

# Cyclic Attacking

沼田 久

人は何かの目標を達成するために組織を作って行動をする場合が多い。またいくつかの機械や装置を組合わせて目的の結果を得ようとする。ある組織の中の各メンバー（これは人であっても機械であってもよい）の働き方には目標、組織の性格などによっていろいろな種類が考えられるが、ここでは非常に単純な場合として次のような活動をする組織を考えてみよう。

- a) 順序のついた  $m$  人のメンバー  $M_1, M_2, \dots, M_m$  からなる組織  $G$  がある。
- b) 各メンバーは順序に従って、共通の目的をとげるために、それぞれに与えられたある「試み」を行なう。その際のメンバー  $M_i$  の「試み」の成功の確率は  $p_i$  ( $0 \leq p_i \leq 1$ ) である ( $i=1, 2, \dots, m$ )。
- c) メンバー  $M_1$  から「試み」を始める。
- d) メンバー  $M_k$  が「試み」を終ったとき,
  - i) 失敗したメンバーの人数が  $f-1$  以下ならば、メンバー  $M_{k+1}$  ( $k=m$  のときは  $k+1=1$  とする) が次に「試み」を行なう。
  - ii) 失敗したメンバーの人数が  $f$  ならば、そこで第 1 回目の attacking は終る。  
( $f$  は正定整数)
- e) 第  $l$  回目の attacking がメンバー  $M_j$  で終ったならば、第  $l+1$  回目の attacking はメンバー  $M_{j+1}$  から始まる ( $j=m$  のときは  $j+1=1$  とする)。以下 attacking の終り方の規則は d) と同じである。
- f) 第  $l$  回目の attacking において、成功したメンバーの人数を  $h$ 、この回の成果を  $P_l$  とするとき,
  - i)  $h \leq s$  ならば  $P_l = 0$  と定める。
  - ii)  $h > s$  ならば  $P_l = h - s$  と定める。  
( $s$  は正定整数)

g)  $n$  回の attacking が終了したときに組織  $G$  の活動が終了し、この活動の成果  $P$  は各回の成果の総和  $P = \sum_{i=1}^n P_i$  である。

このような活動をする組織  $G$  を  $G(m, s, f, n)$  と表わすことにし、cyclic attacking をするチームと呼ぶことにしよう。この組織において各メンバーの「試み」の成功の確率が異なる場合に、メンバーの順序をどのように決めておけば、最終的成果  $P$  を最大にすることができるであろうか。これが考えたい問題なのであるが、一般の場合の結果を得るには至っていない。また問題そのものにも、各メンバーの「試み」の成功不成功に rank をつけることなど一般化の可能性も残されている。以下では簡単な場合の結果を述べてみよう。

**Proposition.**  $G = G(2, 1, 1, 1)$  において  $p_1 > p_2 > 0$  とし、 $M_1, M_2$  の順序をかえたものを  $G' = G'(2, 1, 1, 1)$  と表わすことにする（従って  $G'$  の第1メンバー  $M_1$  は  $M_2$  であって、彼の「試み」の成功の確率は  $p_2$ 、第2メンバー  $M_2$  は  $M_1$  であって、その成功の確率は  $p_1$  である）。 $G$  の期待成果を  $E(P)$ 、 $G'$  の期待成果を  $E(P')$  とすれば  $E(P) > E(P')$  である。

証明.  $m=1$  の場合は問題にならないから、 $G(2, 1, 1, 1)$  は cyclic attacking の最も簡単な場合である。この  $G$  では attacking は1回だけであるから、それが丁度  $j$  人目で終る確率は

$$j=1 \text{ のとき } 1-p_1$$

$$j=2 \text{ のとき } p_1(1-p_2)$$

$$j=2k+1 \ (k \geq 1) \text{ のとき } (p_1 p_2)^k (1-p_1)$$

$$j=2k \ (k \geq 1) \text{ のとき } (p_1 p_2)^{k-1} p_1 (1-p_2)$$

であり、そのときの成功数は  $j-1$ 、従って成果数は

$$j=1 \text{ のとき } 0$$

$$j=2 \text{ のとき } 0$$

$$j \geq 3 \text{ のとき } j-2$$

となる。よって期待成果  $E(P)$  は

$$E(P) = \sum_{k=1}^{\infty} (2k-1) (p_1 p_2)^k (1-p_1) + \sum_{k=1}^{\infty} 2k (p_1 p_2)^k p_1 (1-p_2)$$

右辺の2つの級数は明らかに絶対収束する。よって

$$\begin{aligned}
 E(P) &= \sum_{k=1}^{\infty} (p_1 p_2)^k \{(2k-1)(1-p_1) + 2k p_1 (1-p_2)\} \\
 &= \sum_{k=1}^{\infty} (p_1 p_2)^k (2k-1 + p_1 - 2k p_1 p_2)
 \end{aligned}$$

ここで  $p_1$  と  $p_2$  とを交換すれば  $E(P')$  が得られる。

$$E(P') = \sum_{k=1}^{\infty} (p_1 p_2)^k (2k-1 + p_2 - 2k p_1 p_2)$$

$$E(P) - E(P') = \sum_{k=1}^{\infty} (p_1 p_2)^k (p_1 - p_2) > 0$$

ゆえに  $E(P) > E(P')$  が得られた。(証明終)

この結果は、1人でも失敗する者があれば、それで活動が終るというルールのもとでは、成功率の大きい者を先頭に立てる方がよいという常識的判断が正しいということを示している。

それでは次に  $G=G(2, 1, 1, 2)$  を考えてみよう。この場合も  $G$  のメンバーが「試み」を行なう順序は  $M_1, M_2, M_1, M_2, \dots$  であり、 $G(2, 1, 1, 1)$  を cyclic に2度行なうだけであるから、常識的判断では  $p_1 > p_2$  の場合の方が  $p_1 < p_2$  の場合よりも期待成果は大であるように思われるが、はたしてその判断は正しいであろうか。以下そのことを検討してみよう。

$G=G(2, 1, 1, 2)$  では attacking は2回で終るから、第1回目の attacking が  $i$  人で終り、第2回目の attacking が  $j$  人で終る確率を  $p(i, j)$  とし、そのときの成果を  $q(i, j)$  と表わすことにすると

$$p(1, 1) = (1-p_1)(1-p_2)$$

$$p(2, 1) = p_1(1-p_2)(1-p_1)$$

$$p(1, 2) = (1-p_1)p_2(1-p_1)$$

$$p(2, 2) = \{p_1(1-p_2)\}^2$$

$$q(1, 1) = q(2, 1) = q(1, 2) = q(2, 2) = 0$$

となることは明らかである。一般に  $i \geq 2, j \geq 2$  のときは  $i, j$  の偶奇で場合を分けると

$$p(2k, 2l) = (p_1 p_2)^{k-1} p_1 (1-p_2) (p_1 p_2)^{l-1} p_1 (1-p_2)$$

$$p(2k+1, 2l) = (p_1 p_2)^k (1-p_1) (p_2 p_1)^{l-1} p_2 (1-p_1)$$

$$p(2k, 2l+1) = (p_1 p_2)^{k-1} p_1 (1-p_2) (p_1 p_2)^l (1-p_1)$$

$$p(2k+1, 2k+1) = (p_1 p_2)^k (1-p_1) (p_2 p_1)^l (1-p_2)$$

であり、その際の成果は

$$q(i, j) = i - 2 + j - 2 = i + j - 4$$

となっている。従って期待成果  $E(P)$  は

$$\begin{aligned} E(P) &= \sum_{k, l=1}^{\infty} (p_1 p_2)^{k+l-2} p_1^2 (1-p_2)^2 (2k+2l-4) \\ &\quad + \sum_{k, l=1}^{\infty} (p_1 p_2)^{k+l-1} p_2 (1-p_1)^2 (2k+2l-3) \\ &\quad + \sum_{k, l=1}^{\infty} (p_1 p_2)^{k+l-1} p_1 (1-p_1)(1-p_2) (2k+2l-3) \\ &\quad + \sum_{k, l=1}^{\infty} (p_1 p_2)^{k+l} (1-p_1)(1-p_2) (2k+2l-2) \end{aligned}$$

前記 proposition におけると同様に  $M_1, M_2$  を交換した場合の期待成果を  $E(P')$  と表わすと、これは上記  $E(P)$  において  $p_1, p_2$  を交換することによって得られるから  $E(P) - E(P')$  を求めると

$$\begin{aligned} E(P) - E(P') &= \sum_{k, l=1}^{\infty} (p_1 p_2)^{k+l-2} \{ (4k+4l-6) (p_1^3 p_2^2 - p_1^2 p_2^3) \\ &\quad - (2k+2l-3) (p_1^3 p_2 - p_1 p_2^3) \\ &\quad - (4k+4l-8) (p_1^2 p_2 - p_1 p_2^2) \\ &\quad + (2k+2l-4) (p_1^2 - p_2^2) \} \end{aligned}$$

右辺の { } 内を  $R(p_1, p_2)$  と表わすことにしよう ( $R$  は  $k, l$  にも依存する)。明らかに

$$R(p, p) = 0$$

となっている。

$$\begin{aligned} \frac{\partial R}{\partial p_1} &= (4k+4l-6) (3p_1^2 p_2^2 - 2p_1 p_2^3) \\ &\quad - (2k+2l-3) (3p_1^2 p_2 - p_2^3) \\ &\quad - (4k+4l-8) (2p_1 p_2 - p_2^2) \\ &\quad + (2k+2l-4) 2p_1 \end{aligned}$$

ここで  $p_1 = p_2 = p$  とおけば

$$\begin{aligned} \left[ \frac{\partial R}{\partial p_1} \right]_{p_1=p_2=p} &= (4k+4l-6) (p^4 - p^3) \\ &\quad - (4k+4l-8) (p^2 - p) \end{aligned}$$

$p=0, 1$  では

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial p_1} \right]_{p_1=p_2=1} = \left[ \frac{\partial R}{\partial p_1} \right]_{p_1=p_2=0} = 0$$

$k+l=2$  の場合を考えると  $0 < p < 1$  では

$$\left[ \frac{\partial R}{\partial p_1} \right]_{p_1=p_2=p} = 2(p^4 - p^3) < 0$$

となるが,  $k+l \geq 3$  の場合は  $p$  の 4 次式

$$S(p) = (4k+4l-6)(p^4 - p^3) - (4k+4l-8)(p^2 - p)$$

において

$$\frac{dS(0)}{dp} = 4k+4l-8 > 0$$

$$\frac{dS(1)}{dp} = 2 > 0$$

であることを用いると  $0 < p_0 < 1$ ,  $S(p_0) = 0$  なる  $p_0$  がただ 1 つ存在し,

$$0 < p < p_0 \text{ では } S(p) > 0$$

$$p_0 < p < 1 \text{ では } S(p) < 0$$

となることが容易に知られる。このことはすなわち,  $p_1 = p_2$  の状態から  $p_1$  が増加するときに,  $R(p_1, p_2) > 0$  となるのは  $p_2$  が比較的 0 に近い場合であり,  $p_2$  が極めて 1 に近い場合には  $p_1$  が  $p_2$  よりも大きくなると  $R(p_1, p_2) < 0$  となることを意味している。

以上のことから結局,  $E(P) - E(P')$  の正負は  $p_1 > p_2$  であっても一意には定まらず,  $p_1, p_2$  の値によって変化し得るということになり, 「常識的判断」は必ずしも正しくないことが判る。実際  $p_1$  を極めて 1 に近くとるとき,  $p_2$  を極めて 0 に近くとれば  $E(P) - E(P') > 0$  となり, その逆にとれば  $E(P) - E(P') < 0$  となることは容易に確かめることができる。