総合生産計画モデルの発展*

――問題解決手法の類型―― (1)

中 橋 国 蔵

Ⅰ 総合生産計画問題

本稿は，ホルト（C. C. Holt）らの定式化した基礎的な「総合生産計画」(Aggregate Production Planning, 以下ＡＰＰと略称）問題にたいする種々の解法を検討することによって，問題解決手法の類型について考察しようとするものである。[(1)]

一般的にいえば，ＡＰＰ問題とは，１カ月をこえた１カ年以内の計画期間をもつ企業の計画問題であり，現存の物的設備能力の前提のもとで，需要変動にたいして生産システムを適応させる問題である。[(2)] 企業の種々の計画問題

＊ 本稿（Ⅰ～Ⅶ）の要旨は日本経営学会北海道部会（昭和49年12月21日，北海道大学）で報告し，コメントをいただくことができた．また，本稿の［数学注］の部分については，本学の山下隆弘教授から貴重なご教示をいただいた．ここに記して感謝申し上げます．

(1) 総合生産計画モデルについてのレビューは，すでにバッファによって詳細になされている．E. S. Buffa and W. H. Taubert, *Production-Inventory Systems,* revised ed., Chaps. 5, 6, 7, Irwin, 1972. 本稿では，後述するバージン（R. C. Vergin）のモデルやリー（W. B. Lee）の研究を検討に加えることによって，問題解決手法の類型についての考察を，より包括的なものとするように試みた．

(2) *Ibid.*, pp. 149–153.

のなかでは，ＡＰＰ問題は，その決定がおよぼす影響期間およびその決定を行なう組織レベルにおいて，中間的な位置にある。(3) すなわち，ＡＰＰ問題は，長期的な戦略的計画や設備計画の下位にあるとともに，詳細な短期的日程計画にたいしてはその上位にある。したがって，ＡＰＰ問題においては，製品ミックスや物的設備能力は所与であり，制約条件として考えられている。他方，ＡＰＰは，短期的な日程計画にたいして制約を与えるのである。

このＡＰＰ問題にたいする初期の最も有名な研究は，ホルトらの研究である。(4) そして，彼らが定式化したＡＰＰ問題は，１つの標準的ないし基礎的問題として認識されている。本稿では，われわれは，ホルトらの定式化した基礎的なＡＰＰ問題をもっぱら考察の対象とする。

要言的にいえば，ホルトらのばあい，「ＡＰＰ問題とは，将来の数期間にわたる各期（通常は月）の販売予測量が与えられたときに，その数期間にわたるＡＰＰコストを最小化するように，工場全体の各期の総合的な生産量 (aggregate production) と要員数 (work force) とを動学的に決定する多期間的決定問題である」と定式化している。(5) ここで，要員数とは工場全体の従業員の数をさし，総合的な生産量とは，何らかの共通の測定尺度によって，工場全体の全製品の生産量を総計したものである。

つぎに，若干の説明を加えることによって，この定義に含まれる重要なポイントを明らかにしておこう。

第１に，各種の製品の生産量を何らかの共通の測定尺度によって総計でき

(3) W. B. Lee, *A Methodology for Implementation of Aggregate Production Planning Models*, Ph. D. Dissertation, Univ. of North Carolina at Chapel Hill, 1972, pp. 1–4.

(4) ホルトらの研究は，はじめ２つの論文に報告され，のちにより完全な内容が著書にまとめられた．C. C. Holt, F. Modigliani, and H. A. Simon, "A Linear Decision Rule for Production and Employment Scheduling," *Management Science*, Oct., 1955, pp. 1–30. C. C. Holt, F. Modigliani, and J. F. Muth, "Deviation of a Linear Decision Rule for Production and Employment," *Management Science*, Jan., 1956, pp. 159–177. C. C. Holt, F. Modigliani, J. F. Muth, and H. A. Simon, *Planning Production, Inventories, and Work Force*, Prentice-Hall, 1960.

(5) この問題構造の設定は，Holt, et al., 1960, *op. cit.*, Chaps. 2, 4 による．

るという仮定がおかれている。

第2に，ホルトらのばあい，APP問題をもっぱら生産部長ないし工場長の立場にたって考察し，各期の販売予測量の大きさとその変動のパターンは所与と仮定している。したがって，販売ないし収益の側面は全く考慮しない。APP問題はコスト最小化問題のかたちに定式化されることになる。

第3に，APPの重要課題は需要変動に対処することであるが，ホルトらは，需要変動に対処するための純粋的な代替案として，つぎの3つの方法をあげる。それによってAPPコストの成分を示すとともに，総合的な生産量と要員数という2つの変数が決定変数となることを認識するのである。

すなわち，需要変動に対処するための純粋案として，つぎの3つのものが考えられている。(6)

(1) 従業員の雇入または解雇によって各期の要員数を増減し，それによって生産量を増減する方法。

(2) 要員数は変えないで，従業員に残業または遊休をさせることによって生産量を増減する方法。

(3) 各期の生産量も要員数も変えずに，在庫量やバックオーダ量を増減することによって，受注量の変動に対処する方法。

これらの3つの方法のそれぞれを実行するとき，それに関連してコストが発生する。(7)

まず，第(1)の純粋案をとるときには，(a)正規賃金コスト (regular payroll cost) が変動するとともに，(b)雇入・解雇コスト (hiring and layoff cost) が発生する。正規賃金コストとは，従業員を一定期間雇用することに伴なって，その作業時間の長さのいかんにかかわらず支払わねばならない労務費をさしている。t 期の正規賃金コスト ($C_R{}^t$) は，t 期の要員数 (W_t) の関数としてとらえることができよう。

雇入・解雇コストは，要員数そのものの大きさに関連するコストではな

(6) *Ibid.*, pp. 48–49.

(7) 詳細については，*Ibid.*, pp. 51–57, 67–72 を参照.

く，要員数の変化，すなわち要員数を現員数よりも増加させたり減少させたりすることによって発生するコストである。要員数を増加するために新しく従業員を雇入れるときには，募集・選抜のコストや訓練コストなどが発生する。また要員数を減少させるために現従業員を解雇するときには，退職金コストや残った従業員を配置替えするためのコスト，あるいは企業イメージを悪くするという無形のコストなどが発生する。t 期の雇入・解雇コスト（$C_H{}^t$）は，($t-1$) 期の要員数（W_{t-1}）と t 期の要員数との関数であるが，($t-1$) 期のおわりにおいて前者は既知であるので，結局このコストは t 期の要員数（W_t）の関数と考えられる。

つぎに，第(2)の純粋案をとるときには，(c)残業コストあるいは遊休コストが発生する。t 期の残業・遊休コスト（$C_O{}^t$）は，t 期の生産量が，t 期の要員数が正規の作業時間で達成できる標準生産量を上まわるか下まわるかによって発生するものである。したがってこれは，t 期の生産量（P_t）と要員数（W_t）の関数としてとらえられる。

つぎに，第(3)の純粋案をとるときには，(d)在庫関連コストが発生する。t 期の在庫関連コスト（$C_I{}^t$）は，t 期の在庫量（I_t）の関数である。[8] この t 期の在庫量は，($t-1$) 期末在庫量（I_{t-1}）と t 期の生産量（P_t）と販売量（S_t）とによってきまるものである。すなわち，$I_t=I_{t-1}+P_t-S_t$. ところが，t 期の決定については，($t-1$) 期末在庫量と t 期販売予測量は与件として与えられるものであるから，結局，t 期の在庫関連コストは，t 期の生産量の関数と考えることができよう。

ＡＰＰ問題は，これら3つの純粋案のいずれか，または，それらを適当に組み合わせた種々の混合案のなかから，コスト最小の代替案を選択する問題になる。それは結局，3つの純粋案に関連して発生するコストの総和（ＡＰＰコスト）を最小化する問題であり，そこにおける決定変数は，生産量と要員数なのである。すなわち，

---

(8) ここに在庫量とは，純在庫量（＝現有在庫量－バックオーダ量）をさす．

$$
\begin{aligned}
t\text{ 期のＡＰＰコスト }(C^t) &= t\text{ 期正規賃金コスト }(C_R{}^t)\\
&\quad + t\text{ 期雇入・解雇コスト }(C_H{}^t)\\
&\quad + t\text{ 期残業・遊休コスト }(C_O{}^t)\\
&\quad + t\text{ 期在庫関連コスト }(C_I{}^t)\\
&= f_t(P_t, W_t) \qquad [1]
\end{aligned}
$$

第４に，ＡＰＰ問題は，その決定変数が時間的相互依存性をもつから，多段的（多期間的）決定問題として考察しなければならない。(9)

すなわち，t 期の生産量と要員数の決定は，t 期のＡＰＰコストをきめるばかりではない。それは，期末在庫量や要員数という状態変数を介して，$(t+1)$ 期以降のＡＰＰコストにも影響をおよぼす。そして，$(t+1)$ 期以降の各期のＡＰＰコストは，その各期の生産量と要員数をきめることによってはじめて推定することができる。したがって，ＡＰＰの第１次的な決定変数は，次期の生産量（P_1）と要員数（W_1）であるが，それを決定するにあたっては，次期のＡＰＰコストばかりでなく，次々期以降のＡＰＰコストをも考慮に入れるために，次々期以降の生産量と要員数を同時に決定する必要がある。

かくて，計画期間を T 期間とすると，ＡＰＰ問題は，この T 期間にわたるＡＰＰコストの総和（C_T）を最小化する問題と考えねばならない。そして，そこでの決定変数は，T 期間にわたる各期の生産量と要員数である。すなわち，ＡＰＰ問題は，次式のコスト C_T を最小化する多期間的決定問題としてとらえねばならない。

$$
\begin{aligned}
C_T &= \sum_{t=1}^{T} C^t = \sum_{t=1}^{T}(C_R{}^t + C_H{}^t + C_O{}^t + C_I{}^t)\\
&= f(P_1, W_1, P_2, W_2, \dots, P_T, W_T) \qquad [2]
\end{aligned}
$$

最後に，与件として与えられる将来の販売予測量の不確実性を考慮に入れ

(9) 多段的決定問題については，Buffa and Taubert, 1972, *op. cit.*, pp. 184–188, 253–256. を参照.

ると，各期の決定は動学的に行なわれなければならない(10)。すなわち，一般に販売予測量の値は，時間の経過によって新しい情報がえられるにつれて，より正しいと思われる値に修正される。さらに，企業のコスト構造も，時間の経過につれて環境条件が変わることによって変化するかもしれない。したがって，[2] において；C_T を最小化するために T 期間の各期の計画（生産量・量員数）をきめる必要があるが，そのまま実行に移されるのは次期の計画（P_1, W_1）だけである。次々期以降の計画は暫定的決定にすぎず，期間がすすんで販売予測量などの新しい情報がえられるにつれて，当然に修正される性質のものである。

ＡＰＰの基礎問題の一般的な構造は以上のように定式化できる。この問題にたいしては，非常に多数の解法が提唱されている。われわれはそこに，問題解決手法の多様性をみることができる。以下その代表的な手法をそれが発表された年代順に考察することによって，問題解決手法の類型を明らかにしたい。

Ⅱ　線型決定ルール

1.　2次コスト関数

ＡＰＰ問題の解決手法として第１にとりあげねばならないのは，ホルトらの方法である。それは，その後の研究を刺激し，つねに「比較の基準」とされる地位にある(11)からである。われわれは，ホルトらの方法を，ＯＲないし管理科学の伝統的な方法の１つの典型として特徴づけることができる。

---

(10) ここでの「動学性」(dynamic nature) の意味は，Buffa and Taubert, 1972, *op. cit.*, p. 155, あるいは，より詳しくは，H. Theil, *Optimal Decision Rules for Government and Industry*, North-Holland, 1964, p. 9. にしたがっている．この性質を考慮に入れると，厳密には，最小化すべきＡＰＰコストは，多期間にわたる期待コストとなろう．しかし本稿では，この動学性にかかわる種々の問題やその分析方法については扱わない．これについては，Holt, et al., 1960, *op. cit.*, Chaps. 6, 8, 9, あるいは，Theil, *op. cit.*, Chap. 5. などを参照．

(11) E. S. Buffa and W. H. Taubert, "Evaluation of Direct Computer Search Methods for the Aggregate Planning Problem," *Industrial Management Review*, Fall, 1967, p. 19. Buffa and Taubert, 1972, *op. cit.*, p. 227.

問題解決のためのＯＲの伝統的方法は，まず，問題状況をあらわす数学的なモデルを構築し，ついで，その問題モデルにたいする数学的な最適解を導出する，という手順をとるものであるといえよう。この手順の遂行にあたって，モデルにたいする数学的な最適解をえることを重視するのが大きな特徴である。そのために，その手順とは逆に，構築されるモデルは，利用可能な数学的最適化手法の形式に適合することを要求されることになる。

ホルトらの方法は，微分法という数学的最適化手法を利用するために，ＡＰＰコスト・モデルをつぎのような２次関数で近似するところに特徴がある。(12)

$$C_T=\sum_{t=1}^{T}C^t$$

$$=\sum_{t=1}^{T}[C_1W_t+C_{13} \qquad \text{（正規賃金コスト）}$$

$$+C_2(W_t-W_{t-1}-C_{11})^2 \qquad \text{（雇入・解雇コスト）}$$

$$+C_3(P_t-C_4W_t)^2+C_5P_t-C_6W_t+C_{12}P_tW_t \qquad \text{（残業・遊休コスト）}$$

$$+C_7(I_t-C_8-C_9S_t)^2 \qquad \text{（在庫関連コスト）}] \qquad [3]$$

ただし，

$$I_t=I_{t-1}+P_t-S_t,\ t=1, 2, \dots, T \qquad [4]$$

この目的関数において，決定変数は，T 期間にわたる各期の生産量と要員数（P_t, W_t, $t=1, 2, \cdots, T$）である。０期のおわりにおいて，０期における

(12) Holt, et al., 1960, *op. cit.*, p. 58. ホルトらのばあいは，ＡＰＰ問題の動学性，とくに販売予測量の不確実性を考慮に入れて，最終的な目的コスト関数は，多期間にわたるＡＰＰコストの期待値，すなわち $E(C_T)$ であるとしている．そして，Holt らは，制約条件式が１次で，コスト関数が２次であるときには，販売予測量としてその期待値を用いるならば，それを確定値と考えて C_T を最小化する最適解を求めると，それは $E(C_T)$ をも最小化する（確実性等価の性質）ことを証明している．*Ibid.*, Chap. 6. したがって，実際には，C_T を目的コスト関数として論をすすめることができるのである．コスト関数を２次関数で近似する大きな理由は，微分法を利用するためと，この確実性等価の性質を利用するためである．本稿でのちに考察する他の方法も，C_T を目的コスト関数としているが，それらのばあいは，コスト関数を２次関数で近似することはしないから，この確実性等価の条件は成立しない．

要員数 (W_0) と期末在庫量 (I_0) は，実績値から与えられ，各期の販売予測量 (S_t, $t=1, 2, \cdots, T, T+1, \cdots, 2T-1$) は条件として与えられる。(13) そして，定数 $C_1 \sim C_{13}$ は，当該企業のコスト構造からきめられるものである。

かくて，その数学的形式からみると，ホルトらは，ＡＰＰ問題を，「1次の制約条件式のもとでの，2次関数の最小化問題」，すなわち「2次計画法」(quadratic programming) の問題として定式化するのである。

コスト関数 [3] において，まず，正規賃金コストは，要員数の1次関数とみなされている。つぎに，雇入・解雇コストは，要員数の変化量 (W_t-W_{t-1}) の2次関数によって近似される。残業・遊休コストは，t 期の必要生産量と t 期の要員数の正規作業時間における標準生産量との差の大きさ ($P_t-C_4W_t$) の2次関数で近似できると考えられている。ここで，C_4 は労働生産性定数（単位/人・期），つまり，1人の作業者が1期間の正規作業時間で生産できる生産量をあらわす。そして，在庫関連コストは，在庫量 (I_t) と最適在庫量 (I_t^*) との差 ($I_t-I_t^*$) の2次関数であり，最適在庫量は販売量の1次関数である ($I_t^*=C_8+C_9S_t$) と考えられている。ホルトらは，これらのコストが，このような1次または2次関数で近似できる理由を列挙している。(14) なお，C_{13}, C_{11}, $C_5P_t-C_6W_t+C_{12}P_tW_t$ という項は，データへの関数のあてはめを行なうばあいに，近似をよくするために導入されたものである。

ホルトらは，その研究対象となった会社の1塗料工場について実態調査を行ない，その工場のＡＰＰコスト関数をつぎの [5] のように推定している。(15)

$$
\begin{aligned}
C_T=\sum_{t=1}^{T}\{&[340W_t]\\
&+[64.3(W_t-W_{t-1})^2]\\
&+[0.20(P_t-5.67W_t)^2+51.2P_t-281W_t]\\
&+[0.0825(I_t-320)^2]\}
\end{aligned}
\qquad [5]
$$

---

(13) $t=2, \cdots, T$ 期の暫定的決定をするためには，$T+1, \cdots, 2T-1$ 期までの販売予測量が必要である．

(14) *Ibid.*, pp. 52–57. を参照．なお，遊休コストは，遊休による生産性の低下によって発生すると考えられている．

(15) *Ibid.*, p. 59.

ここで，単位期間は月であり，C_T の測定尺度はドルであり，W_t の測定尺度は人数であり，P_t および I_t の測定尺度はガロンである。なお，[5] を求めるにあたっては，単純化のために，定数 $C_9=0$ としている。関数のあてはめを行なうと，結果として，$C_{11}=C_{12}=0$ であった。最適解の探求に無関連な定数 C_{18} はコスト関数から除去している。

2. 線型決定ルール

コスト関数 [3] を最小化する数学的最適解は，[3] を 2 種類 $2T$ 個の決定変数（$P_t, W_t, t=1, \cdots, T$）のそれぞれに関して偏微分してえられる 1 階偏導関数をゼロとおき，それによってえられる連立方程式を各決定変数について解くことによって求めることができる。ホルトらは，その能率的な解法を開発し，ルーチンな計算手順としている。[16]

ここでは，計算手順については考察を省略する。事例を用いて，計算手順の適用によってえられる「決定ルール」について検討しよう。

この計算手順を適用すると，最終的には，最適解は 1 次式から求めることができる。上述の塗料工場のコスト関数 [5] を最小化する P_t と W_t の値は，それぞれ，つぎの 2 つの 1 次式 [6] と [7] から求めることができる。[17]

$$P_t=\left\{\begin{array}{l}+0.458\,S_t\\+0.233\,S_{t+1}\\+0.111\,S_{t+2}\\+0.046\,S_{t+3}\\+0.014\,S_{t+4}\\-0.001\,S_{t+5}\\-0.007\,S_{t+6}\\-0.008\,S_{t+7}\\-0.008\,S_{t+8}\\-0.007\,S_{t+9}\\-0.005\,S_{t+10}\\-0.004\,S_{t+11}\end{array}\right\}+1.005\,W_{t-1}+153.0-0.464\,I_{t-1} \qquad [6]$$

---

(16) *Ibid.*, pp. 94–114.

(17) *Ibid.*, p. 61. 詳細な導出手順は，*Ibid.*, pp. 101–106 を参照．また，タイルは，T を有限と考えて，別の導出方法を展開している．Theil, *op. cit.*, pp. 103–111.

$$W_t=\left\{\begin{array}{l}+0.0101\,S_t\\+0.0088\,S_{t+1}\\+0.0071\,S_{t+2}\\+0.0055\,S_{t+3}\\+0.0042\,S_{t+4}\\+0.0031\,S_{t+5}\\+0.0022\,S_{t+6}\\+0.0016\,S_{t+7}\\+0.0011\,S_{t+8}\\+0.0008\,S_{t+9}\\+0.0005\,S_{t+10}\\+0.0004\,S_{t+11}\end{array}\right\}+0.742\,W_{t-1}+2.00-0.010\,I_{t-1} \qquad [7]$$

この2つの式は，t 期の最適な生産量と要員数の値は，($t-1$) 期の要員数と期末在庫量，および，将来の12期間(18)の各期の販売予測量の1次関数として計算できることを示している。この1次関数のかたちは，コスト関数［3］における定数 C_i の値のいかんにかかわらず，変わらない。そして，この1次関数における各変数の係数と定数項の値は，コスト関数［3］の定数 C_i の値の組に対応して一意的に計算される。

この2つの1次式は，決定変数の値を決定する方法となるから，決定ルールであり，(19) その数学的なかたちが1次（線型）であるから，「線型決定ルール」(linear decision rule, LDR) とよばれる。「線型決定ルール」の名前は，ホルトらの研究ないし方法の代名詞として用いられることが多いのである。われわれも，ホルトらの開発した解法をＬＤＲとよぶことにしよう。

3.　線型決定ルールの現実的意味づけ

この線型決定ルールはコスト関数［5］から数学的に導出されたものであるが，それを現実の決定行動と関連づけて，その含意を考察すると，興味ある発見をすることができる。(20)

まず，生産量決定ルール［6］をみよう。はじめの項は，t 期の生産量を決

(18) ここでは12期間の販売予測量を用いているが，すぐあとでのべるように，12という数値は絶対的なものではない.

(19) 決定ルールのより一般的な意味についてはつぎを参照．中橋国蔵稿「企業シミュレーション・モデルの基本構造」,『国民経済雑誌』昭和46年8月号，74–75ページ.

(20) Holt, et al., 1960, *op. cit.*, pp. 60–63, Chap. 8. および T. E. Vollmann, *Operations Management*, Addison-Wesley, 1973, pp. 622–623. を参照.

定するにあたって，t 期を含めて将来の 12 期間（1 年間）の各期の販売予測量を，それぞれにウエイトを付与して考慮することをあらわしている。各期の販売予測量に付与されるウエイトは，遠い将来になるほど幾何級数的に減少している。t 期には，t 期の需要ばかりでなく，将来期間の需要のための生産も行なうが，在庫保管コストは時間の関数でもあるので，遠い将来の期間の需要ほど，それを現在生産するのは望ましくないからである。理論的に厳密な真の最適決定を行なうためには，将来の無限期間の販売予測量を考えねばならない。[21] しかしながら，この事例が示すように，将来の販売予測量に付与されるウエイトは順次，急激に小さくなる。したがって，実際には，最近の数期間の販売予測量を考慮に入れれば十分である。

生産量決定ルールの第 2 の項は，当期要員数（W_{t-1}）が次期の生産量決定に影響をおよぼすことを示している。この項を介して，生産量決定ルールと要員数決定ルールの間には相互依存関係があるのである。

生産量決定ルールの最後の 2 つの項は，在庫量の調整過程をあらわしている。当期末の在庫量（I_{t-1}）が少なくて，その 46.4％（$0.464\ I_{t-1}$）が 153.0 を下まわるときには，その不足分を生産し，在庫量を増やすことになる。逆のばあいには，生産量を減らして，在庫量を削減するのである。このような在庫量の調整過程は，過去の販売予測の誤差を吸収する役割を果していると理解される。

つぎに，要員数決定ルール [7] をみよう。このルールも生産量決定ルールと同様なかたちをしており，その意味するところはほぼ同じである。ここでは，変数の測定尺度を統一するために，必要があれば係数の値を生産性定数で修正しながら，要員数決定ルールの各項の係数の値を，生産量決定ルールにおけるそれに対応する項の係数の値と比較することが重要である。

まず，要員数の決定にあたっても，将来の各期の販売予測量を考慮に入れるが，それに付与されるウエイトの大きさは，生産量決定ルールにおけるそれよりも，かなり小さい。生産量決定ルールにおけるそのウエイトの総計は

---

(21) Holt, et al., 1960, *op. cit.*, pp. 96–97.

0.821 であるが，要員数決定ルールにおけるそれは，生産性定数（$C_4=5.67$）で修正して，0.256（$=0.0452\times5.67$）にすぎない。他方，要員数決定ルールにおける各期の販売予測量に付与されるウエイトの減少傾向は，生産量決定ルールのばあいほど顕著ではない。したがって，要員数の決定は，生産量の決定よりも，長期的な視野にたって行なわれるといえる。

つぎに，要員数決定ルールの第2の項は，当期の要員数の大きさが，次期の要員数の決定に大きな影響をおよぼすことを示している。このウエイトの大きさ 0.742 は，生産量決定ルールのそれに対応する修正されたウエイト 0.176（$=1.005\div5.67$）よりもかなり大きい。

最後の2つの項は，生産量決定ルールと同様に，在庫量の調整過程である。要員数の決定に期末在庫量がおよぼす影響は，生産量決定におけるそのウエイト 0.464 に比べると，わずかに，0.0567（$=0.010\times5.67$）にすぎない。

さて，以上のような係数の値の比較は，この2つの決定ルール，したがってまた既述の3つの純粋案の性格を示唆している。すなわち，要員数の決定は，現有要員数を重視して，長期的な需要を考慮して行なわれる。短期的な需要量の変動が要員数決定におよぼす影響は小さい。かくて，要員というものは企業の長期的資源であり，要員数の変更は，比較的長期的な需要変動に対処するために行なわれるものであるといえよう。

これにたいして，生産量は，比較的近い将来の需要の大きさや在庫量の変動を重視してきめられる。したがって，残業・遊休時間は，企業の短期的資源であり，残業・遊休時間の変動という方法は，短期的な需要変動や販売予測誤差からもたらされる攪乱を吸収するために利用されるものであるといえよう。そして，在庫量の増減という方法は，需要の一時的で過度に大きい変動を吸収するために用いられるものと思われる。

線型決定ルールにおける各項の係数の値は，コスト関数の定数 C_i の値からきまるものであるから，上述のような決定ルールの性格は，コスト構造を反映したものである。つまり，一般に，従業員の雇入・解雇コストは，残

業・遊休コストや在庫関連コストよりも割高であることを反映している。コスト構造がこの塗料工場と異なる企業では，2つの決定ルールの対応する各項の係数の値の相違は，それほど顕著でないこともありうる。[22]

4. フィードバック型決定ルール

線型決定ルールにおける上述の在庫調整項は，過去の行動の結果として，理想的在庫水準と実績在庫水準との間にギャップがあるならば，在庫水準をその理想水準に近づけるように，つぎの行動を調整する過程をあらわしている。このように，生起した行動の結果をフィードバックして，その将来の結果を目標水準ないし理想水準に近づけるようにつぎの行動を調整する決定を，フィードバック型決定という。[23] 線型決定ルールは，その一部にこのような在庫調整のためのフィードバック・システムをもつばかりでない。その全体をフィードバック型ルールに書くことができるのである。[24] ここでは，上述の塗料工場の数値例を参考にして，線型決定ルールをフィードバック型ルールに変形してみよう。

まず，関数[3]にたいする最適解を決定する線型決定ルールを一般的にあらわせば，つぎのようになる。

$$P_t = \sum_{r=t}^{t+T-1} a_r S_r + k_1 W_{-1} + k_2 - k_3 I_{t-1} \qquad [8]$$

$$W_t = \sum_{r=t}^{t+T-1} b_r S^{\iota} + k_4 W_{t-1} + k_5 - k_6 I_{t-1} \qquad [9]$$

---

(22) たとえば，リーが研究した企業の例を参照. W. B. Lee, *op. cit.*, p. 99.

(23) 生産計画に関連してフィードバック機構を説明したものとしては，たとえば，つぎを参照. 松田正一，洲之内治男，杉山昌平『ORのための基礎数学3』，丸善，昭和46年，265–270ページ.

(24) 線型決定ルールがフィードバック型ルールに書きあらわせることは，バウマンやジョーンズによれば，ヤンスによって示されたといわれている. J. V. Yance, *Marshallian Elements in the Carnegie Tech Rules.* Unpublished mimeographed paper, M.I.T. E. H. Bowman, "Consistency and Optimality in Managerial Decision Making," *Management Science*, Jan., 1963, p. 314. C. H. Jones, "Parametric Production Planning," *Management Science*, Jul., 1967, p. 845. しかし，ヤンスの論文が入手できず，またヤンスがどのようにして展開したかを紹介している論文も見つからなかったので，ここでは，ジョーンズの研究に示唆をえて，われわれが独自に展開してみた.

ここで，塗料工場の数値例において，(25)

$$\sum_{r=t}^{t+T-1} a_r,\ \sum_{r=t}^{t+T-1} b_r,\ k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4,\ k_5,\ k_6>0 \qquad [10]$$

[8] の右辺の変数 W_{t-1}, [9] の右辺の変数 S_r と I_{t-1} を，それぞれ，その左辺の変数と同一の測定尺度の変数にかえるとともに，それに対応して係数 k_1, b_r, k_6 を生産性定数 C_4 で修正する。$k_1'=k_1/C_4$, $b_r'=b_r\times C_4$, $k_6'=k_6\times C_4$ とすれば，つぎの [11], [12] をえる。

$$P_t=\sum_{r=t}^{t+T-1} a_rS_r+k_1'P(W_{t-1})+k_2-k_3I_{t-1} \qquad [11]$$

$$W_t=\sum_{r=t}^{t+T-1} b_r'W(S_r)+k_4W_{t-1}+k_5-k_6'W(I_{t-1}) \qquad [12]$$

ここで，[11] における $P(W_{t-1})$ は，W_{t-1} の大きさの要員数のもとで達成できる最適生産量をさしており，$P(W_{t-1})=C_4W_{t-1}$ である。そして，[12] における $W(S_r)$と $W(I_{t-1})$ は，それぞれ，S_r と I_{t-1} の大きさの生産量を達成するために必要な最適要員数をさしており，$W(S_r)=S_r/C_4$, $W(I_{t-1})=I_{t-1}/C_4$ である。

つぎに，塗料工場の数値例において，(26)

$$0\leqq k_1'\leqq 1,\quad 0\leqq k_4\leqq 1 \qquad [13]$$

であるので，

$$\alpha=1-k_1',\quad 0\leqq\alpha\leqq 1 \qquad [14]$$

$$\beta=1-k_4,\quad 0\leqq\beta\leqq 1 \qquad [15]$$

とおき，

$$P_t^*=\left(\sum_{r=t}^{t+T-1}\frac{a_r}{\alpha}S_r\right)+\frac{k_3}{\alpha}\left(\frac{k_2}{k_3}-I_{t-1}\right) \qquad [16]$$

$$W_t^*=\left(\sum_{r=t}^{t+T-1}\frac{b_r'}{\beta}W(S_r)\right)+\frac{k_6'}{\beta}\left(\frac{k_5}{k_6'}-W(I_{t-1})\right) \qquad [17]$$

---

(25), (26) [10], [13] は，これまでに報告されている線型決定ルールのすべての数値例において成立している（ホルトらがあげている2つの数値例，Holt, et al., 1960, *op. cit.*, pp. 61, 108, 109, およびリーの事例研究，Lee, *op. cit.*, pp. 89, 99.）．しかし，[10], [13] があらゆるばあいに成立することを数学的に証明することはできなかった．ただ，要員数決定ルール [12] については，$0<\sum b_r$, $0<k_4<1$, $0<k_6$ が成立することを証明できる．後掲の［数学注］の(A)を参照．

とすれば，[11]，[12] はつぎのように書ける。

$$P_t = \alpha P_t^* + (1-\alpha)P(W_{t-1}),\quad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \qquad [18]$$

$$W_t = \beta W_t^* + (1-\beta)W_{t-1},\quad 0 \leqq \beta \leqq 1 \qquad [19]$$

[16] の右辺の第1項は，将来期間の各期の販売予測量に適当なウエイトを付与して加えたものであり，とくに，$\sum_{r=t}^{t+T-1} a_r = \alpha$ のときには，(27) 販売予測量の加重平均である。それは，将来期間の需要に対処するための t 期の準理想的生産量を意味する。そして，その準理想的生産量に第2項の在庫調整量を加えた P_t^* は，t 期の理想的生産量に相当するといえよう。同様にして，[17] において，W_t^* は，t 期の理想的要員数に相当すると考えることができよう。したがって，生産量決定ルール [18] は，t 期の生産量が，t 期の理想的生産量と $(t-1)$ 期の要員数のもとでの最適生産量との加重平均として求められることを示している。要員数決定ルール [19] の意味も同様である。

そして，[18]，[19] を書き改めれば，つぎのようなより標準的なフィードバック型ルールをえる。

$$P_t = P(W_{t-1}) + \alpha(P_t^* - P(W_{t-1})),\quad 0 \leqq \alpha \leqq 1 \qquad [20]$$

$$W_t = W_{t-1} + \beta(W_t^* - W_{t-1}),\quad 0 \leqq \beta \leqq 1 \qquad [21]$$

このようにして，線型決定ルールをフィードバック型ルールに書きなおすことによって，その現実的意味をさらによく理解することができる。たとえば，[21] に示されるように，t 期の最適要員数は，$(t-1)$ 期の要員数をフィードバックして t 期の理想的要員数と比較し，その理想水準に近づけるようにきめられるのである。

重要なことは，このようなフィードバック型の決定行動は，現実の経営者の行動にもみられることである。そのために，ＡＰＰ問題の解を求める決定

---

(27) 2次コスト関数[3]において，塗料工場の事例に示されるように，多くのばあい，$C_9 = C_{12} = 0$ とされる．このときには，線型決定ルール [8]，[9] あるいは [11]，[12] において，$\sum_r a_r + k_1/C_4 = 1$，$\sum_r b_r C_4 + k_4 = 1$，あるいは，$\sum_r a_r = \alpha$，$\sum_r b_r' = \beta$ が成立することを証明できる．後掲の[数学注]の(B)を参照．ちなみに，塗料工場の線型決定ルール [6]，[7] においては，$\sum a_r + k_1/C_4 = 0.821 + 1.005/5.67 = 0.821 + 0.177 = 0.998$，$\sum b_r C_4 + k_4 = 0.0452 \times 5.67 + 0.742 = 0.256 + 0.742 = 0.998$.

ルールがフィードバック型ルールのかたちに書けることは，ヒューリスティック・アプローチをとる後述のバウマンやジョーンズの研究に大きな影響をおよぼすことになるのである。フィードバック型決定ルールにおける若干の係数の意味や理想的要員数の概念などについては，のちにジョーンズの方法を検討するときに，さらに説明を加えるであろう。

5. LDRの有効性

ホルトらの研究の意義は，数学的な決定モデルを展開したばかりでなく，その方法を現実の企業のデータに適用してその有効性を示していることにある。[28] 研究対象となった塗料工場が，データをえたのと同一の期間において，もしLDRの方法によって決定を行なっていたならば，APPコストを約8%低減できたであろうことが示されている。そして，現実の決定によって発生したコストと，LDRによって決定を行なっていたならば発生したであろうコストを成分にわけて比べると，LDRの利用によるコスト低減は，もっぱら正規賃金コストとバックオーダ・コストの低減によっている。残業コストと在庫保管コストは逆に増加している。かくて，重要なことは，最適なAPP決定は，純粋案的な単純な思いつきによる方法によってではなくて，種々の方法を組み合わせることによって達成されるものであるということである。このことは，他の事例研究によっても示されている。[29]

6. LDRの利点と限界

LDRは，定式化された数学的なコスト・モデルにたいしては数学的最適解を保証するという強みをもっている。そして，コスト関数の推定や決定ルールの導出にはやや手数がかかるが，ひとたび決定ルールが求められると，それによってルーチンに，簡単に，決定をなすことができるという実施上の利点もある。

しかしながら，その数学的最適解をえるためには，問題モデルを，1本の1次制約条件式のもとでの2次のコスト関数の最小化というかたちにあらわ

---

(28) Holt, et al., 1960, *op. cit.*, pp. 16–25.
(29) たとえば，W. B. Lee, *op. cit.*, p. 104.

さねばならない。そこで，ＬＤＲの大きな限界としてはつぎの２点があげられている。(30)

第１に，現実のＡＰＰコスト関数は２次関数によってよく近似できないことがある。そのときには，２次関数によって無理に近似して最適解を求めても，その解は現実の問題にたいしては十分に有効な解とはならない。

第２に，ＬＤＲの方法では，要員数についての方針制約や資本や物的設備の制約などの種々の制約条件を十分に考慮に入れることができない。制約条件式の数を増すと数学的最適解の導出が困難になってくる。

要するに，ＬＤＲの方法では，現実の問題状況を十分に考慮に入れることができないおそれがあるのである。そこで，次節以下でのべる種々のヒューリスティックな方法が展開されてきたのである。それらの方法の共通の特徴は，現実的な問題モデルの構築を重視し，現実の問題にたいして，数学的最適解である保証はないが，有効で満足な解を提供しようとするところにある。

（未完）

(49. 12. 28)

［数学注］（A）

上掲の２次コスト関数［3］にたいする次期の最適要員数 $W_1{}^0$ を決定する線型決定ルール：

$$W_1{}^0=\sum_{r=1}^{\infty}b_rS_r+k_4W_0+k_5-k_6I_0 \qquad [\mathrm{A}\,1]$$

において，

$$0<\sum_{r=1}^{\infty}b_r,\quad 0<k_4<1,\ 0<k_6 \qquad [\mathrm{A}\,2]$$

が成立することを証明する。

ホルトらが展開しているように，最適要員数 $W_1{}^0$ は，つぎの連立方程式を

(30) Buffa and Taubert, 1972, *op. cit.*, p. 226. V. Jääskeläinen, "A Goal Programming Model of Aggregate Production Planning," *Swedish Journal of Economics*, Vol. 71, No. 2, 1969, p. 15. S. M. Lee, *Goal Programming for Decision Analysis*, Auerbach, 1972, p. 163.

解くことによって求めることができる（Holt, et al., 1960, *op. cit.*, pp. 94–101）。

$$(C_{19}-C_{21}\lambda_i+C_{17}\lambda_i^2)W_1+C_{17}(1-\lambda_i^{-1})W_2$$
$$=[1+C_9(1-\lambda_i)](\sum_{r=1}^{\infty}\lambda_i^{r-1}S_r)$$
$$+[C_{15}+C_{17}(1-\lambda_i)]W_0-I_0+C_8-\frac{C_{10}}{C_{14}}\frac{1}{1-\lambda_i},\quad i=1,2 \quad [\mathrm{A}3]$$

ここに，λ_i, $i=1, 2$ は，補助方程式

$$C_{17}\lambda^{-2}-C_{21}\lambda^{-1}+C_{22}-C_{21}\lambda+C_{17}\lambda^2=0 \quad [\mathrm{A}4]$$

の根であり，いずれも実数か，または互いに共役な複素数であり，しかも，

$$0<|\lambda_i|<1, \qquad i=1, 2 \quad [\mathrm{A}5]$$

である。

そして，

$$\begin{aligned}
&C_{10}\equiv C_1-C_6\\
&C_{14}\equiv 2C_3C_4-C_{12}\\
&C_{15}\equiv 2C_2/C_{14}\\
&C_{16}\equiv 2C_3C_4^2/C_{14}\\
&C_{17}\equiv C_8C_{15}/C_7\\
&C_{18}\equiv(C_8C_{16}/C_7)-(C_{14}/2C_7)\\
&C_{19}\equiv 2C_{15}+C_{16}+3C_{17}+C_{18}\\
&C_{20}\equiv C_{15}+3C_{17}+C_{18}\\
&C_{21}\equiv C_{15}+4C_{17}+C_{18}\\
&C_{22}\equiv C_{16}+2C_{18}+2C_{15}+6C_{17}
\end{aligned} \quad [\mathrm{A}6]$$

（[A 6] は後述の [数学注] (B) でも利用するために，[数学注] (A) においては不要なものも含んでいる。）

[A 3] を W_1 について解き，[A 1] の各係数と対照すると，

$$\sum_{r=1}^{\infty}b_r=\frac{B}{D} \quad [\mathrm{A}7]$$

$$k_4=\frac{K_4}{D} \qquad [A8]$$

$$k_5=\frac{K_5}{D} \qquad [A9]$$

$$k_6=\frac{K_6}{D} \qquad [A10]$$

$$D=\frac{C_{17}(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}[C_{15}+C_{16}$$
$$+(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\{C_{15}+C_{17}+C_{18}+C_{17}(2-\lambda_1-\lambda_2\}] \qquad [A11]$$

$$B=\frac{C_{17}(\lambda_1-\lambda_2)(1-\lambda_1\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}+\frac{C_9(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2} \qquad [A12]$$

$$K_4=\frac{C_{17}(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2}\{C_{15}+C_{17}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)\} \qquad [A13]$$

$$K_5=\frac{C_{17}(\lambda_1-\lambda_2)}{C_{14}\lambda_1\lambda_2(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)}\{C_8C_{14}(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)$$
$$-C_{16}(1-\lambda_1\lambda_2)\} \qquad [A14]$$

$$K_6=\frac{C_{17}(\lambda_1-\lambda_2)}{\lambda_1\lambda_2} \qquad [A15]$$

λ_i, $i=1, 2$ が実数のばあいも複素数のばあいも，[A5] の性質から，

$$(1-\lambda_1)(1-\lambda_2)>0 \qquad [A16]$$

$$2-\lambda_1-\lambda_2>0 \qquad [A17]$$

$$1-\lambda_1\lambda_2>0 \qquad [A18]$$

他方において，コスト関数の性質から，

$$0\leqq C_9, C_{18}, \quad 0<C_j,\ j=14, \dots, 17$$

かくて

$$0<\frac{B}{D}=\sum_{r=1}^{\infty}b_r$$

$$0<\frac{K_4}{D}=k_4<1$$

$$0<\frac{K_6}{D}=k_6$$

（証明終）

［数学注］（B）

上掲の2次コスト関数［3］において，$C_9=C_{12}=0$ のときには，次期の最適生産量 P_1^0 と最適要員数 W_1^0 とを決定する2つの線型決定ルール：

$$P_1^0=\sum_{r=1}^{\infty}a_rS_r+k_1W_0+k_2-k_3I_0 \qquad [B1]$$

$$W_1^0=\sum_{r=1}^{\infty}b_rS_r+k_4W_0+k_5-k_6I_0 \qquad [B2]$$

において，

$$\sum_{r=1}^{\infty}a_r+k_1/C_4=1 \qquad [B3]$$

$$C_4\sum_{r=1}^{\infty}b_r+k_4=1 \qquad [B4]$$

が成立することを証明する。

はじめに，［B4］が成立することを証明しよう。

ホルトらが展開しているように（Holt, et. al., 1960, *op. cit.*, pp. 94–97.），目的関数［3］にたいする最適要員数は，つぎの式から求めることができる。

$$\begin{pmatrix} W_1^0 \\ W_2^0 \\ W_3^0 \\ W_4^0 \\ \vdots \\ W_i^0 \\ \vdots \end{pmatrix} = \boldsymbol{K}^{-1} \begin{pmatrix} (1+C_9)S_1+(C_{15}+C_{17})W_0+C_8-(C_{10}/C_{14})-I_0 \\ -C_9S_1+(1+C_9)S_2-C_{17}W_0 \quad -(C_{10}/C_{14}) \\ -C_9S_2+(1+C_9)S_3 \quad -(C_{10}/C_{14}) \\ -C_9S_3+(1+C_9)S_4 \quad -(C_{10}/C_{14}) \\ \vdots \\ -C_9S_{i-1}+(1+C_9)S_i \quad -(C_{10}/C_{14}) \\ \vdots \end{pmatrix} \qquad [B5]$$

$$\boldsymbol{K}=\begin{pmatrix} C_{19}-C_{20} & C_{17} & & & & & & \\ -C_{21} & C_{22}-C_{21} & C_{17} & & & & & \\ C_{17}-C_{21} & C_{22}-C_{21} & C_{17} & & & \boldsymbol{O} & & \\ & C_{17}-C_{21} & C_{22}-C_{21} & C_{17} & & & & \\ & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ & & & C_{17}-C_{21} & C_{22}-C_{21} & C_{17} & & \\ \boldsymbol{O} & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \qquad [B6]$$

さて，行列式 $|K|$ の第 i 行第 j 列要素の余因数を $|K_{ij}|$ であらわすならば，

$$K^{-1}=\frac{1}{|K|}\begin{vmatrix} |K_{11}| & |K_{21}| & \cdots & |K_{j1}| & \cdots \\ |K_{12}| & |K_{22}| & \cdots & |K_{j2}| & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \\ |K_{1i}| & |K_{2i}| & \cdots & |K_{ji}| & \cdots \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \end{vmatrix} \qquad [\mathrm{B7}]$$

したがって，［B5］と［B7］とから，

$$\begin{aligned} W_1{}^0=\frac{1}{|K|}[\,&|K_{11}|\{(1+C_9)S_1+(C_{15}+C_{17})W_0+C_8-(C_{10}/C_{14})-I_0\} \\ &+|K_{21}|\{-C_9S_1+(1+C_9)S_2-C_{17}W_0-(C_{10}/C_{14})\} \\ &+|K_{31}|\{-C_9S_2+(1+C_9)S_3-(C_{10}/C_{14})\} \\ &\qquad\vdots \\ &+|K_{j1}|\{-C_9S_{j-1}+(1+C_9)S_j-(C_{10}/C_{14})\} \\ &+|K_{j+1,1}|\{-C_9S_j+(1+C_9)S_{j+1}-(C_{10}/C_{14})\} \\ &\qquad\vdots \qquad\qquad] \end{aligned} \qquad [\mathrm{B8}]$$

［B2］と［B8］とを対照すると，

$$|K|b_r=\{(1+C_9)|K_{r1}|-C_9|K_{r+1,1}|\},\quad r=1,\ 2,\ \cdots,\ j,\ \cdots. \qquad [\mathrm{B9}]$$

$$|K|k_4=\{(C_{15}+C_{17})|K_{11}|-C_{17}|K_{21}|\} \qquad [\mathrm{B10}]$$

かくて，$C_9=0$ ならば

$$\begin{aligned} &(C_4\sum_{r=1}^{\infty}b_r+k_4)|K| \\ &=C_4(|K_{11}|+|K_{21}|+|K_{31}|+\cdots+|K_{j1}|+\cdots) \\ &\qquad\qquad+(C_{15}+C_{17})|K_{11}|-C_{17}|K_{21}| \\ &=(C_4+C_{15}+C_{17})|K_{11}|+(C_4-C_{17})|K_{21}| \\ &\qquad\qquad+C_4(|K_{31}|+\cdots+|K_{j1}|+\cdots) \end{aligned} \qquad [\mathrm{B11}]$$

他方において，行列式の基本性質として，その 1 つの列に他の列を加えても，行列式の値は変わらない。そこで，［B6］から形成される行列式 $|K|$ において，第 1 列に，第 2 列以下の各列を加えると，

$$|\boldsymbol{K}|=\begin{vmatrix} (C_{17}+C_{19}-C_{20}) & -C_{20} & C_{17} & & & & & & \\ (C_{17}-2C_{21}+C_{22}) & & C_{22}-C_{21} & C_{17} & & & & & \\ (2C_{17}-2C_{21}+C_{22}) & -C_{21} & C_{22}-C_{21} & C_{17} & & & & & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & & \\ \cdot & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & & \\ (2C_{17}-2C_{21}+C_{22}) & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & & & & & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \ \cdot \end{vmatrix} \qquad [\mathrm{B12}]$$

［A6］を用いて［B12］の第1列の要素を書きかえると，それぞれ，つぎのようになる。

$$\begin{aligned} &C_{17}+C_{19}-C_{20}=C_{15}+C_{16}+C_{17} \\ &C_{17}-2C_{21}+C_{22}=C_{16}-C_{17} \\ &2C_{17}-2C_{21}+C_{22}=C_{16} \end{aligned} \qquad [\mathrm{B13}]$$

したがって，［B7］，［B12］，［B13］から，行列式 $|\boldsymbol{K}|$ を第1列について展開すると，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{K}|=(C_{15}+C_{16}+C_{17})|\boldsymbol{K}_{11}|+(C_{16}-C_{17})|\boldsymbol{K}_{21}| \\ +C_{16}(|\boldsymbol{K}_{31}|+\cdots+|\boldsymbol{K}_{j1}|+\cdots) \end{aligned} \qquad [\mathrm{B14}]$$

そして，$C_{12}=0$ ならば，［A6］から，$C_{16}=C_4$ であるから，

$$\begin{aligned} |\boldsymbol{K}|=(C_4+C_{15}+C_{17})|\boldsymbol{K}_{11}|+(C_4-C_{17})|\boldsymbol{K}_{21}| \\ +C_4(|\boldsymbol{K}_{31}|+\cdots+|\boldsymbol{K}_{j1}|+\cdots) \end{aligned} \qquad [\mathrm{B15}]$$

かくて，［B11］と［B15］とから，

$$(C_4\sum_{r=1}^{\infty}b_r+k_4)|\boldsymbol{K}|=|\boldsymbol{K}|$$

$$\therefore\quad C_4\sum_{r=1}^{\infty}b_r+k_4=1$$

以上によって，［B4］の成立が証明された。つぎに，［B3］の成立を証明しよう。

ホルトらが展開しているように（*Ibid.*, p. 94），当期の最適生産量 $P_1{}^0$ は次式から求めることができる。

$$P_1{}^0=C_{10}/C_{14}-C_{15}W_2{}^0+(C_{16}+2C_{15})W_1{}^0-C_{15}W_0 \qquad [\mathrm{B16}]$$

$W_2{}^0$ を決定する線型決定ルールも，［B2］と同様なかたちをしている。そのルールにおいて S_r の係数を d_r, W_0 の係数を k_7 とすると，上述の証明と同様にして，$C_9=C_{12}=0$ のときには，

$$C_4\sum_{r=1}^{\infty}d_r+k_7=1 \qquad [B17]$$

が成立することを証明できる。

したがって，$W_1{}^0$ と $W_2{}^0$ を決定する線型決定ルールを［B16］に代入し，えられた1次式を［B1］と対照すると，

$$\sum_{r=1}^{\infty}a_r=-C_{15}\sum_{r=1}^{\infty}d_r+(C_{16}+2C_{15})\sum_{r=1}^{\infty}b_r \qquad [B18]$$

$$k_1=-C_{15}\cdot k_7+(C_{16}+2C_{15})k_4-C_{15} \qquad [B19]$$

かくて，$C_9=C_{12}=0$ のときには，$C_{16}=C_4$ だから，［B18］，［B19］，［B4］，［B17］から，

$$\sum_{r=1}^{\infty}a_r+k_1/C_4$$

$$=-C_{15}(\sum_{r=1}^{\infty}d_r+k_7/C_4)+(C_4+2C_{15})(\sum_{r=1}^{\infty}b_r+k_4/C_4)-C_{15}/C_4$$

$$=-C_{15}/C_4+(C_4+2C_{15})/C_4-C_{15}/C_4$$

$$=1$$

（証明終）