競争均衡の安定性に関する一考察*

若 林 信 夫

1. 序

一般均衡の枠組における安定性の体系的な研究は1960年前後を頂点に次第に減少してきたようにいわれる。しかし，その後の発展の中でも個別的モデル――為替，通貨市場とか不完全競争経済――の安定性，確率的安定性，(1) 定性的な符号安定の問題，模索安定の実証研究［1］などにもみるべきものがあり，決して全ての問題に決着がつけられたのではない。また10年以上も前，根岸［23］の優れたサーベイ論文で未解決な問題としてリストアップされた，価格形成過程の問題，ラグ付調整の導入あるいは均衡への到達に要する時間（調整速度）の問題など殆ど未解決のままにあるといえよう。

そもそも，一般均衡の安定性の萌芽はワルラスの模索過程やヒックス・サムエルソンの完全安定と動学的安定性の論争(2)に求められるが，この展開の最も重要な成果はメッツラー［16］による基本的な論文であろう。その主要な結果は，もし全ゆる財が粗代替（この言葉を最初に用いたのはモザック［20, 33］である）であれば，ヒックス条件，すなわち，総超過需要関数のヤコビアンの主座小行列式が符号を負正負正と交互にかえる，がなりたつことが体

---

* 本稿は小樽商科大学の定例土曜研究会（48.10.6）の報告にもとづいている．多くのコメントに対し記して感謝する．

(1) 原点が確率1で（確率的）安定とはすべての $\rho, \varepsilon>0$ に対してある $\delta(\rho, \varepsilon)>0$ があって $\|x_0\|\leq\delta(\rho, \varepsilon)$ ならば $Pr\{\sup_{0<t<\infty}\|x_t\|\geqq\varepsilon\}\leqq\rho$ がなりたつことである．例えばワイントロウプ［35］を参照せよ．

(2) ヒックス［11］の完全安定は超過需要関数の勾配のみに依存したためサムエルソン［32］の微分方程式からする動学的安定性の必要条件でも十分条件でもなりえなかった。しかし両者とも超過需要関数の背後にある微視的経済学の基礎は欠如していたためスカーフ，ゲールの有名な不安定の反例を認めざるを得なかった．本稿はこの問題を考慮の外におく．

系の局所的安定性の必要かつ十分条件であるということである。13年後の1958年，根岸[22]とハーン[10]そして，アロウ・ハーヴィッ[4]が独立に Econometrica に投稿した結果はすべて同一で，メッツラーの粗代替仮定のもとでは実はヤコビアンは必然的にヒックス条件となり，したがってメッツラーの定理から系は局所的に安定となることを主張する積極的な結果であった。(3) このことの経済的意味と数学的意味合いについてはまだ十分検討されているとはいえないように思う。

実際，彼らの証明についていえば，アロウとハーンの幾何図形を別とすれば，ともにフロベニウスの定理を用いているが根岸は関数のゼロ次同次を利用したのに対し，ハーンはワルラス法則を用いて結論に達した。両者に含まれる数学的道具を研究することにより経済的意味合いもさらに充実する可能性がある。本論文の第一目的は，これを検討することにある。その結果，あたかもメッツラーが不十分な結果しか導かなかったという面が過度に強調され，誤った印象を与えている事実，又は与えそうな危惧を根本から是正することができよう。

その後，アロウ・ブロック・ハーヴィッチ[4]は粗代替性とワルラス的調整過程に対して調整速度が超過需要の連続かつ符号保持関数であることのみを仮定すれば均衡の大域的安定性(したがって均衡解は一意である。)を証明した。この結果はさらに宇沢[34]によりリヤプノフの第二方法を用いて「均衡」の安定性から「過程」の安定性に拡張されたことは特筆に値する。

均衡の安定性の近時の主要なトピックのひとつはヤコビアン行列の定性的情報すなわち(+，−，0)の3つの符号条件と若干の本質的な仮定のみから安定性を問う，符号安定の問題である。これは近時，定性経済学(Qualitative Economics)として確立した感がある領域の一問題である。定性経済学は理論経済学ばかりでなく計量経済学のモデルビルディングや係数

(3) この命題を始めて明瞭に述べたのは多少特殊ではあるが，サムエルソン[32, (438) 定理5]である．またその定理は A が負の支配対角をもてば A がヒックス行列になることも含んでいる．厳密な直接的証明を数学注3で示した．

の推定結果についても何らかの有意味な証左を与えうる。定性経済学の端緒はサムエルソン［32, ㉓］のやや難解な一節 "A Calculus of Qualitative Relations" が提出されたことにもとづくといえよう。

発表後十数年間，サムエルソンの問題は，二，三の例を除いて等閑視されてきたがランカスター・ゴーマンを契機に，カークを中心とした研究をまた一方に積み重ねられてきた。この研究は行列論の新しい概念――巡回とか連鎖――を発展させ定性行列の展開に役立っている。本論文の後半はこの研究を含む最近の安定性分析を統一的体系的に展望することを意図している。

本論文の構成はまず競争均衡の数学的モデルを述べ，安定性問題の導入を図る（2節）。続いて予備定理から粗代替をめぐる十分条件の相互依存関係をみる（3節）。粗補完を含む競争均衡の問題を森嶋行列と符号安定性の観点から議論する（4節）。なお数学付録において本論文をできるだけ自己完結的にするために詳細な数学的証明を与えた。

2. 競争均衡モデル

経済には交換可能な財貨 $i\in\bar{N}\equiv\{0\}\cup N\equiv\{0\}\cup\{j\,|\,j=1,\ldots,n\}$ があり各財 i に対応して価格 $P_i(i\in\bar{N})$ がある。α をモデルの環境を表わすシフトパラメータとする。第 i 財の総超過需要を x_i とすれば，x_i は全ゆる価格の関数と考えられる。すなわち，$x_i=F_i(P_0, P_1, \ldots, P_n\,;\,\alpha)$ $(i\in\bar{N})$ である。そのときまず仮定

(H)　　関数 F_i は価格に関し正の0次同次である，

をおく。そのとき，第0財をヌメレールに選ぶことが可能で $x_i\equiv F_i(1, p_1, p_2, \ldots, p_n\,;\,\alpha)$ とできる。ここで，$p_i=P_i/P_0$ である。環境パラメータを固定する $(\alpha=\alpha^*)$ と経済均衡は

$$0=F_i(P^*, \alpha^*) \quad i=0, 1, \ldots, n$$

で $P_i^*\geq 0$ となるベクトル P^* が存在することと定義され，存在を仮定す

る。すなわち，いかなる財も均衡では正の超過供給をもたないとする。[4] 均衡においては全ゆる価格は正と仮定する；$P^*=(P_0{}^*,\ P_1{}^*,\ \ldots,\ P_n{}^*)>0$. ワルラス法則の仮定

$$(W) \qquad 0=\sum_{i=0}^{n} P_i F_i(P;\ \alpha)$$

を用いると，

$$-P_0F_0(P;\ \alpha)=\sum_{i=1}^{n} P_i F_i(P;\ \alpha)$$

よって

$$-x_0=\sum_{i=1}^{n} P_i x_i.$$

これは第0財の超過需要が他のすべての財の超過需要によりきまるから，$n+1$ 個の財を考える代りに n 個の財を考えればよいことを示す。[5] したがって均衡条件は

$$0=f_i(p_1{}^*,\ p_2{}^*,\ \ldots,\ p_n{}^*;\ \alpha^*)\equiv f_i(p^*;\ \alpha^*) \qquad i=1,\ \ldots,\ n$$

となる。一般性を失うことなく均衡価格が1となるよう財の単位を選ぶと仮定する。すなわち，$p^*=(1\ \ldots\ 1)$, $P_0=1$. である。

ワルラス的模索調整メカニズムは連立方程式

$$(1) \qquad \dot{p}_i=g_i(f_i(p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n;\ \alpha));\ i\in N$$

により表わされる。ここで $\dot{p}_i=dp_i/dt$, $g_i(\cdot)$ は f_i の増加関数で，$g_i(f_i(p^*;\ \alpha^*))=g_i(0)=0$ と仮定する。後者の仮定は体系が均衡にあれば価格は変化しないことを意味する。均衡の安定性を議論する便宜上，仮定

---

(4) そのような均衡解の存在のひとつの十分条件は総超過需要関数 F_i が一価で連続なことである．なぜなら，F_i が (H) をみたせば変域をコンパクトにできることによる．

(5) ワルラス法則と0次同次を仮定するわれわれのモデルではヌメレールの選択は安定性に感応的ではない．ヌメレールの選択と安定性の間の一般的な考察は森嶋 [19]，ムケルジ [21] を見よ．

(D) $F_i(f_i)$ と g_i に微分可能性

をおく[(6)]。(1) の線形近似体系を考えると，

$$\dot{p}_i = g_i' \sum_{j=1}^{n} f_{ij}(p_j - p_j^*) \qquad (i \in N) \tag{2}$$

を得る。ここで F_{ij} は $\partial F_i/\partial p_j$ の均衡値 p^* で評価した値であり，n 次正方行列である。以下 $A=[f_{ij}]=[a_{ij}]$ とおく。したがって導関数 $g_i'=g_i'(0)$ でありこれを d_i とおくことにする。$D=\mathrm{diag}(d_i)$, $d_i>0$ とすると D は非負の対角行列で逆が存在する。$D^{-1}=\mathrm{diag}(d_i^{-1})$。

(2) に対する解は，

$$p_i(t) - p_i^* = \sum_{k=1}^{m} Q_k(t) e^{\lambda_k t} V^k \tag{3}$$

によって与えられる。ここで $m \leqq n$ は DA の異なる固有根 λ_k の数であり $Q_k(t)$ は高々 $m-1$ 次の t の多項式である。V^k は λ_k に対応する固有ベクトルである。体系 (1) が局所的に安定的である，すなわち $\lim_{t\to\infty} p_k(t)=p_k^*$ となる必十条件は行列 $DA=[d_i a_{ij}]$ が安定行列，すなわち固有根がすべて負の実部をもつことである；$Re(\lambda_i)<0$。もし DA がどのような D に対しても安定であるとき A を D–安定という。(アロー・マクメイナス [4a])。D–安定の必要十分条件は知られていないが，十分条件は $BA+A'B$ が負定値となる正の対角行列 B が存在することであり，必要条件は A が「殆どヒックシアン」行列（A の主座小行列式が $(-1)^k$ または 0 の符号をもつ）であることが個別に知られている。しかし最近十分条件に対しても，必要条件に近い型が得られた。いわゆるフィッシャー・フラー定理である[(7)]。

(6) 超過需要関数の微分可能性は微分方程式の解を保証するための純粋に数学的な条件である。帰結するところは関数が一価かつ連続でなければならないがどれだけ経済的合理性を与えるかは疑問であり tricky な仮定といえる．

(7) フィッシャーフラー定理は元来一次方程式の反復解法という数値解析の分野で発表されたものである。これを経済学に最初にとり入れたのはニューマン [24] である．その後カーク，マックファーデン，森嶋において用いられた．最近，数値解析の専門家である M.E. フィッシャーではなく，数理経済の専門家である F.H. フィッシャー [7] がより簡単な証明をなした．これらに沿った証明を本稿末尾の数学注 1 で与えた．

フィッシャー・フラー定理：A はヒックシアン（ヒックス行列），すなわち A の主座小行列式 M_k の nested set が少なくともひとつあって，$(-1)^k M_k>0$, $(k \in N)$ になる，と仮定する。そのときある正の対角行列 $D=\mathrm{diag}(d_i)$ $d_i>0$ に対し，DA の固有根がすべて実，負，単根である。

この定理はアロー・マクメイナスの殆ど経済的意味をもたないものをおきかえ，現在知られている最良のものである。（それ以前は第 3 節に述べる付加的で stringent な仮定，例えば粗代替の仮定に依存している。）しかし上述の定理は均衡がヒックス的安定であれば価格のある調整速度に関し局所的に安定であることを意味する。したがって，価格のどのような調整速度でも成立するものではない。

次節では粗代替が中心的仮定となる安定条件論を展開しよう。

3. 予 備 定 理[8]

予備定理：

$A=(a_{ij})$, $i, j \in N$ は非対角要素が全て非正の行列である；$a_{ij} \leqq 0 (i \neq j)$。このとき次の諸命題は同値である。

1° $\exists x \geq 0$; $Ax>0$. （$Ax>0$ となる $x \geq 0$ がある。）

2° $\exists x>0$; $Ax>0$. （$Ax>0$ となる $x>0$ がある。）

3° $\exists D=\mathrm{diag}(d_i)$, $d_i>0$, $i \in N$; $ADe>0$. （正の対角要素をもつ対角行列 D があって，$ADe>0$ となる。e は全要素が 1 の単位ベクトルである。）

4° $\exists D=\mathrm{diag}(d_i)$, $d_i>0$; $W \equiv AD=(w_{ij})$ は正支配対角である。すなわち $w_{ii}>\sum|w_{ij}|$ あるいは，$a_{ii}d_i>\sum|a_{ij}|d_j$ である。

5° A のすべての実固有根は正である。

6° A のすべての主座小行列式は正である。すなわち，$a_{ii}>0$, $\begin{vmatrix} a_{ii} & a_{ij} \\ a_{ji} & a_{jj} \end{vmatrix}$

(8) 本節は数学書の至る所に古典的な結果としてバラバラに述べられているもので，多分に数学的興味から挙げたものも含む．文中の ∃ は存在記号 "for some" を表わす．

$>0, \dots |A|>0$. あるいは添字の集合 $M\subset N$ に対して，$|A_{[M]}|>0$.

7° $\lambda>\underset{i}{\mathrm{Max}}\ a_{ii}$ とする。$Z=\lambda I-A\geqq 0$ に対し，Z の最大固有根を r とする。r は正で λ よりも小さい。$r<\lambda$。

8° A のすべての固有根の実部は正である。

9° 逆 A^{-1} が 存在し，$A^{-1}=(b_{ij})\geqq 0$ である。

10° すべての $x\neq 0$ および $y=Ax$ に対して，$x_iy_i>0$ となる番号 i がある。

［証明］

［1°→2°］ $x\geq 0, Ax>0$ とする。e を全ての要素が 1 の単位ベクトル，ε を正の数とする。ε を十分小さくとれば，$x+\varepsilon e>0,\ A(x+\varepsilon e)=Ax+\varepsilon Ae>0$.

［2°→3°］ x は $Ax>0$ をみたす正のベクトルであるから，$x=(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を対角行列の対角要素に選ぶことができる。そのとき $ADe=Ax>0$.

［3°→4°］ D が正の対角要素をもつ対角行列とする。$W=AD$ に対して $We>0$。したがって全ての i に対し，$w_{ii}>-\sum_{j\neq i}w_{ij}$. A の非対角要素は非正で $d_i>0$ であるから $w_{ij}\leqq 0(i\neq j)$. よって W は正の支配対角行列である。

［4°→5°］ AD のすべての実固有根（のベクトル）を $\lambda=(\lambda_i)$ としある i に対し $\lambda_i\leqq 0$ とする。そのとき，$w_{ii}-\lambda_i\geqq w_{ii}>\sum_{i\neq j}|w_{ij}|$ である。よって $W-\lambda I$ は正則だから λ_i は AD の固有根とはなりえない。よって $\lambda_i>0$. いま AD の固有根を λ とする。$\lambda>0$。D は正則ゆえ，

$$0=|AD-\lambda I|=|D^{-1}(DA-\lambda I)D|=|D|^{-1}|DA-\lambda I||D|=|DA-\lambda I|.$$

よって $DAx=\lambda x$. 両辺に左から D^{-1} をかけると $Ax=\lambda D^{-1}x=\mu x$ よって A は $\mu=[\lambda D^{-1}]>0$ なる実固有根をもつ。

［5°→6°］ A のすべての実固有根が正であるとする。$M\subset N$ とし $|A_{[M]}|$ が正となることを示す。いま行列 S を添字の集合 $M=\{1, 2, \dots, m\}$ に従って次のように定義する；$i, j\in M$ なら，$s_{ij}=a_{ij}$, $i\notin M$ なら $s_{ii}=a_{ii}$, $i\in M$, $j\notin M$ なら，$s_{ij}=0$ とする。明らかに $S\geqq A$ で S は A と同じく非対角要素が非正である。5° のもとでは $|S|\geqq|A|>0$ がいえる。S のあらゆる固有根は正であるから特にすべての a_{ii} は $i\notin M$ に対し正である。 det $(B)=$det

$(A_{[M]})\prod a_{ii}(i\notin M)$ であるから $|A_{[M]}|>0$。

［6°→7°］ $\mu>\underset{i}{\mathrm{Max}}\ a_{ii}$ となる μ に対して，$Z\equiv\mu I-A$ は $Z\geqq 0$. いま，Z の固有根を μ, その最大固有根を r とする。

(1) $$0=|\mu I-Z|=|(\mu-\lambda)I+A|=(\mu-\lambda)^n+\sum a_{ii}(\mu-\lambda)^{n-1}+\sum\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}(\mu-\lambda)^{n-2}+\ldots+|A|.$$

よって 6° より，$a_{ii}>0$, $\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}>0$, …, $|\mathrm{A}|>0$, すなわち主座小行列式が全て正なるとき，(1) の等号が成立するためには $\mu-\lambda<0$, したがって，$r<\lambda$ でなければならない。

［7°→6°］ $r<\lambda$ のとき，$\mu<\lambda$ である。固有方程式の性質より，$(\mu_i-\lambda_i)$ $(i\in N)$ を $0=|(\mu-\lambda)I+A|$ の解であるとすると，

$$0=|(\mu-\lambda)I+A|=\prod_{i=1}^{n}[(\mu-\lambda)+(\mu_i-\lambda_i)]$$

よって上の関係から，$|A|=\prod_{i=1}^{n}(\mu_i-\lambda_i)$ を得る。もし，すべての $(\lambda_i-\mu_i)$ が実数なら，$r>\lambda$ の場合，すべての $(\lambda_i-\mu_i)$ は正，したがって $|A|$ の符号は正，また複素根が存在する場合でも共役根が必ずついてくるからそれらの積は正となり，やはり $|A|$ の符号は正である。A の主座部分行列 $A_{[M]}$ を考えるとその最大固有根 r_M は非負で A のそれよりも小さい。したがって $r_M<\lambda$ であるから前と同様な論法で $A_{[M]}$ の主座小行列式も正となる。これは全ての主座小行列式に対していえる。

［7°→8°］ A の固有根 $\lambda_i(i\in N)$ をその実部の大きさに並べる。$Re\lambda_1\leqq Re\lambda_2\leqq\ldots\leqq Re\lambda_n$ である。$Z=\lambda I-A$ の固有根は $\lambda-\lambda_i$ でありその最大は $\lambda-\lambda_1$ であるから，最大固有根 r に等置される。仮定により $r<\lambda$ であるから，$\lambda_1>0$ となる。つまり行列 A のすべての固有根は正の実部をもつ。

［8°→5°］ A のすべての固有根の実部が正であれば明らかに実固有根も正となる。

［9°→1°］ A^{-1} が存在し $A^{-1}\geqq 0$ とする。$x=A^{-1}e$ をつくると $x\geqq 0$. よって $Ax=e>0$. これは 1° の成立を示す。

［1°→9°］ x は実際は正。なぜなら，もしある i に対し $x_i=0$ なら Ax の

第 i 要素が非正となるから。いま $Az\geqq 0$ となる z を考えよう。$z\geqq 0$ となる。なぜならかりに z が負の要素をもつとする。そのときすべての i に対し $z_j/x_j\leqq z_i/x_i$ となる番号 j を選ぶ。$z-(z_j/x_j)x\geqq 0$ であるから，仮定より $A(z-(z_j/x_j)x)\geqq 0$ が成立する。しかし左辺の j 番目の要素を計算すると $z-(z_j/x_j)x=0$ より非正である。これは矛盾であり $z\geqq 0$ となる。同様に $A(-z)\geqq 0$ なら $(-z)\geqq 0$ であるから，$Az=0$ なら $z=0$ である。したがって A は正則である。よって $v\geqq 0$ なら $A^{-1}v\geqq 0$ よって $A^{-1}\geqq 0$ となる。

[1°→10°] $x\geq 0$, $y=Ax>0$ であるから $xy\geq 0$ であり，ある番号 i に対して $x_iy_i>0$ となる。

[10°→1°] かりに $Ax>0$ をみたす x の中に $x_i<0$ となるものが存在するとしよう。仮定 10° より $y_i=(Ax)_i<0$ である。ところが，$Ax>0$ であるから矛盾，よって 10° ならば 1° である。 ▮

[注意 1] $a_{ij}\leqq(i\neq j)$ で 1° から 10° までの同値命題のひとつをみたすものを数学の分野では，オストロフスキーの命名以来長く，M-行列，またはミンコフスキー行列と呼んでいる。（後の競争均衡の議論で登場する森嶋行列やメッツラー行列を M-行列と呼ぶ論文，著書もあるが同語異義である。例えば森嶋 [19]，カーリン [12]，ケンプ・ウェッグ [12a] を比較せよ。）

[注意 2] 上の定理またはその変種が本論の競争均衡の安定分析も含め，以下のような数理経済学の各種の分野に基本的であることに注意する；

(1) モザック・メッツラー・ヒックスの粗代替モデル，これは後にアロウハーヴィッチ等多数の理論家により展開され本稿の主題でもある。

(2) レオンチエフ・メッツラー・フロベニウス・ミンコフスキー型の投入産出行列，これは後にドッソー，マッケンジー等の投入産出と支配対角に関する理論家により展開されたものである。

(3) 国際貿易理論における要素価格均等化とストルパー・サムエルソン定理の一般化，これはチップマン，上河，ケンプ，ウェッグ，稲田らにより展

開された。

(4) その他，チップマンらによる多部門乗数分析，マルコフ，フレッシェの推移確率の統計理論を用いたサムエルソンの投機価格論，計量経済学と関連した数値解析を挙げることができる。

［注意3］ 1°または2°と8°の関係は，線形不等式 $Ax>0$ に正または非負の解が存在するかという問題が A を係数にもつ微分方程式の安定性の問題に密接に関係していることを意味している。

［注意4］ 6°のように A の主座小行列式が全部正となる行列を P-行列と呼び最近の数理経済学，数値解析（ミトラ・ホー［17］），数理計画論（ダンツィーグ）等で採用され彫琢されている。（但し，チップマン［5a］は「P-行列」を避けて，ガントマッヘルの totally positive matrix（全小行列式が正）に対する "partially positive matrix" を採用している。）応用を数理経済学に限定すると P-行列に関連する話題は，本論で扱つている競争均衡の場合以外に国際貿易の数学的議論特にストルパー・サムエルソン定理において重要である。本質的な違いは前者が PN 行列（対角小行列式が奇数次に負，偶数次に正の行列），後者が P 行列に直接的に関係していることに求められる。

P 行列に対する同値条件として以下のものをあげることができる。（ミトラ・ホー［17］）

(a) A と A の全ゆる主座部分行列の実固有根が正である。

(b) すべてのベクトル $x\neq 0$ に対し，$x_iy_i>0$ となる番号 i がある。ここで，$y=Ax$ である。

(c) すべてのベクトル $x\neq 0$ に対し，対角行列 $D=\mathrm{diag}(d_i)$; $d_i>0$ があって，スカラー積 $(Ax, Dx)>0$ である。($d_i\geqq 0$ でも可)。

(d) A の逆 A^{-1} が存在して A^{-1} は P 行列。

このことから，次の性質（P 行列の例となる。）が成立する。

［I］ A が正支配対角をもつ行列であれば，A は P-行列である。

［証明］ $a_{ii}d_i>\sum_{j\neq i}|a_{ij}|d_j$ なら $x\neq 0$ に対しある D があって $(Ax, Dx)>0$

となることを示せばよい。いま $x=(d_1, d_2, \dots, d_n)$, $D=\mathrm{diag}\ 1$ なる単位行列とすると確かに $a_{ii}d_i>\sum|a_{ij}|d_j$ の下では $(Ax, Dx)>0$ が得られる。 ▌

[II] A が正の準定値行列であれば A は P–行列である。

[証明] A が正の準定値行列であるから定義により $\frac{1}{2}(A+A')$ は正定値である。すなわち，$x\neq 0$ に対し，$\left(\frac{1}{2}(A+A')x, x\right)>0$ である。しかし $(Ax, x)=\left(\left(\frac{A+A'}{2}+\frac{A-A'}{2}\right)x, x\right)=\left(\frac{A+A'}{2}x, x\right)+0$ であるから $(Ax, x)>0$. よって(c)において $D=\mathrm{diag}\ 1$ なる単位行列とすればよいから，確かに $\frac{1}{2}(A+A')$ と同様 A も P–行列である。 ▌

注意：A が正の支配対角をもつ行列であれば A は正の準定値行列である。これは[I]の証明の過程中で $D=\mathrm{diag}\ 1$ なる単位行列にしてみればわかる。したがって，この性質と[II]から[I]が導出される。

[II]の応用としてホテリング・サムエルソンの命題：行列 A が負定値のときその逆行列 $A^{-1}=[A_{ji}/|A|]=[b_{ij}]$ (A_{ij} は余因子) の要素について，(i) 対角要素 $b_{ii}=A_{ii}/|A|$ は負，(ii) 引続く次元に対して主座小行列式は負正負正と符号を変える。すなわち，$\begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ij} \\ b_{ji} & b_{jj} \end{vmatrix}>0$, $\begin{vmatrix} b_{ii} & b_{ij} & b_{jk} \\ b_{ji} & b_{jj} & b_{jk} \\ b_{ki} & b_{kj} & b_{kk} \end{vmatrix}<0, \dots$ が成立する。この命題の直接の単純な証明を数学注 2 で与えた。

[III] A が P 行列なら A^{-1} も又 P 行列である。

[証明] A が P 行列であるから $|A|>0$ よって A は正則，したがって A^{-1} が存在する。いま $y=A^{-1}x$ とおくとすべての $x\neq 0$ に対して $y\neq 0$. したがってこの y に対して(c)よりある D' があって $(Ay, D'y)>0$ となる。したがって $(x, D'A^{-1}x)>0$, したがって $(Dx, A^{-1}x)>0$ よって $(\mathrm{A}^{-1}x, Dx)>0$. これは A^{-1} が P–行列であることを示す。 ▌

P 行列の諸性質を知りさえすれば競争均衡の安定性で重要なヒックス行列すなわち PN–行列の諸性質が次の定理から直ちに導出される。

定理：A が PN–行列である必十条件は $-A$ が P 行列である。

[証明] 行列式の基本性質 $|-A|=(-1)^n|A|$ (n は A の次元) を用いれば容易に得られる。 ▌

以上の数学的準備をもとに次節では安定性の十分条件を吟味しよう。

4. 局所的安定性の十分条件

この節では競争均衡の局所的安定性について今まで知られている十分条件の間の関係を前節の数学的定理を用い図式的に分類を行なう。

まず，上の定理で A を $-A$ としよう。そのとき $a_{ij} \geqq 0 (i \neq j)$ の仮定のもとで以下の命題は同値である。

C 1. A が動学的安定すなわち $Re(\lambda_i)<0$ (8°)

C 2. A が PN 行列（ヒックス行列） (6°)

C 3. A が負の準支配対角の行列 (4°)

C 4. $\exists x \geq 0$；$Ax<0$. (1°)

C 5. $\exists x>0$；$Ax<0$. (2°)

C 6. $\exists A^{-1}=(b_{ij}) \leqq 0$. (9°)

すなわち A に弱粗代替 $(a_{ij} \geqq 0)$ が仮定されると C1 から C6 の命題のいずれかを仮定すると他が導かれることを意味する。例えばメッツラー[16]が証明したように A が弱粗代替なら A がヒックス行列である（C2）必十条件は A が動学的安定条件である（C1）ことは直ちに出る。ところで根岸[22]，ハーン[10]らの立言は A が弱粗代替なら C2 が常に導かれるというものであった。これは素直に受取ると他の条件が不要であるかの如く思われる。しかし実は根岸は背後に C4 を仮定しているのであり，ハーンは背後に C5 を仮定しているのである。前者は需要関数の0次同次から導いた関係；

$$\sum_{s=1}^{m-1} A_{rs} P_s{}^{\circ} = A_r$$

これは符号条件からわれわれの C4 を分析している。また後者はワルラス法則の両辺を P_j に関し偏微分し均衡値で評価した関係；

$$\sum_{i=1}^{n-1} p_i{}^{\circ} A_{ij} + A_{nj} = 0$$

すなわち C5 を分析していることがわかる。要するにメッツラーは0次同次

やワルラス法則を仮定しなかったために粗代替であればヒックス行列と動学的安定とは同値であることを主張した。それに対し，根岸，ハーンはそれぞれ0次同次，ワルラス法則があれば粗代替のときヒックス行列になり，したがって動学的安定となることを主張したに過ぎない。いずれもわれわれの予備定理からの単純な帰結であることが理解された。さらに根岸，ハーンに共通な用具である「フロベニウスの定理」も何ら必要ではないばかりか，A の対角要素について一定の符号パターン（$a_{ii}<0$）を仮定する必要がないことも予備定理は物語っている。

さて，今までは単純な粗代替性の仮定に服する場合の安定条件であったが次に競争均衡体系に粗補完を含む場合知られている十分条件について相互の関係を調べよう。なお，すべての財が弱粗補完である（$a_{ij}\leqq 0$）場合は予備定理により動学的に不安定である。また単純な粗代替性 $a_{ij}\geqq 0$ の仮定は二階堂［25，26］により $a_{ij}+a_{ji}\geqq 0$ と一般化されたが，さらに最近，大山［27］により，二階堂ケースを含むより一般化された粗代替性（メッツラー行列）が発表されていることに注意しよう。これらは単純な粗補完をカバーし，少し位，粗補完財が含まれても「平均して」粗代替であれば，局所的に安定である条件を議論した。しかし，ここでの議論は単純ケースに限定する。

次表は安定性の十分条件に関連する項目の間の相互依存関係を論理的な包含関係で示したものである(9)。表中○は P ならば Q を意味し，△は条件付，×は P ならば Q とならないことを表わす。（上三角行列は1つを除き全て×）。

粗補完を含む場合の動学的安定性の十分条件のうち，負の準支配対角（したがって負の支配対角）の証明は，マッケンジー［15（49），定理2］に完全に与えられている。負の準定値および対称かつヒックス型についてはサムエルソン［32，（438）定理2，および（273）］に指摘がみられる。「森嶋型のヒックス行列」についての証明は，森嶋［18（103），定理Ⅰ］を参照された

(9) 動学的安定性の必要条件は

$$\alpha_1=(-1)\sum a_{ii}>0,\ \alpha_2=\sum\begin{vmatrix}a_{ii} & a_{ij}\\ a_{ji} & a_{jj}\end{vmatrix}>0,\ \ldots\ \alpha_n=(-1)^n|A|>0$$

である．なお α_i はルース・フルビッツの定理の議論と関連している．

P ＼ Q	動学的安定	粗代替(メッツラー)	ヒックス型	対称かつヒックス	森嶋かつヒックス	負準定値	負の準支配対角	負の支配対角
動学的安定	○							
粗代替(メッツラー)	△イ)	○				×		
ヒックス型	△ロ)	×	○					
対称かつヒックス	○	×	○	○		○		
森嶋かつヒックス	○	×	○	×	○			
負準定値	○	×	○	○	×	○		
負の準支配対角	○	×	○	×	×	△ハ)	○	
負の支配対角	○	×	○	×	×	△ハ)	○	○

（△の説明）
イ）M–行列と同値な条件
ロ）対称または森嶋型（後述5節）
ハ）対称

い。[10]

上表における△のロ）すなわちヒックス型なら動学的安定という命題は表の右の説明のほか，いわゆる D 安定となっていることに注意しよう。これは第2節のフィッシャーフラー定理で述べたように粗補完をも含みうることを述べている。[11]（もちろん A が D 安定である十分条件は，(1) A が粗代替 ($a_{ij}\geqq 0$) となるメッツラー行列，(2) A が準負定値および (3) 負の準支配対角行列が知られている。特に(3)は上表よりヒックス型であるからフィッシャー・フラー定理の強力性を示している。）

最後にこの表に関連して安定条件のもつ意味について触れておく。安定条件は比較静学という旧均衡から新均衡への変位に対しての意味づけを保証するものであり比較静学の研究は安定性を仮定する。また，動学的安定性を固有根の実数部が負と定義するとこれを（経済）計算することはしばしば困難である。したがってより経済的合理性を反映する十分条件は何かを問うこと

(10)　ケネディ［13］の最近の結果によれば，ヌメレール財を含む全経済に森嶋の符号ルール脚注(3)を適用すると，（新）森嶋システムはもはやヒックス行列とはなりえず，動学的に不安定となる．

(11)　この問題を解決する十分な条件が研究されているが，殆ど経済的解釈が分明ではない．例えばカーク・サポスニク［28，(211)］をみよ．

が安定条件を求める動機となったといえよう。しかし，依然としてあいまいなものが多い。

負の準支配対角もかなり制限的である。なるほど行列 A には対称とかメッツラー行列であることを必要としないが，経済的タームでは次の殆ど制限的意味を必要とする；ある財の超過需要に及ぼす価格効果は負で，絶対値でその商品の価格の変化が他の財の各々の超過需要に及ぼす「効果」よりも大きいことである。

5. 森嶋行列，定性経済学

粗補完を含む競争均衡の安定性に対する十分条件のうち森嶋［18］による貢献は早くから注目された。以下，いわゆる森嶋行列について触れそれが定性経済学のうちにいかにおさまるかを研究しよう。最後に符号安定，定性的安定が定量的な経済法則例えばワルラス法則，0次同次等にどの程度制約されるかを考究しよう。

森嶋行列の定義を与えることから始める。

ある行列を同時に行と列を変換して

$$A=\left(\begin{array}{ccc|cccc} + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & + & - & - & - & - \\ + & + & + & - & - & - & - \\ \hline - & - & - & + & + & + & + \\ - & - & - & + & + & + & + \\ - & - & - & + & + & + & + \\ - & - & - & + & + & + & + \end{array}\right)=\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{bmatrix}$$

の型にできる行列を森嶋行列という。ここで A_{11}, A_{22} は k 次，$(n-k)$ 次の正の正方行列，A_{12}, A_{21} は負の矩形行列である。(12)

森嶋行列を定性経済学の中で一層理解するには，定性経済学で基本的な記号とか定義について説明する必要がある。

$s(x)=+$ if $x>0$, $s(x)=0$ if $x=0$, $s(x)=-$ if $x<0$ はベクトルの符号関数，$s(C)=[s(c_{ij})]$ は行列要素の符号行列を表わす。$\bar{C}=\{B \mid s(B)=s(C)\}$

(12) 行列の要素を非正，非負とし，分解不能性を仮定することも可能である．

である。つまり $\bar{C}$ は行列 C と同じ符号パターンをもつ行列の同値類を表わし定性行列 (Qualitative Matrix) と呼ぶ。$A^*=\left[\begin{array}{c|c} a_{00} & a_0 \\ \hline a^0 & A \end{array}\right]$ は $(n+1)$ 次正方行列，A は n 次正方行列である。A^* が定性的に特定化された体系（符号行列体系）とは A^* の全部の符号が $+-0$ のいずれかで埋められているものである。いま A^* と同一の定性行列で同時にワルラス法則と 0 次同次をみたすものの全体を S_{A^*} で表わし，

$$S_{A^*}=\{C^* \mid C^*\in\overline{A^*},\ C^*\in W,\ C^*\in H\}$$

とする。一般に符号行列体系だけでは競争均衡で仮定されるワルラス法則 (W) や 0 次同次 (H) にコンシステントではない。（それを示す例は，容易に作ることができる。また [31]，[29] 参照せよ。）

われわれは以下，(W) と (H) の仮定の下で定性的な安定を問題にする。

さらに記号の追加と新概念の説明を続けよう。行列 A の巡回 (cycle) とは $a_{il}a_{lm}\ \dots\ a_{st}a_{ti}$ のように第 i 行から始まり第 i 列に戻る指標をもつ行列要素の積のことであり，要素（項）が p 個あれば長さ p の巡回という。例えば $p=1$ のとき a_{ii}, $p=2$ のとき $a_{il}a_{li}$, $p=3$ のとき $a_{il}a_{lm}a_{mi}$ となりそれぞれ長さ 1，2，3 の巡回である。次に A の i から j への連鎖 (chain) とは $a_{il}a_{lm}\ \dots\ a_{st}a_{tj}$ のようにいくつかの項を経由して i から j へ到達する項の積で $a(i\to j)$ と書く。もし i から j へ r 回で到達すれば長さ r の連鎖という。連鎖 $a(i\to j)$ の例として長さ 1 は a_{ij}, 長さ 2 は $a_{il}a_{lj}$, 長さ 3 は $a_{il}a_{lm}a_{mj}$ である。したがって長さ r の連鎖 $a(i\to j)$ に要素 a_{ji} を乗ずれば長さ $r+1$ の巡回が得られる。

以上の定性経済学の記号的準備をもとに森嶋行列を再考察する。

[1]　森嶋行列ならば (i) $s(a_{ii})=+(\forall i\in N)$, (ii) $s(a_{ij})=s(a_{ik}a_{kj})(i\neq j\neq k\neq i)$ である。逆もまた真である。(13)

（証明）a_{ii} が正なることは明らか。次に A の符号は対角線に関し対称で

(13) 森嶋行列は代替財の代替財，補完財の補完財はいずれも代替財，代替財の補完財，補完財の代替財はいずれも補完財というルールが採用され反映されていると解釈できる．また，スメレール財を含まないことに注意せよ．

あるから，$s(a_{ij})=s(a_{ji})$ が成り立つことに注意すれば，$s(a_{ik}a_{kj})=s(a_{ik})s(a_{jk})$ である。今，ブロック A_{11} の次元の集合を I とすると，(1) $i\in I,\ j\in I,\ i\neq k\in I$ (2) $i\in I,\ j\in I,\ j\neq k\notin I$ (3) $i\notin I,\ j\in I,\ j\neq k\in I$ (4) $i\notin I,\ j\in I,\ k\notin I$ (5) $i\in I,\ j\notin I,\ k\in I$ (6) $i\in I,\ j\notin I,\ k\notin I$ (7) $i\notin I,\ j\notin I,\ k\in I$ (8) $i\notin I,\ j\notin I,\ j\neq k\notin I$ の合計 8 通り考えられるが，すべて $s(a_{ij})=s(a_{ik})s(a_{jk})=s(a_{ik}a_{jk})$ がなりたつ。 ▌

巡回と連鎖の理論の関連で次の性質が成立する。

［2］ 森嶋行列はすべての巡回が正である。

（証明） $s(a_{ii})=+$. 次に $s(a_{ik})=s(a_{ij}a_{jk})=s(a_{ij})s(a_{jk})$, $s(a_{jk})=s(a_{ji}a_{ik})=s(a_{ji})s(a_{ik})$ より $s(a_{ij})=s(a_{ji})$ が成り立つ。したがって $s(a_{ik}a_{ki})=s(a_{ik})^2=+$，また，$s(a_{ij}a_{jk}a_{ki})=s(a_{ij})s(a_{jk}a_{ki})=s(a_{ij})s(a_{ji})=s(a_{ij})^2=+$ 以下同様である。 ▌

［3］ A の巡回がすべて正である必十条件は $B\in\bar{A}$ に対して $AB\in\bar{A}$ がなりたつことである。

（証明） $AB=C$ とすると，$c_{ii}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji}$, $c_{ik}=\sum a_{ij}b_{jk}$ である。$B\in\bar{A}$ は $s(b_{ii})=s(a_{ii})$ を $AB\in\bar{A}$ は $s(c_{ii})=s(a_{ii})$ を意味する。十分性は $s(a_{ii})=s(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji})=s(a_{ii}b_{ii})=s(a_{ii})s(b_{ii})=s(a_{ii})^2$ よって $a_{ii}\neq0$ より $s(a_{ii})>0$. 次に $j\neq i$ とする。$s(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{ji})=s(a_{ik}b_{ki})$ となる $B\in\bar{A}$ を選ぶ。$s(a_{ik}b_{ki})=s(a_{ik})s(b_{ki})=s(a_{ik})s(a_{ki})=s(a_{ik}a_{ki})$ よって (i) により $0<s(a_{ii})=s(a_{ik}a_{ki})$。最後に $i\neq k$ とする。$s(c_{ik})=s(a_{ik})=s(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk})$, i とも j とも異なる k に対して $s(\sum_{j=1}^{n}a_{ij}b_{jk})=s(a_{ij}b_{jk})=s(a_{ij}a_{jk})$, よって上から $s(a_{ik})=s(a_{ij}a_{jk})$, 今両辺に $s(a_{ik})$ を掛けると $0<s(a_{ik})^2=s(a_{ik})s(a_{ij}a_{jk})=s(a_{ij}a_{jk}a_{ki})$。 ▌

［3の系］ 森嶋行列 A が与えられると $B\in\bar{A}$ に対して $AB\in\bar{A}$ がなりたつ。

最後に，今まで知られている，ワルラス法則（W）と0次同次（H）の仮定のもとで定性的な安定条件として以下のものを要約することができる。（詳細は文献［2］,［5］,［9］,［14］,［29］,［30］,［31］を参照のこと。）

1° $C^*\in S_{A^*}$ ならば C は準負定値である。

2°　$C^* \in S_{A^*}$ ならば C は負支配対角である。

3°　$C^* \in S_{A^*}$ ならば C^* のあらゆる n 次の主座部分行列がヒックス行列である。

6. 結語的覚え書

ワルラス型の模索調整過程が動学的に安定となる十分条件を求める努力が長い間続けられ多数の要件がリストされてきた。その際，基本的な仮定が暗黙的におかれたり，十分条件が多数あげられたために，それらの関係が輻湊し混乱する危惧があった。本稿は，線形代数のばらばらに散らばった諸定理を集約整理することにより[予備定理とそれに続くもの]，上述の点に統一的な見通しを与えることができた。さらに1960年代の爆発的な文献の氾らんの後に現われた安定分析の新しい発展――例えば確率的安定性，符号安定性，模索安定の実証研究等――のうち符号安定と定性経済学の関係をとりあげ，簡単な展望を与えた。(14) 巡回と連鎖の新しい概念の導入は補完財をも考慮する森嶋行列の分析(15)や定性経済学の発展にとって重要な役割を果たしつつある。後者の問題の一層の研究は今後の課題である。

[数　学　注]

1. フィッシャー・フラー定理の証明

証明は数学的帰納法による。$n=1$ の場合は明らかである。$n=2$ の場合も（2財ケースを想定しうるので）念のため証明を与えておこう。

$n=2$ の場合，行列 AD の特性多項式 $P(\lambda)=\lambda^2-[a_{11}d_1+a_{22}d_2]\lambda+d_1d_2|A|$. $a_{11}\neq 0$, $|A|\neq 0$ としても一般性を失わない。第2の多項式 $Q(\lambda)=\left(\lambda-d_1\dfrac{a_{11}}{1}\right)\left(\lambda-d_2\dfrac{|A|}{a_{11}}\right)=\lambda^2-\left(d_1a_{11}+d_2\dfrac{|A|}{a_{11}}\right)+d_1d_2|A|$ を考えよう。後者の多項式は固有

(14) より詳細な展望論文として，アリンガム・森嶋［2］が現われた．

(15) 森嶋行列は例えば使用目的や一定の使用期間において財の間に差別がないとき妥当すると考えられる．しかし，一般に財の使用目的は多様で時を通じて差別されるのでルールは成りたたない方が多いかもしれない．最近，佐藤［33］は，ベキ乗化した粗代替行列を用い森嶋ルールの拡張を図り安定性を研究した．

根が A の引き続く主座小行列式の比に対角要素を掛けたものになっている。そのとき $\mathrm{sign}(d_1)=-\mathrm{sign}(a_{11})$, $\mathrm{sign}(d_2)=-\mathrm{sign}\left(\frac{|A|}{a_{11}}\right)$, いま $|d_1|$, $|d_2/d_1|$ を十分小さくとる。そのとき $Q(\lambda)$ は単根で実で負で絶対値は1以下である。$P(\lambda)$ と $Q(\lambda)$ の係数は十分小さな $|d_2/d_1|$ に対して任意に近づきうるから $P(\lambda)$ の根は $Q(\lambda)$ の根に任意に近づきうる。したがって $P(\lambda)$ の根は実，負，絶対値1以下となる。

次に $n-1$ 次の行列に対して DA の固有根がすべて実，負，単根であるとする。A の最後の行と列を取り去った部分行列を A_1 で表わす。明らかに A がヒックシアンであれば A_1 もヒックシアンである。したがって帰納法の仮定により，D_1A_1 の固有根がすべて実，負，単根であるように，$D_1=\mathrm{diag}(d_i)$, $d_i>0$, $i\in N-\{n\}$ を選ぶことができる。次に DA の固有根を d_n の関数として考える。そのとき固有根は行列の要素に関し連続で正の十分に小さな d_n に対しては DA の固有根はすべて依然として実で単根でそれらの $n-1$ 個は負である。しかし残りの根も負である。なぜなら，行列式は固有根の積で $(-1)^n|DA|=(-1)^n|D||A|$, さらに d_i が正で A がヒックシアンにより，$(-1)^n|D||A|>0$ であるから。 ▮

2. ホテリング＝サムエルソンの命題の証明 (p. 47)

(i) まず A が負定値であれば A^{-1} も負定値である。なぜなら，
$x'A^{-1}x=(Ay)'A^{-1}(Ay)=y'Ay>0$ より明らか，したがってすべての $x\neq 0$ に対して $\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}b_{ij}x_ix_j<0$ である。ここで特にある i に対して $x_i=1$, その他の $j(\neq i)$ に対して $x_j=0$ とすると上式は $b_{ii}<0$ である。なお，逆行列の定義により $b_{ii}=A_{ii}/|A|$ である。

(ii) 2次元の場合，$x_i=b_{jj}$, $x_j=-b_{ij}(j\neq i)$, $x_k=0(k\neq i, k\neq j)$ とおき2次形式に代入すればよい。3次元の場合 $x_i=b_{jj}b_{kk}-b_{jk}b_{kj}$, $x_j=-(b_{ij}b_{kk}-b_{ik}b_{kj})$, $x_k=b_{ij}b_{jk}-b_{ik}b_{jj}$, $x_l=0(l\neq i, j, k)$ とおき代入すればよい。以下，一般に $x_i=$第 i 行第 i 列の余因子，$x_j=$第 i 行第 j 列の余因子，… $x_n=$第 i 行第 n 列の余因子を代入すれば導出できる。

縁付き行列式 $D=\begin{vmatrix} b_{ij} & b_i \\ b_j & 0 \end{vmatrix}$ の m 次の主座小行列 $D^{12\cdots(m-1)}$ が符号 $(-1)^{n-1}$

をもつ，特に，$b_{ij}b_j^2-2b_{ij}b_ib_j+b_{jj}b_i^2<0(i\neq j)$ が成り立つことも同様にして示される。 ▌

3．サムエルソンの定理の証明

定理（サムエルソン［32，定理5］） $b_{ij}\geqq 0$, $\sum_{j=1}^{n}b_{ij}<1$ なら，$A=B-I$ はヒックス行列である。すなわち A が粗代替なら A の主座小行列式の符号は $(-1)^n$ である。

［証明］ 行列 A は対角要素が $a_{ii}=b_{ii}-1<0$，非対角要素が $a_{ij}=b_{ij}\geqq 0$ である。次元 n に関する帰納法による。$n=1$ のときは $a_{11}=b_{11}-1<0$ で明らか。次に $n=k-1$ で符号が $(-1)^{k-1}$ とするとき $n=k$ で符号が $(-1)^k$ となることを示す。$B-I$ は次のように行列の積として表わされる。

$$A=[B-I]=\left(\begin{array}{cccc|c} b_{11}-1 & b_{12} & \cdots & b_{1k-1} & 0 \\ b_{21} & b_{22}-1 & \cdots & b_{2k-1} & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ b_{k-1} & b_{k-12} & \cdots & b_{k-1k-1}-1 & 0 \\ \hline 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 \end{array}\right)\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \gamma_1 \\ & \ddots & & \gamma_2 \\ & & & \vdots \\ 0 & & 1 & \gamma_{k-1} \\ \hline b_{k1} & \cdots & b_{kk-1} & b_{kk} \end{array}\right)$$

ここで，$\gamma_j(j=1,2,\ldots,k-1)$ は次の連立方程式の解である。

$$\sum_{j=1}^{k-1}(b_{ij}-\delta_{ij})\gamma_j=b_{ik}\qquad(i=1,2,\ldots,k-1)\tag{1}$$

δ_{ij} はクロネッカーのデルタで $i=j$ なら1，$i\neq j$ なら0である。行列の積の行列式は行列式の積に等しいから

$$\det(B-I)_k=\det(B-I)_{k-1}\cdot\det\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & & 0 & \gamma_1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & 1 & \gamma_{k-1} \\ \hline b_{k1} & \cdots & b_{kk-1} & b_{kk} \end{array}\right)$$

後者は $b_{kk}-1-\sum_{j=1}^{k-1}b_{kj}\gamma_j$ に等しい，よって帰納法の仮定により $\det(B-I)_{k-1}=(-1)^{k-1}$ であるから $\det(B-I)_k=$ 符号が $(-1)^k$ となるためには $b_{kk}-1-\sum_{j=1}^{k-1}b_{kj}\gamma_j<0$ でなければならない。ところで $\sum_{j=1}^{n}b_{kj}<1$ であることを利用すると $\sum_{j=1}^{k-1}b_{kj}(1+\gamma_j)>0$ がいえればよい。しかし(1)より $\gamma_j<0$ であり，特に $-1<\gamma_j<0$ を選べば $\sum_{j=1}^{k-1}b_{kj}(1+\gamma_j)>0$ は確かに成りたち $n=k$ の場合もいえた。 ▌

参考文献

[1] Allingham, M.G. "Tatonnement Stability: An Econometric Approach" *Econometrica*, 40 (1972), 27–42.

[2] Allingham, M.G. and Morishima, "Qualitative Economics and Comparative Statics," *Theory of Demand: Real and Monetary* (eds. by) M. Morishima and Others (Oxford at the Clarendon Press 1973).

[3] Arrow, K.J., Block, H.D. and Hurwicz, "On the Stability of the Competitive economy," *Econometrica* 27 (1959), 82–110.

[4] Arrow, K.J. and Hurwicz, L. "Stability of the Competitive Equilibrium I," *Econometrica*, 26 (1958), 522–552.

[4a] Arrow, K.J. and McManus, M. "A Note on Dynamic Stability" *Econometrica*, 26 (1958), 448–454.

[5] Bassett, L., Maybee, J. and Quirk, J. "Qualitative Economics and the Scope of the Correspondence Principle", *Econometrica*, 35 (1967), 221–233.

[5a] Chipman, J.S., "Factor Price Equalization and the Stolper-Sanuelson Theorem" *International Economic Studies*, 10 (1969), 399–406.

[6] Debreu, G. and Herstein, I.N. "Nonnegative Square Matrices," *Econometrica* 21 (1953), 597–607.

[7] Fisher, Franklin, M. "A Simple Proof of Fisher and Fuller Theorem", *Proceedings of Cambridge Mathematical Society* 71 (1972), 523–525.

[8] Gale, D. and Nikaido, H. "The Jacobian Matrix and Global Univalence of Mappings," *Mathematische Annalen*, 159 (1965), 81–93.

[9] Habibagahi, H. and Quirk, J. "Hickian Stability and Walras' Law," *Review of Economic Studies* 40 (1973), 249–258.

[10] Hahn, F.H. "Gross Substitutes and the Dynamic Stability of General Equilibrium", *Econometrica* 26 (1958), 169–170.

[11] Hicks, J.R. *Value and Capital* (Oxford ; 1946).

[12] Karlin, S. *Mathematical Methods and Theory in Games, Programming, and Economics*. Vol. 1. (Addison-Wesly Pub. 1959).

[12a] Kemp, M.C. and Wegg, L.L.F. "On the Relation Between Commodity Prices and Factor Rewards" *International Economic Studies*, 10 (1969), 407–413.

[13] Kennedy, C. "The Stability of the 'Morishima System'", *Review of Economic Studies*, 37 (1970), 173–175.

[14] Maybee, J. and Quirk, J. "Qualitative Problems in Matrix Theory" *SIAM Review* 11 (1969), 30–51.

[15] Mckenzie, L.W. "The Matrix with a Dominant Diagonal and Economic Theory", *Mathematical Methods in Social Sciences* (Stanford: Stanford University Press, 1959).

[16] Metzler, L. "Stability of Multiple Markets: the Hicks Conditions", *Econometrica* 13 (1945), 277–292.

[17] Mitra, D. and So, H.C. "P Matrices and Solutions to a Class of Linear Inequalities", *SIAM Journal on Applied Mathematics* 25 (1973), 5–15.

[18] Morishima, M. "On the Laws of Change of the Price System in an Economy which contains Complementary Commodities", *Osaka Economic Papers* 1 (1952), 101–113.

[19] Morishima, M. "A Generalization of the Gross Substitute System" *Review of Economic Studies* 37 (1970), 177–185.

[20] Mosak, J. *General Equilibrium Theory in International Trade* (Wiley: 1944).

[21] Mukherji, A. "On the Sensitivity of Stability Results to the Choice of the Numeraire" *Review of Economic Studies*, 40 (1973), 427–434.

[22] Negishi, T. "A note on the Stability of an Economy where all Goods are Gross Substitutes", *Econometrica*, 26 (1958), 445–447. (根岸隆「粗代替性と経済均衡の安定」東大経済学論集) 26 (1959) 142–144.

[23] Negishi, T. "The Stability of a Competitive Economy: A Survey Article", *Econometrica*, 30 (1962), 635–669.

[24] Newman, P. "Some Notes on Stabitity Conditions", *Review of Economic Studies*, 27 (1959), 1–9.

[25] Nikaido, F. "Generalized Gross Substitutability and Extremization", *Advances in Game Theory* (Princeton: Princeton University Press, 1964).

[26] Nikaido, F. *Convex Structures and Economic Theory* (Academic Press, 1968).

[27] Ohyama, M. "On the Stability of Generalized Metzlerian Systems", *Reiew of Economic Studies* 39 (1972), 192–204.

[28] Quirk, J. and Saposnik, R. *Introduction to General Equilibrium Thory and Welfare Economics* (New York: McGraw-Hill, 1968)

[29] Quirk, J. "Complementarity and Stability of Equilibrium" *American Economic Review* 60 (1970), 358–363.

[30] Quirk, J. and Ruppert, R. "Qualitative Economics and the Stability of Equilibrium", *Review of Economic Studies* 55 (1965), 311–326.

[31] Quirk, J. "Comparative Statics Under Walras' Law: The Case of Strong Dependence", *Review of Economic Studies* 35 (1968), 11–22.

[32] Samuelson, P.A. *Foundations of Economic Analysis* (Harvard: 1947).

[33] Sato, R. "The Stability of the Competitive System Which contains Gross Complementary Goods", *The Review of Economic Studies* 39 (1972) 495–499.

[34] Uzawa, H. "The Stabitity of Dynamic Processes," *Econometrica* 29 (1961), 617–631.

[35] Weintraub, R. "Stochastic Stability of Short-run Market Equilibrium: Comment", *Quarterly Journal of Economics*, 84 (1970), 161–167.

[36] Yntema, T.O. *A Mathematical Reformulation of the General Theory of International Trade* (The University of Chicago Press 1932).

(48. 10. 11)