Two-Sector Canonical Model について*

戸島　凞

この小論では Samuelson のある種の予想（のちに，**S-conjecture** とよばれる）が，戸島［3］に沿った展開によって，厳密に証明されることを示す。なお，この分析の副産物として，(1) 2 財に関する non-joint production の新しい必要条件，(2) 経済 model の数学的定式化に関するひとつの教訓，がえられる。なお，補論は本質的には戸島［3］と同じであるが，形式的展開方法がこちらの方がより一般的で，かつ見通しがよくなっている。

Samuelson［2］は two-sector model の canonical version を呈示しているが，その記述にはかなり省略があるので，以下では，それらを補うと共に，多少，記号もかえてあらわすことにしたい。いま，資本財の耐久性が無限大であると仮定すれば，産出物が homogeneous である場合，生産の技術的関係を

(1)　$\dot{K}+C=F(K,\ L)=LF\left(\dfrac{K}{L},\ 1\right)\equiv Lf(k)$

という生産関数であらわすことができる。ここで，C は消費財産出量，K は資本量，L は労働量をあらわし，$k\equiv\dfrac{K}{L}$ である。産出物が heterogeneous である時は，(1) は

(2)　$\dot{K}=F(C\ ;\ K,\ L)=LF\left(\dfrac{C}{L}\ ;\ \dfrac{K}{L},\ 1\right)=Lf(c,\ k)$

という形をとることになる。以下，(2) は joint-production を含まない two-sector model と考えて行くことにする。(2) は production-possibility frontier (P-P F) をあらわす。限界転形率で評価された P-P F 上の国民所得は

$$\dot{K}+(-F_1)C$$

である。Keynes 流の貯蓄関数を考えれば

(3)　$\dot{K}=s(\dot{K}+(-F_1)C)$

が需給均衡を示す。ここで，s は貯蓄率で一定とする。(3) をかきかえれば

* 原稿受領 1971 年 1 月 5 日

(4) $f(c,\ k)+\beta cf_c(c,\ k)=0 \quad \left(\beta=\dfrac{s}{1-s}\right)$

となる。通例によって，$f_c=\dfrac{\partial f}{\partial c}$，$f_k=\dfrac{\partial f}{\partial k}$，$f_{cc}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial c^2}$，$f_{kk}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial k^2}$，$f_{ck}=\dfrac{\partial^2 f}{\partial c\partial k}$ である。また，$f(c,\ 0)\geqq 0$，$f_c<0$，$f_k>0$，$f_{cc}<0$，$f_{kk}<0$ で，かつ，f は連続2回微分可能と仮定する。さて

$$E(c,\ k)=f(c,\ k)+\beta cf_c(c,\ k)$$

とおけば

$$(5)\quad \begin{aligned} &E(0,\ k)=f(0,\ k)>0,\\ &E(\bar{c}(k),\ k)=\beta\bar{c}(k)f_c(\bar{c}(k),\ k)<0 \end{aligned}$$

がなり立つ。ここで $\bar{c}(k)$ は

$$0=f(c,\ k)$$

の解である。$\bar{c}(k)$ が存在することは f の性質からあきらかである。(5)により，任意の $k\geqq 0$ に対して，(4)を満足する c は必ず存在する。その c を

$$c=c(k)$$

とかくことにしよう。

$$\frac{\partial E}{\partial c}=(1+\beta)f_c+\beta cf_{cc}<0$$

であるから，任意の k に対する $c(k)$ は unique である。さらに，implicit function の存在定理により，$c(k)$ は微分可能で

$$(6)\quad c'(k)=\frac{dc}{dk}=-\frac{\partial E/\partial k}{\partial E/\partial c}=-\frac{f_k+\beta cf_{ck}}{(1+\beta)f_c+\beta cf_{cc}}$$

となる。いま，capital intensity hypothesis がなり立っているとすれば，すなわち，k_c, k_i をそれぞれ消費財部門の資本集約度，投資財部門の資本集約度として，$k_c>k_i$ となっているとすれば，$f_{ck}>0$ となることは，後述の補論によって証明される。ゆえに，この時は，(6)から，$c'(k)>0$ となる。

さて，一般に，k の変化は，(2)から

$$(7)\quad \dot{k}=f(c,\ k)-nk$$

という微分方程式であらわされる。ここで，n は労働の成長率である。よって，golden-age equilibrium では

$$(8)\quad 0=f(c(k),\ k)-nk \quad \text{or} \quad \frac{f(c(k),\ k)}{k}=n$$

がなり立たなければならない。いま，(8)を満足する k が存在するものと仮定して，それを k^* とする。k^* は $\frac{f(c(k),\ k)}{k}$ が k の減少関数ならば unique である。このことの十分条件は capital intensity hypothesis がなり立つことである。実際，この時は，前述のように，$f_{ck}>0$, $c'(k)>0$ がなり立つ。ところで，ここで，Samuelson は「$\frac{f(c,\ k)}{k}$ は c が一定に保たれているならば，k と共に減少するから，k と共に c が増加するなら，これは一層減少する」([2, p. 221]) と述べて証明にかえている。以下，この Samuelson の命題を **S-conjecture** とよぶことにしよう。**S-conjecture** の前段の部分は

$$\frac{\partial\left(\frac{f(c,\ k)}{k}\right)}{\partial k}=\frac{f_k k-f}{k^2}<0$$

となることを言っている。これは容易に証明することができる。すなわち，仮定により，$f(c,\ 0)\geqq 0$, かつ，$f_{kk}<0$ であるから，ある $0<\theta<1$ に対して

$$f(c,\ k)=f(c,\ 0)+f_k(c,\ \theta k)k\geqq f_k(c,\ \theta k)k>f_k(c,\ k)k \tag{9}$$

がなり立つことからあきらかである。ここで注意しなければならないのは，(9)は c を固定した時にのみなり立つ関係であって，c を k の関数と考えた時には，もはや(9)はなり立つとは限らないということである。さて，**S-conjecture** の後段の部分は

$$\frac{d(f(c(k),\ k))}{dk}=\frac{(f_k+c'f(k))k-f}{k^2}=-\frac{(f-f_k k)-c'f_c k}{k^2} \tag{10}$$

の符号を問題としている。まず，$-c'f_c k>0$ は仮定と capital intensity hypothesis からあきらかである。つぎに，$f-f_k k>0$ が(9)からなり立つという推論をすすめたいところであるが，上述の注意に従って，この場合は c は固定されていないから，(9)は必ずしもなり立たない。しかし，**S-conjecture** の後段の部分は前段を根拠にしているのであるから，あきらかに，この誤った推論を適用して(10)の符号が負になるものと結論しているように思われる。ここでは，正しくは，(6)を使って

$$\frac{d\left(\frac{f(c(k),\ k)}{k}\right)}{dk}=-\frac{(f-f_k k)-c'f_c k}{k^2}$$

$$=\frac{\beta}{k^2}\cdot\frac{1}{(1+\beta)f_c+\beta c f_{cc}}\{f_c(f_c c+f_k k-f)+(f_{cc}f_k-f_{ck}f_c)ck-ff_{cc}c\}$$

を導かなければならないのである。ここで，後述の補論によって証明されるように

$$f_{cc}f_k - f_{ck}f_c > 0 \quad \text{if and only if} \quad f_{ck} > 0$$

がなり立つから，(10)の符号は負となる。この結果は，戸島・若林［4］の lemma 9 で $s_w = s_r = s$ とおいた場合に相当しているが，戸島・若林は

(12)　$C = F(\dot{K};\ K,\ L)$

という P-P F から出発したのに対して，Samuelson の P-P F は(2)の形をとっている。(2)と(12)の違いは左辺を $\dot{K}$ としているか又は C にしているかという単なる形式上の相違ばかりではない。なぜなら，lemma 9 の結果は two-sector model を必ずしも前提にしていない（すなわち，joint-production を含んでもよい）が，(10)の符号が負になることを導くには two-sector model を前提にしなければならないからである。そこで，このことの教訓は，経済 model としての implication が同じ model がいくつかある時に，どの formulation をとるかによって結論の一般性にかなりの違いがでてくる可能性があるということであろう。

補論　2部門 model の P-P F について

経済は heterogeneous な財を生産する 2 つの部門（これを x 財部門と y 財部門とよぶ）からなると考え，おのおの

$$(\text{補-}1)\quad \begin{aligned} X &= G_X(K_X,\ L_X), \\ Y &= G_Y(K_Y,\ L_Y) \end{aligned}$$

という生産関数に従って生産が行なわれるものとする。ここで

X ………… x 財部門の産出量，

Y ………… y 財部門の産出量，

$K_X,\ L_X$ …… x 財部門の資本量と労働量，

$K_Y,\ L_Y$ …… y 財部門の資本量と労働量

である。また，G_X，G_Y はつぎの条件をみたすものとする。

$$(\text{補-}2)\quad \begin{aligned} G_X(\lambda K_X,\ \lambda L_X) &= \lambda G_X(K_X,\ L_X), \\ G_Y(\lambda K_Y,\ \lambda L_Y) &= \lambda G_Y(K_Y,\ L_Y), \end{aligned} \quad \text{for all} \quad \lambda > 0$$

$$(\text{補-}3)\quad \begin{aligned} &\frac{\partial G_X}{\partial K_X} > 0, \quad \frac{\partial G_Y}{\partial K_Y} > 0, \\ &\frac{\partial^2 G_X}{\partial K_X^2} < 0, \quad \frac{\partial^2 G_Y}{\partial K_Y^2} < 0. \end{aligned}$$

資本と労働は非弾力的に供給されるものとし，かつ，それらの存在量はそれぞれ K, L であり，さらに，完全雇傭が前提されるとすれば

(補- 4)　$K_X+K_Y=K;\ L_X+L_Y=L$

である。いま

$$k=\frac{K}{L},\ k_x=\frac{K_X}{L},\ k_y=\frac{K_Y}{L},\ g_x(k_x)=G_X\left(\frac{K_X}{L_X},\ 1\right),$$

$$g_y(k_y)=G_Y\left(\frac{K_Y}{L_Y},\ 1\right),\ l_x=\frac{L_X}{L},\ l_y=\frac{L_Y}{L},\ x=\frac{X}{L},\ y=\frac{Y}{L}$$

とおけば，(補-2) によって，(補-1)，(補-3)，(補-4) はそれぞれつぎのようにかきかえることができる。

(補- 5)
$$x=g_x(k_x),$$
$$y=g_y(k_y),$$

(補- 6)
$$g_x'(k_x)>0,\ g_y'(k_y)>0,$$
$$g_x''(k_x)<0,\ g_y''(k_y)<0,$$

(補- 7)　$l_xk_x+l_yk_y=k,\ \ l_x+l_y=1.$

ここで，(補-5)，(補-7) および

(補- 8)　$k_x,\ k_y,\ l_x,\ l_y\geqq 0$

を拘束条件として，y を最大にすることを考えてみよう。すなわち

(補- 9)
$$\max\ y$$
$$\text{s. t.}$$
$$l_yg_y(k_y)=y,$$
$$l_xg_x(k_x)=x,$$
$$l_yk_y+l_xk_x=k,$$
$$l_x+l_y=1,$$
$$y,\ k_x,\ k_y,\ l_x,\ l_y\geqq 0$$

という最大値問題を考える。ただし，この問題で，x と k は所与とする。(補-5)，(補-7)，(補-8) をみたす $(y,\ k_x,\ k_y,\ l_x,\ l_y)$ の集合は有界で，非負の x, k に対して閉になるから，y に最大値が存在することはあきらかである。以下，簡単化のために corner maximum が起らないと仮定しよう。よって，最大値の必要条件から

$$L(y,\ k_x,\ k_y,\ l_x,\ l_y\ ;\ p_1,\ p_2,\ p_3,\ p_4)=y+p_1(l_yg_y-y)$$
$$+p_2(l_xg_x-x)+p_3(k-l_xk_x-l_yk_y)+p_4(1-l_x-l_y)$$

という Lagrangean form の1次偏導関数がすべて0になる，すなわち

（補-10）　$$\frac{\partial L}{\partial y}=\frac{\partial L}{\partial k_x}=\frac{\partial L}{\partial k_y}=\frac{\partial L}{\partial l_x}=\frac{\partial L}{\partial l_y}=\frac{\partial L}{\partial p_1}=\frac{\partial L}{\partial p_2}=\frac{\partial L}{\partial p_3}=\frac{\partial L}{\partial p_4}=0$$

がなり立つある（$y, k_x, k_y, l_x, l_y, p_1, p_2, p_3, p_4$）が存在する。（補-10）を実際に計算して適当にかきかえれば，

（補-11）　$F_i(y, k_x, k_y, l_x, l_y; x, k)=0 \quad (i=1, 2, 3, 4, 5)$

となる。ただし

$$F_1=y-l_y g_y(k_y),$$

$$F_2=x-l_x g_x(k_x),$$

$$F_3=k-l_x k_x-l_y k_y,$$

$$F_4=1-l_x-l_y,$$

$$F_5=\frac{g_y(k_y)}{g_y'(k_y)}-k_y-\left(\frac{g_x(k_x)}{g_x'(k_x)}-k\right)$$

である。（補-11）の Jacobian J は

$$J=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -l_y g_y' & 0 & -l_y & 0 & A \\ 0 & -l_x g_x' & -l_x & 0 & B \\ -g_y & 0 & -k_y & -1 & 0 \\ 0 & -g_x & -k_x & -1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$=-\frac{l_x(g_x')^3 g_y^2 g_y''+l_y(g_y')^3 g_x^2 g_x''}{(g_y')\,(g_x)^2}>0$$

となる。ここで

$$A=-\frac{g_y g_y''}{(g_y')^2},\quad B=\frac{g_x g_x''}{(g_x)^2}$$

である。そこで，implicit function の存在定理により，（補-11）を満足する

（補-12）　$y=f(x, k)$

（補-13）　$k_x=k_x(x, k),\ k_y=k_y(x, k),$

（補-14）　$l_x=l_x(x, k),\ l_y=l_y(x, k)$

という5個の連続関数が存在する。しかも，これらは微分可能で

（補-15）
$$\frac{\partial F_j}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial k_x}\frac{\partial k_x}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial l_x}\frac{\partial l_x}{\partial x}+\frac{\partial F_j}{\partial l_y}\frac{\partial l_y}{\partial x}=0,$$
$$\frac{\partial F_j}{\partial k}+\frac{\partial F_k}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial k}+\frac{\partial F_j}{\partial k_x}\frac{\partial k_x}{\partial k}+\frac{\partial F_j}{\partial k_y}\frac{\partial k_y}{\partial k}+\frac{\partial F_j}{\partial l_x}\frac{\partial l_x}{\partial k}+\frac{\partial F_j}{\partial l_y}\frac{\partial l_y}{\partial k}=0$$

$(j=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$

がなり立つ。$y=\text{constant}$ とすれば，(補-15) から

$$
(\text{補-16})\quad
\begin{pmatrix} g_y & 0 & l_y g_y' & 0 \\ k_y & k_x & l_y & l_x \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \dfrac{dl_y}{dk} \\ \dfrac{dl_x}{dk} \\ \dfrac{dk_y}{dk} \\ \dfrac{dk_x}{dk} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},
$$

or $D\,x=a$

となる。同様に，$x=\text{constant}$ とすれば

$$
(\text{補-17})\quad
\begin{pmatrix} 0 & g_x & 0 & l_x g_x' \\ k_y & k_x & l_y & l_x \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \dfrac{dl_y}{dk} \\ \dfrac{dl_x}{dk} \\ \dfrac{dk_y}{dk} \\ \dfrac{dk_x}{dk} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

or $D_2 x=a$

となる。また，$k=\text{constant}$ とすれば

$$
(\text{補-18})\quad
\begin{pmatrix} 0 & g_x & 0 & l_x g_x' \\ k_y & k_x & l_y & l_x \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -A & -B \end{pmatrix}
\begin{pmatrix} \dfrac{dl_y}{dx} \\ \dfrac{dl_x}{dx} \\ \dfrac{dk_y}{dx} \\ \dfrac{dk_x}{dx} \end{pmatrix}
=
\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

or $D_2 y=b$

がえられる。容易にたしかめられるように

$$
\det\ D_1=\frac{l_y(g_y')^3 g_x{}^2 g_x''+l_x(g_x')^3 g_y{}^2 g_y''}{(g_x')^3(g_y')^2}<0,
$$

$$
\det\ D_2=-\frac{l_y(g_y')^3 g_x{}^2 g_x''+l_x(g_x')^3 g_y{}^2 g_y''}{(g_y')^3(g_x')^2}>0
$$

であるから，D_1, D_2 は non-singular である。よって，D_1^{-1}, D_2^{-1} が存在する。そこ

で，y=constant の時は

(補-19)　$x=D_1^{-1}a,$

x=constant の時は

(補-20)　$y=D_2^{-1}a,$

k=constant の時は

(補-21)　$y=D_2^{-1}b$

がえられる。いま，(補-19)，(補-20)，(補-21) を実際に計算すれば，つぎの結果をうる。まず，y=constant の時は

$$(補\text{-}22)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{dl_y}{dk} \\[2ex] \dfrac{dl_x}{dk} \\[2ex] \dfrac{dk_y}{dk} \\[2ex] \dfrac{dk_x}{dk} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} -l_y(g_y')^3 g_x g_x' g_x'' \\[2ex] l_y(g_y')^3 g_x g_x' g_x'' \\[2ex] (g_y')^2 g_x g_x' g_x'' g_y \\[2ex] (g_x')^3 g_y^2 g_y'' \end{pmatrix},$$

x=constant の時は

$$(補\text{-}23)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{dl_y}{dk} \\[2ex] \dfrac{dl_x}{dk} \\[2ex] \dfrac{dk_y}{dk} \\[2ex] \dfrac{dk_x}{dk} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} l_x(g_x)^3 g_y g_y' g_y'' \\[2ex] -l_x(g_x)^3 g_y g_y' g_y'' \\[2ex] (g_y)^3 g_x^2 g_x'' \\[2ex] (g_x) g_y g_y' g_y'' g_x \end{pmatrix},$$

k=constant の時は

$$(補\text{-}24)\quad \begin{pmatrix} \dfrac{dl_y}{dx} \\[2ex] \dfrac{dl_x}{dx} \\[2ex] \dfrac{dk_y}{dx} \\[2ex] \dfrac{dk_x}{dx} \end{pmatrix} = Q \begin{pmatrix} -\{l_y(g_y)^3 g_x g_x' + l_x(g_x) g_y g_y' g_y\} \\[2ex] l_y(g_y')^3 g_x g_x' + l_x(g_x')^3 g_y g_y' g_y'' \\[2ex] (g_y')^3 g_x g_x''(k_y-k_x) \\[2ex] (g_x')^2 g_y g_y' g_y''(k_y-k_x) \end{pmatrix}$$

となる。ここで

$$Q=\frac{1}{l_y(g_y')^3 g_x^2 g_x'' + l_x(g_x')^3 g_y^2 g_y''}$$

である。（補-15）から

$$\frac{\partial y}{\partial x}=l_y g_y'\frac{\partial k_y}{\partial x}+g_y\frac{\partial l_y}{\partial x},$$

$$\frac{\partial y}{\partial k}=l_y g_y'\frac{\partial k_y}{\partial k}+g_y\frac{\partial l_y}{\partial k}$$

であるから，（補-23）と（補-24）を使えば

（補-25）　$$\frac{\partial y}{\partial x}=-\frac{g_y'}{g_x'},$$

（補-26）　$$\frac{\partial y}{\partial k}=g_y'$$

がえられる。（補-25），（補-26）と implicit function の存在定理により

（補-27）　$$\left.\frac{dx}{dk}\right|_{y=\mathrm{constant}}=-\frac{\partial y/\partial k}{\partial y/\partial x}=g_x'$$

である。さらに，（補-24），（補-25）から

（補-28）　$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}=Q(g_y')^3 g_x'' g_y'(k_y-k_x)^2,$$

（補-23），（補-26）から

（補-29）　$$\frac{\partial^2 y}{\partial k^2}=Q(g_y')^3 g_x'' g_y'' g_x^2,$$

（補-23），（補-25）から

（補-30）　$$\frac{\partial^2 y}{\partial x\partial k}=Q(g_y)^3 g_x'' g_y'' g_x(k_y-k_x),$$

（補-22），（補-27）から

（補-31）　$$\left.\frac{\partial x}{\partial k}\right|_{c=\mathrm{constant}}=Q(g_x')^3 g_x'' g_y'' g_y^2$$

がえられる。記号を通例に従って

$$f_x=\frac{\partial f}{\partial x},\quad f_k=\frac{\partial f}{\partial k},\quad f_{xx}=\frac{\partial^2 f}{\partial x^2},\quad f_{kk}=\frac{\partial^2 f}{\partial k^2},\quad f_{xk}=\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial k}$$

と定義すれば，（補-6），（補-25），（補-26），（補-28），（補-29），（補-30）から

（補-32）　$f_x<0,$

（補-33）　$f_k>0,$

（補-34）　$f_{xx}<0,$

（補-35）　$f_{kk}<0,$

(補-36)　$f_{xk} \lesseqgtr 0$　if and only if　$k_y \gtrless k_x$

となる。また

(補-37)　$$f_{xx}f_{kk}-f_{xk}^{2}=Qg_x''g_y''(g_y')^{3}(k_y-k_x)^{2}Qg_x''g_y''(g_y')^{3}g_x^{2}-(Qg_x''g_y''g_x(k_y-k_c))^{2}=0,$$

(補-38)　$$f_{kk}f_x-f_{xk}f_k=-Qg_y''g_x''(g_y')^{3}g_xg_y>0,$$

(補-39)　$$f_{kx}f_x-f_{xx}f_k=-Qg_y''g_x''(g_y)^{3}g_y(k_y-k_x)\gtrless 0$$

if and only if　$k_y \gtrless k_x$

がえられる。(補-36) と (補-39) をあわせれば

(補-40)　$f_{kx}f_x-f_{xx}f_k \gtrless 0$　if and only if　$f_{xk} \lesseqgtr 0$

である。さらに，(補-38)，(補-39) から

(補-41)　$$\frac{\partial\left(-\dfrac{f_k}{f_x}\right)}{\partial k}=Qg_x''g_y''(g_x)^{3}g_yg_y'g_x<0,$$

(補-42)　$$\frac{\partial\left(-\dfrac{f_k}{f_x}\right)}{\partial x}=Qg_x''g_y''(g_x')^{3}g_yg_y\,(k_y-k_x)\lesseqgtr 0$$

if and only if　$k_y \gtrless k_y$

がえられる。そこで

$$\frac{d\left(-\dfrac{f_k(\lambda k,\ k)}{f_x(\lambda k,\ k)}\right)}{dk}=\frac{\partial\left(-\dfrac{f_k}{f_x}\right)}{\partial x}\lambda+\frac{\partial\left(-\dfrac{f_k}{f_x}\right)}{\partial k}$$

$$=Qg_x''g_y''(g_x)^{3}g_yg_y\,\{g_x+\lambda(k_y-k_x)\}$$

である。$\lambda>0$ かつ $k_y-k_x>0$ なら

$$g_x+\lambda(k_y-k_x)>0$$

である。また，$k_y-k_x<0$ であっても

(補-43)　$g_x[k_x(\lambda k,\ k]=\lambda+\delta$　　$(\lambda>0,\ \delta\geqq 0)$

に解 $k^*>0$ が存在するならば，(補-11) により，k^* において

$$0<\frac{g_x'}{g_y'}g_y=g_x+g_x'(k_y-k_x)\leqq g_x+\lambda(k_y-k_x)$$

がなり立つ。ゆえに，(補-43) に解 k^* が存在すれば

$$\left.\frac{d\left(-\dfrac{f_k(\lambda k,\ k)}{f_x(\lambda k,\ k)}\right)}{dk}\right|_{k=k^*}<0\qquad(\lambda>0)$$

となる。

さて，ここで，x財部門を消費財部門，y財部門を投資財部門として，suffix をそれぞれ c, i とすれば，(補-36) は

$$f_{ck} \lesseqgtr 0 \quad \text{if and only if} \quad k_i \gtreqless k_c$$

となる。よって，$k_c > k_i$ となっているとすれば

$$f_{ck} > 0$$

となる。また，(補-40) は

$$f_{kc} f_c - f_{cc} f_k \gtreqless 0 \quad \text{if and only if} \quad f_{ck} \lesseqgtr 0$$

となる。すなわち，$f_{ck} > 0$ である必要かつ十分条件は

$$f_{cc} f_k - f_{kc} f_c > 0$$

がなり立つことである。これで本論で残された命題が証明された。

なお，(補-37)，(補-38) は non-joint production の必要条件である。(補-37) はすでに Samuelson [1] が指摘している関係であるが，(補-38) は新しい条件であることを注意しておこう。

引　用　文　献

[1] Samuelson, P. A., "The Fundamental Singularity Theorem for Non-Joint Production," *International Economic Review*, Vol. 7, No. 1 (January 1966), pp. 34-41.

[2] Samuelson, P. A., "Indeterminancy of Development in a Heterogeneous-Capital Model with Constant Saving Propensity," in K. Shell (ed. by), *Essays on the Theory of Optimal Economic Growth*, Cambridge: MIT Press, 1967, pp. 219-231.

[3] 戸島　凞，「2部門 model の Production-Possibility Frontier について」商学討究，第19巻第2号（1968年9月），pp. 47-60.

[4] 戸島　凞・若林信夫，「Joint Production を含む Neo-Classical Growth (2)」商学討究，第21巻第1号（1970年7月），pp. 27-41.