まる解 $(x(t), \lambda(t))$ が $t\geqq 0$ で存在し，(B) その解は $R_+{}^{n+m}$ の compact set[10] にふくまれ，さらに，(C) ある連続関数 $\Phi(x, \lambda)$ が $R_+{}^{n+m}$ で定義され，任意の $(x^0, \lambda^0)\in R_+{}^{n+m}$ に対して $\Psi(t)=\Phi[x(t), \lambda(t)]$ は $(x(t), \lambda(t))\notin \mathfrak{S}$ のとき，t の decreasing function になるものとする。このとき，微分方程式 (5′) の解は quasi-stable である。

この lemma によって，微分方程式 (5′) の解が quasi-stable であることを示すには，仮定(A)がみたされているときは，その解 $(x(t), \lambda(t))$ が bounded であることと，ある関数 $\Phi(x, \lambda)$ が存在して，仮定 (C) をみたすことの 2 つを示せばよいことになる。

5. 安 定 性 定 理

安定性定理. **$\varphi(x, \lambda)$ は x に関して concave, λ に関して convex で，かつ，$\varphi(x, \lambda)$ は連続 2 回微分可能であるとする。また，微分方程式 (5′) には，任意の初期条件 $(x^0, \lambda^0)\geqq 0$ に対して unique でかつ continuous に定まる解 $(x(t), \lambda(t))$ が $t\geqq 0$ で存在するものとする。さらに，$\mathfrak{S}\neq\phi$ とする。このとき，微分方程式 (5′) の解は quasi-stable である。**

証明：まず，任意の $(\bar{x}, \bar{\lambda})\in\mathfrak{S}$ に対して

$$D(x, \lambda)=\frac{1}{2}[(x-\bar{x})'(x-\bar{x})+(\lambda-\bar{\lambda})'(\lambda-\bar{\lambda})] \qquad (x, \lambda)\in R_+{}^{n+m}$$

とおく。

$$[2D(x, \lambda)]^{\frac{1}{2}}$$

は Euclidean distance であることはあきらかであろう。$D(x, \lambda)$ を用いて，$\Phi(x, \lambda)$ を次のように定義する。

$$\Phi(x, \lambda)=D(x, \lambda)-[\varphi_x'(x-\bar{x})-\varphi_\lambda'(\lambda-\bar{\lambda})].$$

---

(10) Euclid 空間のcompact set とは closed and bounded set のことをいう。

lemma 5 により，右辺の角括弧の中は非負であるから

$$0 \leqq D(x, \lambda) \leqq \Phi(x, \lambda)$$

がなり立つ。よって，$\Phi(x, \lambda)$ が bounded ならば，$D(x, \lambda)$ も bounded であり，従って，(x, λ) も bounded である。また，$\Phi(x, \lambda)=0$ であれば，上の不等式から，$D(x, \lambda)=0$ となり，$(x, \lambda)=(\bar{x}, \bar{\lambda}) \epsilon \mathfrak{S}$ でなければならない。逆に，$(x, \lambda)=(\bar{x}, \bar{\lambda}) \epsilon \mathfrak{S}$ ならば，あきらかに

$$D(x, \lambda)=0,$$

$$\varphi_x{}'(x-\bar{x})-\varphi_\lambda{}'(\lambda-\bar{\lambda})=0$$

であるから，$\Phi(x, \lambda)=0$ である。さて

$$\Psi(t)=\Phi(x(t), \lambda(t)) \quad t \geqq 0$$

とおく。ここで，$(x(t), \lambda(t))$ は微分方程式 (5′) の任意の解とする。さて，定理を証明するためには，前節の最後で注意したように，$\Psi(t)$ が lemma 9 の条件(C)をみたし，かつ，(5′) の解が bounded であることを示せば十分である。ところが，非負で有限な任意の 初期条件から出発する (5′) の任意の解に対して，$\Psi(t)$ が t の non-increasing function であれば，$\Psi(t)$ は有界となり，上述の理由により，$(x(t), \lambda(t))$ も bounded であることがいえるから，結局，$\Psi(t)$ が lemma 9 の条件(C)をみたすことだけがいえればよい。そこで，$\Psi(t)$ を t に関して微分しよう。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t)=&[x(t)-\bar{x}]'\dot{x}(t)+[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'\dot{\lambda}(t)-[x(t)-\bar{x}]'\dot{\varphi}_x\\&-\dot{x}(t)'\varphi_x+[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'\dot{\varphi}_\lambda+\dot{\lambda}(t)'\varphi_\lambda.\end{aligned}$$

ここで，右辺の第 1 項，第 2 項の $\dot{x}$, $\dot{\lambda}$ に微分方程式 (5′) の右辺を代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t)=&[x(t)-\bar{x}]'\delta_x(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)-[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'\delta_\lambda(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)\\&-[x(t)-\bar{x}]'\dot{\varphi}_x-\dot{x}(t)'\varphi_x+[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'\dot{\varphi}_\lambda+\dot{\lambda}(t)'\varphi_\lambda\end{aligned}$$

をうる。以下，新しく次のような記号を使うことにしよう。

$$x^{\mathrm{I}}(t)=\delta_x x(t), \qquad \lambda^{\mathrm{I}}(t)=\delta_\lambda\lambda(t),$$

$$x(t)=x^{\mathrm{I}}(t)+x^{\mathrm{II}}(t), \qquad \lambda(t)=\lambda^{\mathrm{I}}(t)+\lambda^{\mathrm{II}}(t),$$

$$\bar{x}^{\mathrm{I}}=\delta_x\bar{x}, \qquad \bar{\lambda}^{\mathrm{I}}=\delta_\lambda\bar{\lambda},$$

$$\bar{x}=\bar{x}^{\mathrm{I}}+\bar{x}^{\mathrm{II}}, \qquad \bar{\lambda}=\bar{\lambda}^{\mathrm{I}}+\bar{\lambda}^{\mathrm{II}},$$

$$\varphi_x=\delta_x\varphi_x+\varphi_x{}^{\mathrm{II}}, \qquad \varphi_\lambda=\delta_\lambda\varphi_\lambda+\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}},$$

$$\dot{\varphi}_x=\delta_x\dot{\varphi}_x+\dot{\varphi}_x{}^{\mathrm{II}}, \qquad \dot{\varphi}_\lambda=\delta_\lambda\dot{\varphi}_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda{}^{\mathrm{II}}.$$

そこで，これらを使えば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t)&=[x^{\mathrm{I}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{I}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)-[\lambda^{\mathrm{I}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{I}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)\\&\quad-[x(t)-\bar{x}]'\dot{\varphi}_x+[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'\dot{\varphi}_\lambda-\dot{x}(t)'\varphi_x+\dot{\lambda}(t)'\varphi_\lambda\\&=[x(t)-\bar{x}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)-[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)\\&\quad-[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)\\&\quad-[x(t)-\bar{x}]'\dot{\varphi}_x+[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'\dot{\varphi}_\lambda-\dot{x}(t)'\varphi_x+\dot{\lambda}(t)'\varphi_\lambda\end{aligned}$$

となる。lemma 5 により

$$[x(t)-\bar{x}]'\varphi_x-[\lambda(t)-\bar{\lambda}]'\varphi_\lambda\leqq 0$$

がなり立つから，次の不等式がえられる。

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t)&\leqq-[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)\\&\quad-\dot{x}(t)'\varphi_x+\dot{\lambda}(t)'\varphi_\lambda.\end{aligned}$$

ふたたび，上で定義した記号を用いれば，この不等式の右辺は

$$\begin{aligned}&-[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)\\&-\dot{x}(t)'(\delta_x\varphi_x+\varphi_x{}^{\mathrm{II}})+\dot{\lambda}(t)(\delta_\lambda\varphi_\lambda+\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}})\end{aligned}$$

とかくことができる。ところで，微分方程式 (5′) から

$$\delta_x\varphi_x=\dot{x}(t)-\delta_x\dot{\varphi}_x,$$

$$\delta_\lambda\varphi_\lambda=-\dot{\lambda}(t)-\delta_\lambda\dot{\varphi}_\lambda$$

となるから，これらを上式に代入すれば

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Psi(t)&\leqq-[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)\\&\quad-\dot{x}(t)'[\dot{x}(t)-\delta_x\dot{\varphi}_x+\varphi_x{}^{\mathrm{II}}]+\dot{\lambda}(t)'[-\dot{\lambda}(t)-\delta_\lambda\dot{\varphi}_\lambda+\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}}]\end{aligned}$$

をうる。一般に

$$-\dot{x}(t)'\dot{x}(t)-\dot{\lambda}(t)'\dot{\lambda}(t)\leqq 0$$

がなり立つが，微分方程式 (5′) に対して，この式で不等号がなり立つのは，$(x(t),\ \lambda(t))\notin\mathfrak{S}$のときで，そのときに限る。実際，もし，$\dot{x}(t)=\dot{\lambda}(t)=0$ となる，ある $(x^*,\ \lambda^*)$ があれば

$$\dot{\varphi}_x(x^*,\ \lambda^*)=\dot{\varphi}_\lambda(x^*,\ \lambda^*)=0$$

となるから，微分方程式(4)の場合と同じように

$$(x^*,\ \lambda^*)\in\mathfrak{S}$$

となる。逆に

$$(x(t),\ \lambda(t))=(\bar{x},\ \bar{\lambda})\in\mathfrak{S}$$

であれば，$\dot{x}(t)=\dot{\lambda}(t)=0$ となるから，lemma 2 を考慮すれば，これは微分方程式 (5′) の解となることがわかる。従って，$\dot{x}(t)=\dot{\lambda}(t)=0$ となる必要かつ十分条件は

$$(x(t),\ \lambda(t))=(\bar{x},\ \bar{\lambda})\in\mathfrak{S}$$

となることである。よって，$(x(t),\ \lambda(t))\notin\mathfrak{S}$ であれば

$$-\dot{x}(t)'\dot{x}(t)-\dot{\lambda}(t)'\dot{\lambda}(t)<0$$

でなければならない。しかも，さらに，次のことがいえる。すなわち，有限な t に対して，saddle-point 以外の点から出発した (5′) の解が

$$(x(t),\ \lambda(t))\in\mathfrak{S}$$

となることはない。なぜならば，もし，saddle-point 以外の点から出発した (5′) の解が，ある有限な t^* で

$$(x^*,\ \lambda^*)\in\mathfrak{S}$$

に attain したとすれば，t^* 以後，$(x^*,\ \lambda^*)$ にとどまっていても，上に述べた理由によって，それは (5′) の解である。他方，最初から，$(x^*,\ \lambda^*)$ にとどまっているものも，$(x^*,\ \lambda^*)$ を初期条件とする (5′) の解であり，この場合は，ふたたび t^* 以後

$$(x(t),\ \lambda(t))=(x^*,\ \lambda^*)$$

となる。これは (5′) の解が初期条件に関して unique であるという仮定に反

する。従って，t^* は有限でありえない。

さて，$(x(t),\ \lambda(t)) \notin \mathfrak{S}$ ならば，上に述べたことから

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) < -[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}](\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)$$
$$+\dot{x}(t)'\delta_x\dot{\varphi}_x-\dot{x}(t)'\varphi_x{}^{\mathrm{II}}-\dot{\lambda}(t)'\delta_\lambda\dot{\varphi}_\lambda+\dot{\lambda}(t)'\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}}$$

をうる。右辺を上で定義した記号を使ってかきかえれば

$$-[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)$$
$$+\dot{x}(t)'\dot{\varphi}_x-\dot{x}(t)'\dot{\varphi}_x{}^{\mathrm{II}}-\dot{x}(t)'\varphi_x{}^{\mathrm{II}}-\dot{\lambda}(t)'\dot{\varphi}_\lambda+\dot{\lambda}(t)'\dot{\varphi}_\lambda{}^{\mathrm{II}}+\dot{\lambda}(t)'\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}}$$

となる。lemma 8 によって

$$\dot{x}(t)'\dot{\varphi}_x-\dot{\lambda}(t)'\dot{\varphi}_\lambda\leqq 0$$

がなり立つから，結局，$(x(t),\ \lambda(t)) \notin \mathfrak{S}$ ならば

$$\frac{d}{dt}\Psi(t) < -[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)$$
$$-\dot{x}(t)'(\varphi_x{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_x{}^{\mathrm{II}})+\dot{\lambda}(t)'(\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_\lambda{}^{\mathrm{II}})$$

がえられる。ここで

$$-\dot{x}(t)'(\varphi_x{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_x{}^{\mathrm{II}})+\dot{\lambda}(t)'(\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_\lambda{}^{\mathrm{II}})=0$$

となる。実際

$$\dot{x}_i(t)=\varphi_{x_i}+\dot{\varphi}_{x_i} \text{ ならば } \varphi_{x_i}{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_{x_i}{}^{\mathrm{II}}=0,$$
$$\dot{x}_i(t)=0 \text{ ならば } \varphi_{x_i}+\dot{\varphi}_{x_i}=\varphi_{x_i}{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_{x_i}{}^{\mathrm{II}}$$

であから

$$-\dot{x}(t)'(\varphi_x{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_x{}^{\mathrm{II}})=0$$

はあきらかである。$\dot{\lambda}(t)'(\varphi_\lambda{}^{\mathrm{II}}+\dot{\varphi}_\lambda{}^{\mathrm{II}})$ が 0 になることも同様に証明できる。従って，上の不等式の右辺は

$$-[x^{\mathrm{II}}(t)-\bar{x}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)+[\lambda^{\mathrm{II}}(t)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}}]'(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)$$

となるが，実は，これは

$$\bar{x}^{\mathrm{II}\prime}(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)-\bar{\lambda}^{\mathrm{II}\prime}(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)$$

にひとしい。何故ならば

$$\delta_{x_i}=1 \text{ ならば } x_i{}^{\mathrm{II}}=0,$$

$$\delta_{x_i}=0 \text{ ならば } x_i^{\mathrm{II}}=x_i(t)=0$$

であるから

$$x^{\mathrm{II}\prime}(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)=0$$

がなり立つからである。同様に，$\lambda^{\mathrm{II}\prime}(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)$ が0になることもいえる。最後に

$$\delta_{x_i}=1 \text{ ならば } \bar{x}_i^{\mathrm{II}}=0,$$

$$\delta_{x_i}=0 \text{ ならば } \bar{x}^{\mathrm{II}}=\bar{x}_i\geqq 0 \text{ かつ } \varphi_{x_i}+\dot{\varphi}_{x_i}<0$$

から

$$\bar{x}^{\mathrm{II}\prime}(\varphi_x+\dot{\varphi}_x)\leqq 0$$

が導ける。同様に

$$\bar{\lambda}^{\mathrm{II}\prime}(\varphi_\lambda+\dot{\varphi}_\lambda)\geqq 0$$

を導くことができる。よって，$(x(t),\ \lambda(t))\notin\mathfrak{S}$ ならば

$$\frac{d}{dt}\Psi(t)<0$$

である。ゆえに，lemma 9 により，微分方程式 (5′) の解は quasi-stable であることが示されたことになる。（証明終）

引 用 文 献

[1] Arrow, K. J., L. Hurwicz and H. Uzawa (eds.), *Studies in Linear and Non-linear Programming*, Stanford, California: Stanford University Press, 1958 (以下，本書を *Studies* と略記する).

[2] Arrow, K. J., L. Hurwicz and H. Uzawa, "Constraint Qualifications in Maximization Problems," *Naval Research Logistics Quarterly*, Vol. 8, No. 2 (June, 1961), pp. 175–191.

[3] Arrow, K. J. and R. Solow, "Gradient Method for Constrained Maxima, with Weakened Assumptions," in *Studies*, pp. 166–176.

[4] Hurwicz, L., "Programming in Linear Spaces," in *Studies*, pp. 38–102.

[5] Kose, T., "Solutions of Saddle Value Problems by Differential Equations" *Econometrica*, Vol. 24, No. 1 (January, 1956), pp. 59–70.

[6] Kuhn, H. W. and A. W. Tucker, "Non-linear Programming," in J. Neyman (ed.), *Proceedings of the Second Berkely Symposium on Mathematical Statistics and Probability,* Berkely and Los Angeles: University of California Press, 1951, pp. 481–492.

[7] Morishima, M., "Stability Analysis of the Walras-Leontief System," in M. Morishima, *Equilibrium Stability, and Growth,* Oxford: Oxford University Press, 1964, pp. 23–43.

[8] Samuelson, P. A., "Market Mechanisms and Maximization," in J. Stiglitz (ed.), *The Collected Scientific Papers of Paul A. Samuelson,* Cambridge, Massachussetts: The M.I.T. Press, 1966, Vol. I, pp. 425–492.

[9] Toshima, H., "A Note on the Boundedness of a Set of Saddle-Points," *The Economic Review* (*Shôgaku-T. kû*), Vol. XV, No. 3 (October, 1964), pp. 139–142.

[10] Uzawa, H., "The Kuhn-Tucker Theorems in Concave Programming," in *Studies,* pp. 32–37.

[11] Uzawa, H., "Gradient Method for Concave Programming, II: Global Stability in the Strictly Concave Case," in *Studies,* pp. 127–132.

[12] Uzawa, H., "The Stability of Dynamic Processes," *Econometrica,* Vol. 29, No. 4 (October, 1961), pp. 617–631.

[13] Yamamoto, K., "Fundametal Theory of the Gradient Method for Concave Programming," *Journal of Pre-Medical Course, Sapporo Medical College 2, 1961,* pp. 17–31.

[14] 福岡正夫，「投入産出モデルと市場機構」，理論経済学，第 VI 巻第 1，2 号 (1955 年 12 月)，pp. 46–54.

[15] 古瀬大六，「鞍点問題の微分方程式解法」，商学討究，第 5 巻第 4 号 (1954 年 3 月)，pp. 1–42.

[16] 戸島　熙，「Concave Programming の Gradient Method について (1)」，北大経済学研究 18，1960，pp. 27–54.

[17] 戸島　熙，「Concave Programming の Gradient Method について (3)」，*Communication with special reference to "Fundamental and Applied Aspects of Mathematics,"* No. 1 (B), The Department of Applied Mathematics of the Research Institute of Applied Electricity, Hokkaido University, 1960, pp. 16–24.