<研究ノート>

統計的推定問題への L_2 空間の応用についての一考察*

竹内　　清

1

この研究ノートの主要部分は，ある刊行企画のなかの一論文として発表される予定のもとに，1966年秋に書きあげられたものである。ある事情のためにこの企画が中止されることになり，この論文は未発表のまま筐底に3年有余眠ってしまった。この論文は本質的には，竹内[7]，[8]，[9]，[10]，[11]の前段の部分を構成する内容のものであるが，それ自体内容を完結させる意味で，これらと若干内容において重複した部分もあるが，初めのものにある程度の修正を施したうえで，体裁を整えた。

2

ヒルベルト空間に関する知識は，統計的問題を取扱う上で極めて有用である。この小論では，ヒルベルト空間である L_2 空間を対象として，若干の統計的推定の問題を考察することにする。

点 x の空間 R の二乗可積分関数の全体は，L_2 空間とよばれるが，これはヒルベルト空間である（たとえば，Davis [1] を参照)。可測関数 $f(x)$ が

$$\int_R f^2(x)d\mu(x)<\infty \tag{1}$$

という条件を満足する時，$f(x)$ を R 上で二乗可積分関数という。(1)において測度 $\mu(x)<\infty$ とする。なお以下では簡単化のため，$\int_R$ を $\int$ と書くことにする。

通常，ヒルベルト空間あるいは L_2 空間を取扱う場合，測度としては一般的な測度が

* 原稿受領 1970年1月21日

用いられるが，われわれの当面の統計的問題の処理に当っては，確率測度を用いることにしよう。われわれは以下で x が実数の場合だけを取扱うことにする。

Ω をパラメーター空間，X を $\theta\in\Omega$ に対し確率密度関数 $p(x|\theta)$ にしたがって分布する確率変数とすれば，確率測度 $\nu(x)$ は，次のように定義することができるであろう。

$$\nu(c)=\int_C p(x|\theta)d\mu(x), \tag{2}$$

ただし，C は R の部分集合。

3

さて

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_n(x),\ \ldots. \tag{3}$$

を，L_2 の完備な正規直交系とすれば，正規直交系の定義から，任意の i, j に対し

$$(\varphi_i(x),\ \varphi_j(x))=\int\varphi_i(x)\varphi_j(x)d\nu(x)=\begin{cases}1 & (i=j),\\ 0 & (i\neq j).\end{cases} \tag{4}$$

確率測度 $\nu(x)$ の定義(2)から明らかなように，スカラー積(4)は，陰伏的に確率密度関数 $p(x|\theta)$ をウェイトとして定義されていることに注意することが必要である。

L_2 の部分空間 $L_2^{(n)}$ を，$\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, …, $\varphi_n(x)$ の張る線型空間としよう。そうすると，任意の $g(x)\in L_2^{(n)}$ は次のように表わされる。

$$g(x)=\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x), \tag{5}$$

ただし，$c_i(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ は定数。

任意の $g(x)\in L_2^{(n)}$ に対し，$t(x)\in L_2^{(n)}$ が L_2 の距離の意味で $f(x)\in L_2$ との距離が最小になるため，すなわち，

$$\|f(x)-t(x)\|^2=\inf_{g(x)\in L_2^{(n)}}\|f(x)-g(x)\|^2 \tag{6}$$

が成り立つための必要かつ十分条件は，

$$(g(x),\ f(x))=(g(x),\ t(x)) \tag{7}$$

が成り立つことである。(7)は

$$\int g(x)\{f(x)-t(x)\}d\nu(x)=0 \tag{8}$$

または

$$\int g(x)f(x)d\nu(x)=\int g(x)t(x)d\nu(x) \tag{9}$$

とも表わすことができるであろう。もし

$$t(x)=\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(x) \tag{10}$$

と表わせば，(8)および(9)は，それぞれ次の(11)および(12)となるであろう。すなわち

$$\int\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)\{f(x)-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(x)\}d\nu(x)=0, \tag{11}$$

および

$$\int\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)f(x)d\nu(x)=\int\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\varphi_j(x)d\nu(x). \tag{12}$$

(6)が成り立つための必要かつ十分条件は(8)であることを，以下で証明しよう。

まず，もしある $g(x)\in L_2^{(n)}$ に対して(8)が $\delta\neq 0$ なる値をとったものとすれば，

$$\lambda=\frac{\delta}{\int g^2(x)d\nu(x)} \tag{13}$$

に対し，殆んどすべての x について

$$\int\{f(x)-t(x)-\lambda g(x)\}^2d\nu(x)<\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x) \tag{14}$$

となるべき筈である。しかし，これが不可能であることは，次のように示される。すなわち

$$\begin{aligned}
&\int\{f(x)-t(x)-\lambda g(x)\}^2d\nu(x)\\
&\quad=\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x)-2\int\{f(x)-t(x)\}\lambda g(x)d\nu(x)\\
&\qquad+\int\lambda^2g^2(x)d\nu(x)\\
&\quad=\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x)-2\int\{f(x)-t(x)\}\frac{\delta g(x)}{\int g^2(x)d\nu(x)}d\nu(x)\\
&\qquad+\int\frac{\delta^2}{\left\{\int g^2(x)d\nu(x)\right\}^2}g^2(x)d\nu(x)\\
&\quad=\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x)-\frac{2\delta^2}{\int g^2(x)d\nu(x)}+\frac{\delta^2}{\int g^2(x)d\nu(x)}
\end{aligned}$$

$$=\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x)-\frac{\delta^2}{\int g^2(x)d\nu(x)}. \tag{15}$$

ところで

$$\frac{\delta^2}{\int g^2(x)d\nu(x)}>0. \tag{16}$$

したがって

$$\int\{f(x)-t(x)-\lambda g(x)\}^2d\nu(x)<\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x). \tag{17}$$

これは仮定と矛盾する。

次に逆に (8) が成り立ったものと仮定しよう。すなわち，任意の $g(x)\epsilon L_2^{(n)}$ に対して

$$\int g(x)\{f(x)-t(x)\}d\nu(x)=0.$$

ところで

$$\int\{f(x)-g(x)\}^2d\nu(x)=\int[\{f(x)-t(x)\}+\{t(x)-g(x)\}]^2d\nu(x)$$
$$=\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x)+\int\{t(x)-g(x)\}^2d\nu(x)$$
$$+\int\{f(x)-t(x)\}t(x)d\nu(x)+\int\{f(x)-t(x)\}g(x)d\nu(x). \tag{18}$$

ところで仮定から

$$\int\{f(x)-t(x)\}t(x)d\nu(x)=0,$$

$$\int\{f(x)-t(x)\}g(x)d\nu(x)=0.$$

これから，(18) の右辺の第 3 項および第 4 項が 0 となることが分る。したがって

$$\int\{f(x)-g(x)\}^2d\nu(x)=\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x)+\int\{t(x)-g(x)\}^2d\nu(x).$$

上式の右辺の第 2 項は

$$\int\{t(x)-g(x)\}^2d\nu(x)\geq 0.$$

したがって

$$\int\{f(x)-g(x)\}^2d\nu(x)\geq\int\{f(x)-t(x)\}^2d\nu(x). \tag{19}$$

以上によって，(6) が成立つための必要かつ十分条件は (8) であることが証明された。

後で触れるように，(7)〜(12) の関係式は，われわれの展開にとって基本的な役割を果

すことになる。

4

前節の(6)を満足する $t(x)$ が(10)で表わされる場合，具体的には α_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ がどのように定められるかを，本節で考察することにする。すなわち

$$\begin{aligned}\|f(x)-g(x)\|^2&=(f(x)-g(x),\ f(x)-g(x))\\&=\int\{f(x)-g(x)\}^2d\nu(x)\\&=\int\{f(x)-\sum_{i=1}^{n}c_i\varphi_i(x)\}^2d\nu(x)\end{aligned} \tag{20}$$

において，これを最小にする c_i $(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)$ を決定するのが，ここでの問題となる。

(20)は次のように変形できる。

$$\|f(x)-g(x)\|^2=\|f(x)\|^2-\sum_{i=1}^{n}(f(x),\ \varphi_i(x))^2+\sum_{i=1}^{n}(c_i-(f(x),\ \varphi_i(x)))^2 \tag{21}$$

ところで，(21)が最小になるのは

$$c_i=(f(x),\ \varphi_i(x))\quad(i=1,\ 2,\ \ldots,\ n) \tag{22}$$

という関係が成り立つ時である。かくして

$$t(x)=\sum_{i=1}^{n}(f(x),\ \varphi_i(x))\varphi_i(x) \tag{23}$$

なる時，(6)の関係式が満たされることになる。

$c_i=(f(x),\ \varphi_i(x))$ は，直交系(3)による関数 $f(x)\in L_2$ のフーリエ級数を構成する。級数

$$\sum_{i=1}^{\infty}(f(x),\ \varphi_i(x))\varphi_i(x) \tag{24}$$

は，直交系(3)による関数 $f(x)\in L_2$ のフーリエ級数とよばれる（たとえば，Кормогоров и Фомин [4] を参照)。

次に，上の展開を幾何学的に考察してみよう。

$L_2^{(n)}$ を L_2 の部分空間 $(L_2^{(n)}\subset L_2)$ とすれば，L_2 の各要素 $f(x)$ に対し，殆んどすべての x について

$$\|f(x)-t(x)\|=\inf_{g\in L_2^{(n)}}\|f(x)-g(x)\| \tag{25}$$

となるような $t(x)\in L_2^{(n)}$ が一義的に対応する。この場合，$t(x)$ は，$f(x)\in L_2$ の $L_2^{(n)}$ の上へのプロジェクション（射影）とよばれる。

いま

$$e(x)=f(x)-t(x) \tag{26}$$

とおけば，$e(x)$ は$L_2^{(n)}$ に直交する。すなわち，任意の $g(x)\in L_2^{(n)}$ に対して

$$(f(x)-t(x),\ g(x))=0. \tag{27}$$

これを証明するには，次のように進めばよい。いま $e(x)=f(x)-t(x)$ が $L_2^{(n)}$ と直交しないと仮定すれば，

$$(f(x)-t(x),\ g(x))=\delta\neq 0 \tag{28}$$

であるような $g(x)\in L_2^{(n)}$ が存在する筈である。$L_2^{(n)}$ は線型空間であるから，任意の定数 a に対し，$t(x)\in L_2^{(n)}$, $g(x)\in L_2^{(n)}$ について

$$g^*(x)=t(x)-ag(x)\in L_2^{(n)}. \tag{29}$$

次に

$$\begin{aligned}\|f(x)-g^*(x)\|^2&=(\{f(x)-t(x)\}+ag(x),\ \{f(x)-t(x)\}+ag(x))\\&=\|f(x)-t(x)\|^2+a(f(x)-t(x),\ g(x))+a(g(x),\ f(x)-t(x))\\&\quad+|a|^2\|g(x)\|^2.\end{aligned} \tag{30}$$

ところで，われわれは実数の場合だけを取扱っているので

$$(f(x)-t(x),\ g(x))=(g(x),\ f(x)-t(x))=\delta. \tag{31}$$

したがって

$$a=-\frac{\delta}{\|g(x)\|^2} \tag{32}$$

とすれば，(30) の右辺の第2項以下の和は，

$$\begin{aligned}&a(f(x)-t(x),\ g(x))+a(g(x),\ f(x)-t(x))+|a|^2\|g(x)\|^2\\&=-\frac{|\delta|^2}{\|g(x)\|^2}<0.\end{aligned} \tag{33}$$

したがって

$$\|f(x)-g^*(x)\|<\|f(x)-t(x)\|^2. \tag{34}$$

ところで，(25) から

$$\|f(x)-t(x)\|=\inf_{g\in L_2^{(n)}}\|f(x)-g(x)\|$$

であるので，(34) の結果はこれと矛盾することになり，最初樹てた仮定 (28) は誤りとな

る。

もし複素数の場合を考えると，(30)は次のようになる。

$$\|f(x)-g^*(x)\|^2=\|f(x)-t(x)\|^2+\bar{a}(f(x)-t(x),\ g(x))$$
$$+a(g(x),\ f(x)-t(x))+|a|^2\|g(x)\|^2$$

において

$$\bar{a}(f(x)-t(x),\ g(x))=\bar{a}\delta,$$

$$a(g(x),\ f(x)-t(x))=a\bar{\delta}$$

となり，(30)の右辺の第2項以下は，結局

$$-\frac{\delta\bar{\delta}}{\|g(x)\|^2}=-\frac{|\delta|^2}{\|g(x)\|^2}$$

となり，実数の場合と結論は同じになる。

5

L_2 は無限次元の空間であるが，$f(x)\in L_2$ への最良近似として，すなわち，L_2 の距離の意味で $f(x)$ との距離が最小になるように，これ迄の節では，n 次元の線型部分空間 $L_2^{(n)}\subset L_2$ において

$$t(x)=\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)=\sum_{i=1}^{n}(f(x),\ \varphi_i(x))\varphi_i(x)$$

を考えた。これの拡張として，

$$\sum_{i=1}^{n+1}\alpha_i\varphi_i(x),\ \sum_{i=1}^{n+2}\alpha_i\varphi_i(x),\ \cdots \tag{35}$$

等によって，$f(x)$ に対する最良近似を考えることができるであろう。この場合，α_i ($i=1,\ 2,\ \ldots$) として，前節のフーリエ係数を考えると，

$$\|f(x)-\sum_{i=1}^{n}(f(x),\ \varphi_i(x))\varphi_i(x)\|\geq\|f(x)-\sum_{i=1}^{n+1}(f(x),\ \varphi_i(x))\varphi_i(x))\|$$
$$\geq\|f(x)-\sum_{i=1}^{n+2}(f(x),\ \varphi_i(x)\varphi_i(x)\|\geq\cdots \tag{36}$$

となることが期待できるであろう。

次に，これを数学的に厳密に考え，推定の問題への応用を考察することにしよう。

いま

$$\int f(x)p(x|\theta_j)d\mu(x)=g(\theta_j) \tag{37}$$
$$(j=1,\ 2,\ \ldots,\ m)$$

なる制約条件の下で，汎関数

$$J[f]=\int\{f(x)-g(\theta_0)\}^2 p(x|\theta_0)d\mu(x) \tag{38}$$

を最小にする問題を考えよう。これは，各パラメーター点 θ_j $(j=1, 2, \ldots, m)$ において不偏であり，かつある $\theta_0\in\Omega$ において分散が最小になるような推定量 $f(x)=f^*(x)$ を求める問題と考えることができるであろう。

この際，$f(x)$ は

$$\int f^2(x)p(x|\theta)d\mu(x)<M, \tag{39}$$

ただし，M は適当な定数，なる条件を満足するものとしよう。すなわち，$f(x)$ は，ウェイト $p(x|\theta)$ に関して L_2 空間に属することになる。かくして，第3節および第4節での論議を，この節の問題に応用することができるであろう。

なお(37)なる制約条件の下で，(38)なる汎関数を最小にすることは，

$$J[f]=\int f^2(x)p(x|\theta_0)d\mu(x) \tag{40}$$

なる汎関数を最小にすることと同等である。以下では(38)の代りに(40)を考えよう。

いま $L_2^{(n)}$ を，関数(3)の最初の n 項で張られる L_2 の n 次元線型部分空間とすれば，$L_2^{(n)}$ は，

$$\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x) \tag{41}$$

なるすべての線型結合の集合である。ただし，$\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ は適当な定数。こうすると，各部分空間 $L_2^{(n)}$ の上で，汎関数 $J[f]$ は，変数 $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ の関数

$$J[\sum_{i=1}^{n}\alpha_i\varphi_i(x)] \tag{42}$$

に帰着することになる。(38)ないし(40)は下に有界であることは明らかである。すなわち

$$\inf_f J[f(x)]=\mu>-\infty. \tag{42}$$

したがって，われわれは，変分法における直接法であるリッツの方法 (Ritz's method) を，われわれの問題に適用することができるであろう（たとえば，Канторович и Крылов [3] および Gel'fand and Fomin [2] 参照)。

さて，もし(41)が許容可能であるならば，それは，条件(37)および(40)を満足しなければならない。したがって，条件(37)は

$$\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) p(x|\theta_j) d\mu(x) = g(\theta_j) \quad (j=1, 2, \dots, m) \tag{43}$$

ということになる。また汎関数 $J[f]$ (40) は，次のようになる。

$$J_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] = \int \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) \right\}^2 p(x|\theta_0) d\mu(x). \tag{44}$$

これは，n 個の変数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ の関数となる。

したがって，われわれの問題は，変数 $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ を用いて，(43) をもった n 次元空間上において，$J_n[\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n]$ を最小にすることになる。この最小値を μ_n で表わすことにしよう。これは $L_2^{(n)}$ の要素である。

さて，(43) から，シュバルツの不等式を用いて

$$g^2(\theta_j) = \left[\int \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) p(x|\theta_j) d\mu(x) \right]^2$$
$$\leq \int \left\{ \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \varphi_i(x) \right\}^2 p(x|\theta_j) d\mu(x) \int p(x|\theta_j) d\mu(x) = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq M^2. \quad (j=1, 2, \dots, m) \tag{45}$$

したがって，(44) を満足するためには，不等式

$$g^2(\theta_j) \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq M^2 \quad (j=1, 2, \dots, m) \tag{46}$$

を満足することが必要である。(46) の不等式が，$j=1, 2, \dots, m$ について同時的に成り立つためには，次式が成り立たなければならない。

$$\max_j \{g^2(\theta_j)\} \leq \sum_{i=1}^{n} \alpha_i^2 \leq M^2. \tag{47}$$

したがって，関数 (44) を，n 次元の有界な閉領域 (47) において最小にしなければならない。連続な汎関数 (44) が，このような領域で最小値を持つことは，ワイヤストラスの定理から容易に導かれる（たとえば，Natanson [5] 参照)。われわれの上の問題は，任意の n に対して最小値を持つことになる。

このようにして得られた，最小値を与える多項式の系列を，$\{\bar{f}_n(x)\}_1^\infty$ によって表わすことにしよう。各々の多項式 $\bar{f}_n(x)$ が，多項式 $\bar{f}_{n+1}(x)$ の特別な場合である限り，次の不等式が成り立つ。

$$J[\bar{f}_{n+1}(x)] \leq J[\bar{f}_n(x)]. \tag{48}$$

これから，

$$\mu_n = J[\bar{f}_n(x)] \tag{49}$$

は，$n\to\infty$ に対して単調減少であり，したがってある値 μ^* に収斂することが導かれる。ただし，この段階では

$$\mu^* \geq \mu \tag{50}$$

という関係だけが分っているだけである。ただし，μ は，(42) によって定義されたもので，

$$\mu = J[\bar{f}(x)] = \inf_f J[f(x)]. \tag{51}$$

以下では，(50) において等号が成立することを示そう。このため，まず任意の $\tilde{f}_n(x)$ に対し，次の差を考察しよう。

$$\begin{aligned} J[\tilde{f}_n(x)] - J[\bar{f}(x)] &= \int \{\tilde{f}_n^2(x) - \bar{f}^2(x)\} p(x|\theta_0) d\mu(x) \\ &= \int \{\tilde{f}_n(x) - \bar{f}(x)\}\{\tilde{f}_n(x) + \bar{f}(x)\} p(x|\theta_0) d\mu(x) \\ &\leq \int |\tilde{f}_n(x) - \bar{f}(x)|\,|\tilde{f}_n(x) + \bar{f}(x)|\, p(x|\theta_0) d\mu(x). \end{aligned} \tag{52}$$

ところで，われわれは，$\varepsilon>0$ に対して

$$\lim_{n\to\infty} \int |\tilde{f}_n(x) - \bar{f}(x)|^2 p(x|\theta_0) d\mu(x) < \varepsilon \tag{53}$$

なるように，$\tilde{f}_n(x)$ を選び出すことができるから，次の不等式を得る。

$$\begin{aligned} J[\tilde{f}_n(x)] - J[\bar{f}(x)] &\leq \varepsilon \int |2\bar{f}(x) + \varepsilon|\, p(x|\theta_0) d\mu(x) \\ &\leq 2\varepsilon \int |\bar{f}(x)|\, p(x|\theta_0) d\mu(x) + \varepsilon^2. \end{aligned} \tag{54}$$

ここで，$n\to\infty$ に対して $\varepsilon\to 0$ は，(54) の右辺が，$n\to\infty$ に対して 0 に近づくことを意味する。したがって，適当な $\eta>0$ に対して

$$0 \leq J[\tilde{f}_n(x)] - J[\bar{f}(x)] < \eta \tag{55}$$

なるような $N(\eta)$ を見出すことができる。したがって

$$J[\tilde{f}_n(x)] < \mu + \eta. \tag{56}$$

しかし最小値を与える多項式 $\bar{f}_n(x)$ の定義から明らかなように

$$J[\bar{f}_n(x)] \leq J[\tilde{f}_n(x)]. \tag{57}$$

かくして

$$\mu^* \leq J[\bar{f}_n(x)] < \mu+\eta. \tag{58}$$

これから

$$\mu^* = \mu. \tag{59}$$

以上によって，(43) なる制約条件のもとで $J[f(x)]$ を最小にする最小分散不偏推定量 $\bar{f}(x)$ が存在することが証明された。

次に，ラグランジュ乗数を用いて，結局 (12) に対応する次の関係が導かれる。任意の $h(x) \in L_2$ に対して

$$\sum_{j=1}^{m} \lambda(\theta_0, \theta_j) \int h(x) p(x|\theta_j) d\mu(x) = \int \bar{f}(x) h(x) p(x|\theta_0) d\mu(x), \tag{60}$$

ただし，$\lambda(\theta_0, \theta_j)$ ($j=1, 2, \ldots, m$) はラグランジュ乗数。線型オペレーター A を用いると，(60) は次のように表わすことができる。

$$A \int h(x) p(x|\theta) d\mu(x) = \int \bar{f}(x) h(x) p(x|\theta_0) d\mu(x). \tag{61}$$

これは，シュタインの一般のオペレーターを用いた結果に対応する（Stein [6]）。

参 考 文 献

[1] P. J. Davis, *Interpolation and Approximation*, 1963, Chapter IX.

[2] I. M. Gel′fand and S. V. Fomin, *Calculus of Variations*, 1963, pp. 192-207.（これは，**И. М. Гельфанд и С. В. Фомин**, ***Вариационное исчисление***, 1961，の飜訳であるが，飜訳の方がよい）.

[3] **Л. В. Канторович и В. И. Крылов**, ***придлиженные методы высшего анализа***, 1962, **стр.** 259-375.

[4] **А. Н. Колмогоров и С. В. Фомин**, ***Элементы теории Функций и функционального анализа***, **иадание Второе, перераъотанное и дополненное**, 1968.（コルモゴロク・フォーミン著（山崎三郎訳），『函数解析の基礎』，1962，は，改訂増補された1968年の第2版の前の版から飜訳である。）

[5] I. P. Natanson, *Theory of Functions of a Real Variable*, Vol. I, 1955, pp. 109-115, p. 173.

[6] C. Stein, "Unbiased estimates with minimum variance" Annals *of Mathematical Statistics*, Vol. 21, No. 3, 1950, pp. 406-415.

[7] K. Takeuchi, "On unbiased minimum variance estimators," *Annals of Mathematical Statistics*, Vol. 37, 1966, pp. 1860-1861.

[8] K. Takeuchi, "On minimum variance unbiased estimators," *The Economic Review*, Vol. 18, No. 1, 1967, pp. 89-99.

[9] 竹内 清,「最適推定の問題 —— minimum variance unbiased estimators について——」,『商学討究』, 第18巻, 第2号, 1967, pp. 1-13.

[10] 竹内 清,「最小分散不偏推定量についての一考察」,『商学討究』, 第18巻, 第4号, 1968, pp. 87-96.

[11] 竹内 清,「最小分散不偏推定量について —— 線型微分作用素の応用 ——」,『商学討究』, 第19巻, 第1号, 1968, pp. 129-134.