2部門 model の均衡解の存在について*

戸島　凞

Solow [3] によって，miniature Walrasian model と名付けられた 2 部門 model については，すでに，多くのことが語りつくされているが，この小論では従来必ずしもはっきりとはいわれていなかった点を問題にしたい。2 部門 model は構造が比較的簡単なために，均衡解の存在の論証にもさしたる困難は伴わない。すなわち，通常の代入と消去の方法に加えて，2，3 の初等的な解析学の知識があれば，2 部門 model に均衡解が存在することを容易に証明することができる。これが 2 部門 model が愛用せられた理由のひとつでもあるが，実はこの容易さが原因となって，均衡解存在問題に関する従来の成果が 2 部門 model とどの様に関連するかということが余り問題にされなかったのではないかと考えられる。

さて，2 部門 model とは次に示されるものである。

(1) $Y_i=F_i(K_i,\ L_i)$,

(2) $P_i\dfrac{\partial F_i}{\partial K_i}=r,\ P_i\dfrac{\partial F_i}{\partial L_i}=w,$ $\quad(i=1,\ 2)$,

(3) $K_1+K_2=K,\ L_1+L_2=L,$

(4) $Y_i=G_i(P_1,\ P_2,\ r,\ w),\quad (i=1,\ 2).$

ここで，Y_i は第 i 部門の産出量，F_i は第 i 部門の生産関数，P_i は第 i 部門の産出物の価格，K_i, L_i はそれぞれ第 i 部門の資本量，労働量，G_i は第 i 部門の産出物に対する需要関数，r, w はそれぞれ資本と労働に対する return，K, L はそれぞれ利用可能な資本量，労働量を示す。この model では，K, L は所与であり，かつ，$K>0$, $L>0$ とする。生産関数 F_i について

(5) F_i は 1 次同次である。

(6) F_i は連続 2 回微分可能である。

(7) F_i は concave で，各 argument に関して増加関数で，かつ

* 原稿受領　1970年7月15日

$F_i(0, 0)=0,$

$F_i(K_i, L_i)>0$ if and only if $K_i>0, L_i>0$ である。

と仮定する。(7)により各 argument に関する限界生産力は正で，かつ逓減的となる。

需要関数 G_i については多少議論が必要であろう。まず，従来 G_i が具体的にどんな形で考えられてきたかを例示しよう。Uzawa [4] は最初に G_i として次の形のものを採用した。

$$(8)\quad G_1(P_1, P_2, r, w)\equiv\frac{r}{P_1}K,\ G_2(P_1, P_2, r, w)\equiv\frac{w}{P_2}L.$$

以下では，第1部門は投資財部門，第2部門は消費財部門と考えることにしよう。そうすると，(8)は周知の「労働者は貯蓄せず，資本家は消費しない」という貯蓄行動を反映するものである。その後，Uzawa [5] は

$$(9)\quad \begin{aligned} G_1(P_1, P_2, r, w)&\equiv s\left(\frac{r}{P_1}K+\frac{w}{P_1}L\right),\\ G_2(P_1, P_2, r, w)&\equiv (1-s)\left(\frac{r}{P_2}K+\frac{w}{P_2}L\right)\end{aligned}$$

という需要関数を考えた。s は経済全体の貯蓄率である。これは Keynes 的な貯蓄関数を前提するものであることはあきらかであろう。以上の他に

$$(10)\quad \begin{aligned} G_1(P_1, P_2, r, w)&\equiv s_r\frac{r}{P_1}K+s_w\frac{w}{P_1}L,\\ G_2(P_1, P_2, r, w)&\equiv (1-s_r)\frac{r}{P_2}K+(1-s_w)\frac{w}{P_2}L\end{aligned}$$

という需要関数も考えられた（例えば，Solow [3]，Inada [1]）。ここで，s_r は資本家の貯蓄率，s_w は労働者の貯蓄率である。(8)，(9)，(10)の3つに共通な特徴は，第1に G_i が0次同次になっていること，第2に Walras 法則をみたしていること，すなわち，(8)，(9)，(10)のいずれについても，正の P_1, P_2, r, w に対して

$$P_1G_1+P_2G_2=rK+wL$$

という関係が恒等的になり立っていることである。そこで，以下では G_i の形は特定しないで，G_i は一般的に次の性質をみたすものと考えることにしよう。

(11) G_i は $P_1+P_2+r+w>0$ となる非負の P_1, P_2, r, w に対して定義された正値の連続な0次同次関数である。

(12) G_i は正の P_1, P_2, r, w に対して Walras 法則をみたす。

このように，われわれの2部門 model (1)，(2)，(3)，(4)は需要関数をやや一般化して考えているという点で従来のものより少し一般的であるが本質的には従来のものと何ら変りがない。そこで，問題はこの model に均衡解が存在するか，どうかである。需要関数を一般的に考えているために，通常なされている様に，(1)，(2)，(3)，(4)から per capita の term で表現された model を導いて，代入と消去をくりかえして行くのは必ずしも得策ではないし，又，見通しのよい方法ともいえない。

ここで，かつて Kuhn [2] が Wald の定式化した Cassel 体系の model の均衡解の存在を，linear programming の technique を用いてきわめて明快に証明したことを想い起すべきであろう。実は2部門 model を Cassel-Wald model の neo-classical version と解することができるのである。いま，Cassel-Wald model を2部門，すなわち，2財2要素の場合についてかき下すならば以下の様になる。

(13)
$$a_{11}Y_1+a_{12}Y_2\leqq K,$$
$$a_{21}Y_1+a_{22}Y_2\leqq L,$$

(14)
$$a_{11}r+a_{21}w=P_1,$$
$$a_{12}r+a_{22}w=P_2,$$

(15)
$$r\{K-(a_{11}Y_1+a_{12}Y_2)\}=0,$$
$$w\{L-(a_{21}Y_1+a_{22}Y_2)\}=0,$$

(16)
$$P_1=H_1(Y_1,\ Y_2),$$
$$P_2=H_2(Y_1,\ Y_2).$$

(3)と(13)は対応する。F_i の1次同次性から

$$F_i=\frac{\partial F_i}{\partial K_i}K_i+\frac{\partial F_i}{\partial L_i}L_i$$

がなり立つから，これと(2)を併せ考えると

(17)
$$\frac{K_i}{F_i}r+\frac{L_i}{F_i}w=P_i,\quad (i=1,\ 2)$$

となる。(17)が(14)と対応するものであることは見易い。(4)はいうまでもなく(16)と対応する。(1)は生産関数であるから，固定生産係数を前提する Cassel-Wald model には対応物がないのは当然であろう。従って，2部門 model を miniature Walrasian model というよりは miniature neo-classical Casselian model とよんだ方が model の性格をより適切に表現することになると思われる。それはともかくとして，この様な

対応関係による類似によって，Kuhn の方法がわれわれの 2 部門 model (1), (2), (3), (4) の均衡解の存在証明に採用されえないであろうか。以下，この線に沿った考察を進めてみよう。

ところで，Cassel-Wald model は生産構造に関しては linear system であるから，Kuhn は linear programming の technique を使ったわけであるが，2 部門 model の生産構造は一般的に non-linear な生産関数によって表わされているから，われわれは non-linear programming の technique を使うことにならざるをえないであろう。そこで，まず，次の様な最大値問題 (M) を考えよう。

$$\max\ P_1Y_1+P_2Y_2$$

subject to

$$\text{(M)}\quad \begin{aligned} &F_1(K_1,\ L_1)-Y_1\geqq 0,\\ &F_2(K_2,\ L_2)-Y_2\geqq 0,\\ &K-(K_1+K_2)\geqq 0,\\ &L-(L_1+L_2)\geqq 0,\\ &Y_1,\ Y_2,\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2\geqq 0. \end{aligned}$$

ここで，P_1, P_2 は所与であり，かつ $P_1+P_2>0$ がなり立ち非負であるとする。仮定により，$K>0$, $L>0$, かつ，$K_i>0$, $L_i>0$ ならば $F_i(K_i,\ L\ )>0$ であるから，適当な $Y_i\geqq 0$, $K_i>0$, $L_i>0$, $(i=1,\ 2)$ をえらんで

$$\begin{aligned} &F_1(K_1,\ L_1)-Y_1>0,\\ &F_2(K_2,\ L_2)-Y_2>0,\\ &K-(K_1+K_2)>0,\\ &L-(L_1+L_2)>0 \end{aligned}$$

とすることができる。よって，問題 (M) の拘束条件は Slater の条件（例えば，戸島 [7] をみよ）をみたす。また，Y_i, K_i, L_i が問題 (M) の拘束条件をみたせば

$$0\leqq Y_i\leqq F_i(K,\ L),$$

$$0\leqq K_i\leqq K,\quad 0\leqq L_i\leqq L$$

がなり立つから，問題 (M) の feasible solution の set は有界である。他方，feasible solution の set が closed であることはあきらかであるから，結局，問題 (M) の feasible solution の set は compact である。ゆえに，問題 (M) には解が存在する。上で示した様に，問題 (M) の拘束条件は Slater の条件をみたしているから，問題 (M)

が解をもつ必要かつ十分条件は問題 (M) からつくられる Lagrangean form が非負の saddle point をもつことである（戸島 [7] をみよ)。そこで

$$\phi(Y_1, Y_2, K_1, K_2, L_1, L_2; Q_1, Q_2, r, w) \equiv P_1Y_1+P_2Y_2+Q_1[F_1(K_1, L\ )-Y_1]$$
$$+Q_2[F_2(K_2,\ L_2)-Y_2]+r[K-(K_1+K_2)]+w[L-(L_1+L_2)]$$

という関数は非負の saddle point をもつ。ここで，Q_1, Q_2, r, w は Lagrange 乗数である。ϕ は concave function になるから，ϕ が非負の saddle point をもつ必要かつ十分条件は次の式がなり立つことである。

$$\text{(17)}\quad \begin{aligned} &\phi_{Y_1}=P_1-Q_1\leqq 0,\\ &\phi_{Y_2}=P_2-Q_2\leqq 0,\\ &\phi_{K_1}=Q_1\frac{\partial F_1}{\partial K_1}-r\leqq 0,\\ &\phi_{K_2}=Q_2\frac{\partial F_2}{\partial K_2}-r\leqq 0,\\ &\phi_{L_1}=Q_1\frac{\partial F_1}{\partial L_1}-w\leqq 0,\\ &\phi_{L_2}=Q_2\frac{\partial F_2}{\partial L_2}-w\leqq 0, \end{aligned}$$

$$\text{(18)}\quad \begin{aligned} &\phi_{Q_1}=F_1-Y_1\geqq 0,\\ &\phi_{Q_2}=F_2-Y_2\geqq 0,\\ &\phi_{r}=K-(K_1+K_2)\geqq 0,\\ &\phi_{w}=L-(L_1+L_2)\geqq 0, \end{aligned}$$

$$\text{(19)}\quad \begin{aligned} &Y_1(P_1-Q_1)=0,\\ &Y_2(P_2-Q_2)=0,\\ &K_1\left(Q_1\frac{\partial F_1}{\partial K_1}-r\right)=0,\\ &K_2\left(Q_2\frac{\partial F_2}{\partial K_2}-r\right)=0,\\ &L_1\left(Q_1\frac{\partial F_1}{\partial L_1}-w\right)=0,\\ &L_2\left(Q_2\frac{\partial F_2}{\partial L_2}-w\right)=0, \end{aligned}$$

$Q_1(F_1-Y_1)=0,$

$Q_2(F_2-Y_2)=0,$

$r(K-K_1-K_2)=0,$

$w(L-L_1-L_2)=0.$

ここで，次の様な最小値問題（m′）を考えてみよう。

$$\min \Psi(Y_1, Y_2, K_1, K_2, L_1, L_2; Q_1, Q_2, r, w) \equiv \phi - Y_1(P_1-Q_1) - Y_2(P_2-Q_2)$$
$$-K_1\left(Q_1\frac{\partial F_1}{\partial K_1}-r\right)-K_2\left(Q_2\frac{\partial F_2}{\partial K_2}-r\right)-L_1\left(Q_1\frac{\partial F_1}{\partial L_1}-w\right)-L_2\left(Q_2\frac{\partial F_2}{\partial L_2}-w\right)$$

subject to

(m′)
$$P_1-Q_1\leqq 0,$$
$$P_2-Q_2\leqq 0,$$
$$Q_1\frac{\partial F_1}{\partial K_1}-r\leqq 0,$$
$$Q_2\frac{\partial F_2}{\partial K_2}-r\leqq 0,$$
$$Q_1\frac{\partial F_1}{\partial L_1}-w\leqq 0,$$
$$Q_2\frac{\partial F_2}{\partial L_2}-w\leqq 0,$$
$$Y_1,\ Y_2,\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2,\ Q_1,\ Q_2,\ r,\ w\geqq 0.$$

いま，問題 (m′) に feasible solution が存在するものとし，その任意の feasible solution を $\hat{Y}_1$, $\hat{Y}_2$, $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$, $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$, $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2$, $\hat{r}$, $\hat{w}$ とする。また，問題 (M) の任意の feasible solution を $\bar{Y}_1$, $\bar{Y}_2$, $\bar{K}_1$, $\bar{K}_2$ とする。そうすると

$$P_1\bar{Y}_1+P_2\bar{Y}_2-\Psi(\hat{Y}_1,\ \hat{Y}_2,\ \hat{K}_1,\ \hat{K}_2,\ \hat{L}_1,\ \hat{L}_2;\ \hat{Q}_1,\ \hat{Q}_2,\ \hat{r},\ \hat{w})$$
$$=P_1\bar{Y}_1+P_2\bar{Y}_2-(P_1\hat{Y}_1+P_2\hat{Y}_2)-(P_1\bar{Y}_1+P_2\bar{Y}_2)+(P_1\hat{Y}_1+P_2\hat{Y}_2)$$
$$-\hat{Q}_1[(\hat{F}_1-\hat{Y}_1)-(\bar{F}_1-\bar{Y}_1)-(\hat{K}_1-\bar{K}_1)\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial K_1}-(\hat{L}_1-\bar{L}_1)\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial L_1}+(\hat{Y}_1-\bar{Y}_1)]$$
$$-\hat{Q}_2[(\hat{F}_2-\hat{Y}_2)-(\bar{F}_2-\bar{Y}_2)-(\hat{K}_2-\bar{K}_2)\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial K_2}-(\hat{L}_2-\bar{L}_2)\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial L_2}+(\hat{Y}_2-\bar{Y}_2)]$$
$$-\hat{r}[K-(\hat{K}_1+\hat{K}_2)-\{K-(\bar{K}_1+\bar{K}_2)\}+(\hat{K}_1+\hat{K}_2)-(\bar{K}_1+\bar{K}_2)]$$
$$-\hat{w}[L-(\hat{L}_1+\hat{L}_2)-\{L-(\bar{L}_1+\bar{L}_2)\}+(\hat{L}_1+\hat{L}_2)-(\bar{L}_1+\bar{L}_2)]$$
$$-\hat{Q}_1(\bar{F}_1-\bar{Y}_1)-\hat{Q}_2(\bar{F}_2-\bar{Y}_2)-\hat{r}\{K-(\bar{K}_1+\bar{K}_2)\}-\hat{w}\{L-(\bar{L}_1+\bar{L}_2)\}$$

$$+\bar{Y}_1(P_1-\hat{Q}_1)+\bar{Y}_2(P_2-\hat{Q}_2)+\bar{K}_1\left(\hat{Q}_1\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial K_1}-\hat{r}\right)+\bar{K}_2\left(\hat{Q}_2\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial K_2}-\hat{r}\right)$$

$$+\bar{L}_1\left(\hat{Q}_1\frac{\partial\hat{F}_1}{\partial L_1}-\hat{w}\right)+\bar{L}_2\left(\hat{Q}_2\frac{\partial\hat{F}_2}{\partial L_2}-\hat{w}\right)\leqq 0$$

となる。ここで，$\hat{F}_i=F_i(\hat{K}_i,\ \hat{L}_i)$, $\bar{F}_i=F_i(\bar{K}_i,\ \bar{L}_i)$, $\frac{\partial\hat{F}_i}{\partial K_i}=\frac{\partial F_i(\hat{K}_i,\ \hat{L}_i)}{\partial K_i}$, $\frac{\partial\bar{F}_i}{\partial L_i}=\frac{\partial F_i(\bar{K}_i,\ \bar{L}_i)}{\partial L_i}$ である。よって，一般に

(20) $P_1\bar{Y}_1+P_2\bar{Y}_2\leqq\Psi(\hat{Y}_1,\ \hat{Y}_2,\ \hat{K}_1,\ \hat{K}_2,\ \hat{L}_1,\ \hat{L}_2\,;\ \hat{Q}_1,\ \hat{Q}_2,\ \hat{r},\ \hat{w})$

がなり立つ。他方，F_i の1次同次性を考慮して，Ψ の term を cancel すれば

(21) $\Psi(Y_1,\ Y_2,\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2,\ Q_1,\ Q_2,\ r,\ w)=rK+wL$

が恒等的になり立つから，問題 (m′) は

min $rK+wL$

subject to

$P_1-Q_1\leqq 0,$

$P_2-Q_2\leqq 0,$

(m) $Q_1\frac{\partial F_1}{\partial K_1}-r\leqq 0,$

$Q_2\frac{\partial F_2}{\partial K_2}-r\leqq 0,$

$Q_1\frac{\partial F_1}{\partial L_1}-w\leqq 0,$

$Q_2\frac{\partial F_2}{\partial L_2}-w\leqq 0,$

$K_1,\ K_2,\ L\ ,\ L_2,\ Q_1,\ Q_2,\ r,\ w\geqq 0$

という問題 (m) にかきかえることができる。

問題 (M) と (m) は次の様な関連をもつ。問題 (M) が解 Y_1^*, Y_2^*, K_1^*, K_2^*, L_1^*, L_2^* をもてば，ある Lagrange 乗数 Q_1^*, Q_2^*, r^*, w^* が存在して，$(Y_1^*,\ Y_2^*,\ K_1^*,\ K_2^*,\ L_1^*,\ L_2^*,\ Q_1^*,\ Q_2^*,\ r^*,\ w^*)$ は $\phi(Y_1,\ Y_2,\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2\,;\ Q_1,\ Q_2,\ r,\ w)$ の非負の saddle point となる。よって，(17), (18), (19) がなり立つ。(17) は問題 (m) の拘束条件と同じものであるから，まず，これで，問題 (M) が解をもてば，問題 (m) は feasible solution をもつことがいえた。さらに，(19) により

$$\Psi(Y_1^*,\ Y_2^*,\ K_1^*,\ K_2^*,\ L_1^*,\ L_2^*\,;\ Q_1^*,\ Q_2^*,\ r^*,\ w^*)=P_1Y_1^*+P_2Y_2^*$$

がなり立つ。左辺は問題 (M) の解，従って，feasible solution であるから，(20)を考えれば，問題 (m') の任意の feasible solution ($\hat{Y}_1$, $\hat{Y}_2$, $\hat{K}_1$, $\hat{K}_2$, $\hat{L}_1$, $\hat{L}_2$, $\hat{Q}_1$, $\hat{Q}_2$, $\hat{r}$, $\hat{w}$) に対して

$$\Psi(Y_1^*, Y_2^*, K_1^*, K_2^*, L_1^*, L_2^*; Q_1^*, Q_2^*, r^*, w^*) \leqq \Psi(\hat{Y}_1, \hat{Y}_2, \hat{K}_1, \hat{K}_2, \hat{L}_1, \hat{L}_2; \hat{Q}_1, \hat{Q}_2, \hat{r}, \hat{w})$$

がなり立つことがわかる。すなわち，Y_1^*, Y_2^*, K_1^*, K_2^*, L_1^*, L_2^*, Q_1^*, Q_2^*, r^*, w^* は問題 (m') の解である。従って，K_1^*, K_2^*, L_1^*, L_2^*, Q_1^*, Q_2^*, r^*, w^* は問題 (m) の解である。最後に，(21)により

$$P_1Y_1^*+P_2Y_2^*=r^*K+w^*L$$

がえられる。これで，問題 (M) が解をもてば，問題 (m) もまた解をもち，さらに，最大値と最小値が等しくなることがわかった。そこで，以上をまとめれば

$$
\begin{aligned}
&F_1(K_1^*, L_1^*)-Y_1^*\geqq 0,\\
&F_2(K_2^*, L_2^*)-Y_2^*\geqq 0,\\
&K-(K_1^*+K_2^*)\geqq 0,\\
&L-(L_1^*+L_2^*)\geqq 0,\\
&P_1-Q_1^*\leqq 0,\\
(22)\quad &P_2-Q_2^*\leqq 0,\\
&Q_1^*\frac{\partial F_1^*}{\partial K_1}-r^*\leqq 0,\\
&Q_2^*\frac{\partial F_2^*}{\partial K_2}-r^*\leqq 0,\\
&Q_1^*\frac{\partial F_1^*}{\partial L_1}-w^*\leqq 0,\\
&Q_2^*\frac{\partial F_2^*}{\partial L_2}-w^*\leqq 0,\\
&P_1Y_1^*+P_2Y_2^*=r^*K+w^*L
\end{aligned}
$$

となる非負の Y_1^*, Y_2^*, K_1^*, K_2^*, L_1^*, L_2^*, Q_1^*, Q_2^*, r^*, w_* が存在するということになる。ここで，$\dfrac{\partial F_i^*}{\partial K_i}=\dfrac{\partial F_i(Ki^*, L_i^*)}{\partial K_i}$，$\dfrac{\partial F_i^*}{\partial L_i}=\dfrac{\partial F_i(K_i^*, L_i^*)}{\partial L_i}$ である。(22)の最後の式を除いた残りの式は，さらに

$$
\begin{aligned}
(23)\quad &Y_i^*\leqq F_i(K_i^*, L_i^*), \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad (i=1, 2),\\
(24)\quad &P_i\frac{\partial F_i^*}{\partial K_i}\leqq r^*,\quad P_i\frac{\partial F_i^*}{\partial L_i}\leqq w^*,
\end{aligned}
$$

(25) $K_1{}^*+K_2{}^*\leqq K,\ L_1{}^*+L_2{}^*\leqq L$

とかきかえることができる。ところで，仮定により，$P_i\geqq 0$ かつ $P_1+P_2>0$ であるから，$P_1=P_2=0$ となることはない。従って，$P_1>0$ または $P_2>0$ でなければならないが，一般性を失うことなく，$P_1>0$ としてもよい。そうすると，問題 (M) では

(26) $Y_1{}^*=F_1(K_1{}^*,\ L_1{}^*)>0$

がなり立たなければならない。なぜなら，もし，(26)がなり立っていなければ，(26)をなり立たせる様に $Y_1{}^*$ の値を増加させれば，目的関数の値を，拘束条件を破ることなしに増加させることができるから，$P_1Y_1{}^*+P_2Y_2{}^*$ が最大値ということに矛盾するからである。同様な論法により，$K_1{}^*+K_2{}^*=K,\ L_1{}^*+L_2{}^*=L$ でなければならない。また，$P_2=0$ ならば

$$K_1{}^*=K,\ L_1{}^*=L$$

とならなければならないことも容易にわかる。この時は当然

$$Y_2{}^*=F_2(K_2{}^*,\ L_2{}^*)=F_2(0,\ 0)=0$$

である。よって，(23)と(25)は

(27) $Y_i{}^*=F_i(K_i{}^*,\ L_i{}^*),\ \ (i=1,\ 2),$

(28) $K_1{}^*+K_2{}^*=K,\ L_1{}^*+L_2=L$

となる。また，もし $Y_i{}^*>0$ ならば，$K_i{}^*,\ L_i{}^*>0$ となるから，(19)により

(29) $P_i\dfrac{\partial F_i{}^*}{\partial K_i}=r^*,\ \ P_i\dfrac{\partial F_i{}^*}{\partial L_i}=w^*,\ \ (i=1,\ 2)$

がなり立つ。よって，$Y_1{}^*,\ Y_2{}^*,\ K_1{}^*,\ K_2{}^*,\ L_1{}^*,\ L_2{}^*$ が $P_1=P_2{}^*\geqq 0,\ P_2=P_2{}^*\geqq 0$（ただし，$P_1{}^*+P_2{}^*>0$）とおいた時の問題 (M) の解であると共に，$Q_1{}^*,\ Q_2{}^*,\ r^*,\ w^*$ がそれらに associate した Lagrange 乗数であり，かつ $Y_1{}^*>0,\ Y_2{}^*>0$ がなり立ち，さらに

(30) $Y_i{}^*=G_i(P_1{}^*,\ P_2{}^*,\ r^*,\ w^*),\ \ (i=1,\ 2)$

であれば，$P_1{}^*,\ P_2{}^*,\ Y_1{}^*,\ Y_2{}^*,\ K_1{}^*,\ K_2{}^*,\ L_1{}^*,\ L_2{}^*,\ r^*,\ w^*$ は 2 部門 model (1), (2), (3), (4) の均衡解である。

そこで，適当に $P_1{}^*,\ P_2{}^*$ をえらんだ時に，$Y_1{}^*>0,\ Y_2{}^*>0$ と(30)がなり立つかどうかを検討することが残された問題である。均衡解の存在問題に対してすでに確立された technique となっている不動点定理の適用がなされるのはこの文脈においてである。以下，証明の概略をのべよう。まず，G_i は 0 次同次であるから，通例に従って，われわ

れは

$$S=\{(P_1,\ P_2,\ r,\ w)\geqq 0 \mid P_1+P_2+r+w=1\}$$

という simplex に議論を限ることができる。G_i に関する仮定によって，simplex の任意の点の G_i の値は正である。ここで，次の様な集合を考えよう。

$$Y=\{(Y_1,\ Y_2) \mid (Y_1,\ Y_2,\ K_1,\ K_2,\ L_1,\ L_2)\ \text{は問題 (M) の feasible solution}\}.$$

集合 Y の東北方の boundary は2財の production-possibility frontier，すなわち，転形曲線である。F_i の性質から，この frontier は concave の減少関数でかつ微分可能である（例えば，戸島［6］をみよ)。よって，frontier の内点には unique な限界転形率が対応する。いま，S の任意の点の G_i の値の比 $\dfrac{G_2}{G_1}$ を考え，frontier の上の点 $(Y_1,\ Y_2)$ を，$\dfrac{Y_2}{Y_1}=\dfrac{G_2}{G_1}$ となる様にえらぶ。こうしてえらばれた $(Y_1,\ Y_2)$ はいうまでもなく unique で，かつ，$G_i>0$ であるから $Y_i>0$ である。次に，frontier 上の点 $(Y_1,\ Y_2)$ に対応する限界転形率に等しくなる様に $\dfrac{P_1}{P_2}$ をえらぶ。$(Y_1,\ Y_2)$ は frontier の内点であるから，あきらかに $P_i>0$ である。この P_i を問題 (m) に使って問題 (m) の解を求める。Y_i のえらび方により，Y_i は P_i に対応する問題 (M) の解になっているから，問題 (m) にも必らず解が存在する。$P_i>0$ であるから，その解の $r,\ w$ 成分は，$r>0,\ w>0$ であり，かつ unique である。このようにしてえられた $(P_1,\ P_2,\ r,\ w)$ を正規化すれば，これは S に属する。以上で，S の任意の点を S の点に対応させる写像 Φ がえられたことになる。この写像 Φ は連続である。よって，Brouwer の不動点定理により

$$x^*=\Phi(x^*),\ x^*\in S$$

となる x^* が存在する。写像 Φ のつくり方とすでにのべた問題 (M) と (m) の間になり立つ関連から，$x^*\equiv(P_1{}^*,\ P_2{}^*,\ r^*,\ w^*)$ とし，$Y_1{}^*,\ Y_2{}^*$ を $P_1{}^*,\ P_2{}^*$ に対応する問題 (M) の解の Y_i 成分とすれば

$$P_1{}^*Y_1{}^*+P_2{}^*Y_2{}^*=r^*K+w^*L$$

がなり立つ。一方，$P_1{}^*,\ P_2{}^*,\ r^*,\ w^*$ が正であることに注意すれば，G_i の性質から

$$P_1{}^*G_1{}^*+P_2{}^*G_2{}^*=r^*K+w^*L$$

となる。ここで，$G_i{}^*=G_i(P_1{}^*,\ P_2{}^*,\ r^*,\ w^*)$ である。従って，$\dfrac{Y_2{}^*}{Y_1{}^*}=\dfrac{G_2{}^*}{G_1{}^*}$ を考慮すれば，$Y_i{}^*=G_i{}^*$ でなければならない。$Y_i{}^*>0$ はあきらかであるから，結局，(27)，(28)，(29)，(30) がなり立つ。これで，2部門 model (1)，(2)，(3)，(4) に均衡解が存在することが

示されたことになるが，以上の議論でわかる通り，議論の筋道は Kuhn [2] の場合と全く同じである。従って，2財2要素ということが議論のうえで何ら制約とはなっていない。そこで，これを一般化して考えれば，n 財 m 要素の neo-classical Casselian model の均衡解の存在を全く同様な方法で証明することができるであろう。この小論はその様な一般的な case への prelude である。

引　用　文　献

[1] Inada, K., "On a Two-Sector Model of Economic Growth: Comments and a Generalization," *Review of Economic Studies*, Vol. XXX (2), No. 83 (June 1963), pp. 119–127.

[2] Kuhn, H.W., "On a Theorem of Wald," in H.W. Kuhn and A.W. Tucker (eds.) *Linear Inequalities and Related Systems*, Annals of Mathematics Studies, No. 38, Princeton, 1956, pp. 265–274.

[3] Solow, R.M., "Note on Uzawa's Two-Sector Model of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, Vol. XXIX (1), No. 78 (October 1961), pp. 48–50.

[4] Uzawa, "On a Two-Sector Model of Economic Growth," *Review of Economic Studies*, Vol. XXIX (1), No. 78 (October 1961), pp. 40–47.

[5] Uzawa, H., "On a Two-Sector Model of Economic Growth II," *Review of Economic Studies*, Vol. XXX (2), No. 83 (June 1963), pp. 105–118.

[6] 戸島　凞，「2部門 model の Production-Possibility Frontier について」商学討究，第19巻第2号（1968年9月），pp. 47–59.

[7] 戸島　凞，「Gale の『Kuhn-Tucker の定理』」商学討究，第20巻第2号（1969年12月），pp. 39–48.