2つの交代質問を用いるランダム回答法

—— 数量的特性に関するモデル ——

久　次　智　雄

目　　次

§0.　は　じ　め　に

個人の秘密に属する事項の調査においては，回答の拒否あるいはわざと歪められた回答などのために結果に大きな偏りを生ずるおそれがある。Warner［7］は1965年に，正しい回答が調査員には分からないようにして調査することによって調査にたいする協力度を向上させることをねらいとして，回答するさいに確率化の過程を導入する方法を考案し，これを「ランダム回答法（randomized response model）と名付けた。

本稿では §1. において現在までのランダム回答法の進展のあらましを，

§2. において Greenberg 等 [4] による数量的回答を扱うモデルの要点を紹介する。

§3. においては，Folsom 等 [2] が 2区分の定性的特性の場合について示した「2つの交代質問法」を数量的特性の場合について提示し，理論的な検討を行なう。またその結果との比較のために，Greenberg 等 [4] のモデルについての補足計算を 2.2，2.3 にまとめた。

§1. ランダム回答法の進展

1.1 Warner のモデル

最初に Warner [7] が扱ったのは，2区分の定性的特性に関するモデルである。母集団のうち割合 π_A を占めるグループ A は調査されることをあまり好まないある特性をもち，非 A グループはその特性をもたない場合に，割合 π_A を推定することを考える。いま確率化の装置（たとえば回転針の付いた装置など）を用いて，回答者は次の2つの質問のうち一方を調査員には分からないようにして無作為に選ぶ。

あなたはグループ A に属しますか？　（抽出確率$=P$）

あなたはグループ非 A に属しますか？　（抽出確率$=1-P$）

そして選ばれた質問に対する然り又は否の答のみを調査員に告げる。このとき然りと答える者の割合 $\bar{Z}$ の期待値は

$$E(\bar{Z})=\lambda\equiv P\pi_A+(1-P)(1-\pi_A)$$

となるから，$P\neq 1/2$ のとき，π_A の最尤不偏推定量 $\hat{\pi}_A$ およびその分散は

$$\hat{\pi}_A=(\bar{Z}+P-1)/(2P-1)$$

$$V(\hat{\pi}_A)=\frac{\lambda(1-\lambda)}{n(2P-1)^2}=\frac{1}{n}\left\{\pi_A(1-\pi_A)+\frac{P(1-P)}{(2P-1)^2}\right\}$$

で与えられる。P を0または1に近づけると分散 $V(\hat{\pi}_A)$ は小さくなるが，$P=0$ または1とするとランダム化の趣旨が失なわれるので，結局 P の値としては回答者の協力を損なわない範囲で $V(\hat{\pi}_A)$ を小さくする値，すなわち $P=0.8\pm0.1$ または 0.2 ± 0.1 程度が選ばれることになる。

Abul-Ela 等［1］はモデルを拡張して3区分の定性的特定の場合を詳細に検討し，t 区分の場合への拡張をも述べた。t 区分の場合には，確率 P の値の組が異なるように定めた（$t-1$）組の標本を利用している。また彼等は，子供を生んだ女子のうち，“出生届のときに未婚の者”，および“妊娠中に結婚した者”の割合の推定の問題に対する3区分モデルの適用例の概要を報告している。

1．2 無関係な質問法

当初のモデルの一改善案としては「無関係な質問法（unrelated question model)」がある。この方法については Greenberg 等［3］が理論的な面の検討を加えている。

Warner の方法では両質問とも属性 A に関連するものとなっているが，無関係な質問法では，その第2の質問を，特性 A と無関係でしかも回答するのに全く抵抗を生じないような特性 Y に関するものに置き換えた形式による。Y の母集団比率 π_Y が既知の場合には π_A を推定するのに一組の標本を用いればよい。π_Y が未知の場合は独立な2組の標本を用いる。

後者の場合，$i=1,\ 2$ に対して，単純な復元抽出による大きさ n_i の第 i 標本で質問 A を選ぶ確率を P_i（すなわち質問 Y を選ぶ確率を $Q_i=1-P_i$）とするとき，然りと答える者の割合 $\bar{Z}_i$ の期待値は

$$E(\bar{Z}_i)=\lambda_i=P_i\pi_A+Q_i\pi_Y \qquad i=1,\ 2$$

となる。π_A の不偏推定量 $\hat{\pi}_{AU}$ およびその分散は

$$\hat{\pi}_{AU}=(Q_2\bar{Z}_1-Q_1\bar{Z}_2)/(P_1-P_2)$$

$$V(\hat{\pi}_{AU})=\frac{1}{(P_1-P_2)^2}\left\{\frac{Q_2{}^2\lambda_1(1-\lambda_1)}{n_1}+\frac{Q_1{}^2\lambda_2(1-\lambda_2)}{n_2}\right\}$$

で与えられる。P_1 の値は回答者の協力のえられる範囲でできるだけ大きく，$P_1=0.8\pm0.1$ 程度にとることとする。Moors［5］はこの方法の最適条件を検討しているが，たとえば P_2 の最適な値は 0，すなわち第2の標本を Y の推定のみに用いるのがよい。

無関係な質問法は，実用上用いられる母数の範囲内では，Warner の当初の方法より理論的精度の点で優っている。(1)

1．3　手法のその他の進展

ランダム回答法で用いられるその他の手法としては，回答者あたり2回の試行を行なうこととか，無関係の質問を確率化装置の中に組み込むことなどが検討されている。(2) 後者の装置としては，たとえば箱の中に赤，白，青の球を入れ，赤球（選ばれる確率は P_1）は問題とする属性 A に関する質問に答えるようにとの指示を示し，白球と青球（選ばれる確率はそれぞれ P_2, P_3）はそれぞれたんに“然り”，“否”と答えるようにとの指示を示すことにする。この方法は，無関係な質問法における π_Y の値を既知の値 $P_2/(P_2+P_3)$ とした場合に相当する。

また逆瀬川・高橋［6］は有限母集団の場合の扱い方および繰り返しのある場合の方法を検討している。

さらに Folsom 等［2］は理論的精度を上げる方法として「2つの交代質問法」(3) を提案し，酒が好きな者のうち“過去1年間に自己の過失による交通事故を起こした者”の割合の推定の問題にたいする適用例を示している。

以上で扱かわれているのは定性的特性に関するものであるが，数量的特性に関するモデルは Greenberg 等［4］にその適用例とともに示されている。(4)

一方 Warner［8］は問題を一般化して，推定すべきベクトル量 $\boldsymbol{x}$ が既知の確率分布をもつ線形ベクトル値関数 $\boldsymbol{f}$ によって変換されてベクトル $\boldsymbol{y}=\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ のみを観察する場合に $\boldsymbol{x}$ を推定する問題として考察するとき，各種のランダム回答法が一般化最小2乗法により統一的に扱かわれることを示した。また彼は考えられうる新たないくつかのモデル(5) について示唆を与えて

(1)　たとえば Moors［5］表1′を参照．
(2)　Greenberg 等［4］における引用を参照．
(3)　この手法の考え方については§3．を参照．
(4)　この手法の要点については§2．を参照．
(5)　たとえば真の値 X に乱数項 T を加えるかまたは掛けるかしたものを回答値 Y とする方法など．

いる。(6)

§2. 数量的特性に関する無関係な質問法

2.1 モデルの概要

§3. で述べるモデルと比較するために，Greenberg 等 [4] による標記の方法の要点を以下にまとめておく。無関係な質問法における特性 A および Y をここではいずれも数量的特性とする。(7) それらの母平均を μ_A, μ_Y, 母分散を $\sigma_A{}^2$, $\sigma_Y{}^2$ とする。

大きさ n_1, n_2 の2組の互いに独立な単純復元抽出による標本を用い，両標本において質問 A を選ぶ確率をそれぞれ P_1, P_2, 質問 Y を選ぶ確率をそれぞれ $Q_1=1-P_1$, $Q_2=1-P_2$ とするとき，回答値の標本平均 $\bar{Z}_1$, $\bar{Z}_2$ の期待値は

$$E(\bar{Z}_i)=\lambda_i\equiv P_i\mu_A+Q_i\mu_Y \qquad i=1,\ 2 \tag{2.1}$$

となる。$P_1\neq P_2$ のとき μ_A の不偏推定量 $\hat{\mu}_A$ およびその分散は次のようになる。

$$\hat{\mu}_A=(Q_2\bar{Z}_1-Q_1\bar{Z}_2)/(P_1-P_2) \tag{2.2}$$

$$\begin{aligned}V(\hat{\mu}_A)&=\{Q_2{}^2V(\bar{Z}_1)+Q_1{}^2V(\bar{Z}_2)\}/(P_1-P_2)^2\\&=\frac{1}{(P_1-P_2)^2}\left\{\frac{Q_2{}^2a_1}{n_1}+\frac{Q_2{}^2a_2}{n_2}\right\}\end{aligned} \tag{2.3}$$

ここで

$$\begin{aligned}a_i&=V(Z_i)=E(Z_i{}^2)-\{E(Z_i)\}^2\\&=P_i(\sigma_A{}^2+\mu_A{}^2)+Q_i(\sigma_Y{}^2+\mu_Y{}^2)-(P_i\mu_A+Q_i\mu_Y)^2\\&=P_i\sigma_A{}^2+Q_i\sigma_Y{}^2+P_iQ_i(\mu_Y-\mu_A)^2\\&=\sigma_A{}^2(P_i+Q_i\phi_1{}^2+P_iQ_i\phi_2{}^2)\end{aligned} \tag{2.4}$$

---

(6) 上記以外の関連文献については [2], [4] を参照.

(7) 年間所得を調べる場合の質問 A, Y の定め方の例を [4] より引用しておく.

質問 A あなたの世帯の世帯主は過去1年間に何ドルの所得がありましたか?

質問 Y (無関係な質問) あなたの世帯と同人数の平均的な世帯主は年に何ドルの所得があるとお考えになりますか?

$$\phi_1=\sigma_Y/\sigma_A,\ \phi_2=(\mu_Y-\mu_A)/\sigma_A \tag{2. 5}$$

なお $V(\bar{Z}_i)$ は，標本分散を用いて s_i^2/n_i の形で標本から推定可能である。

標本総数 $n=n_1+n_2$ を一定として分散を最小にするには

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{opt.}=\sqrt{\frac{Q_2{}^2a_1}{Q_1{}^2a_2}}=\sqrt{\frac{Q_2{}^2}{Q_1{}^2}\ \frac{P_1+Q_1\phi_1{}^2+P_1Q_1\phi_2{}^2}{P_2+Q_2\phi_1{}^2+P_2Q_2\phi_2{}^2}} \tag{2. 6}$$

と定める。このとき分散の最小値は

$$V(\hat{\mu}_{A2}{}^*)=\frac{(Q_2\sqrt{a_1}+Q_1\sqrt{a_2})^2}{n(P_1-P_2)^2} \tag{2. 7}$$

いま μ_Y, $\sigma_Y{}^2$ の値が別資料から利用可能な場合[(8)]は標本は1組のみで十分となり，μ_A の推定量 $\hat{\mu}_{A1}$ およびその分散は次のとおり．

$$\hat{\mu}_{A1}=(\bar{Z}-Q\mu_Y)/P \tag{2. 8}$$

$$V(\hat{\mu}_{A1})=a/(nP^2) \tag{2. 9}$$

ここで

$$a=\sigma_A{}^2(P+Q\phi_1{}^2+PQ\phi_2{}^2) \tag{2. 10}$$

2．2　モデルの最適条件[(9)]

ここでは分散 $V(\hat{\mu}_A)$ を最小にするような母数 σ_Y, μ_Y, P_1, P_2 の最適値の選び方について考える。(2．3) 式に (2．4) 式を代入すると

$$V(\hat{\mu}_A)=\frac{\sigma_A{}^2}{(P_1-P_2)^2}\left\{\frac{Q_2{}^2}{n_1}(P_1+Q_1\phi_1{}^2+P_1Q_1\phi_2{}^2)\right.$$

$$\left.+\frac{Q_1{}^2}{n_2}(P_2+Q_2\phi_1{}^2+P_1Q_1\phi_2{}^2)\right\} \tag{2. 11}$$

この式の形より明らかに，母数 ϕ_1, ϕ_2 に関しては $\phi_1=\phi_2=0$, すなわち $\sigma_Y=0$, $\mu_Y=\mu_A$ とするとき $V(\hat{\mu}_A)$ は最小となる。ただし $\sigma_Y=0$ とすることは回答者の協力を損なう恐れがあるので，実際には σ_Y が σ_A 程度以上となる事項 Y を選ぶ必要があろう。

---

(8)　質問 Y を確率化装置に組み込んだ場合，すなわち $f(y)\geqq 0$, $\Sigma f(y)=1$ とし，装置からはたんに“y”と答えよという指示が確率 $Qf(y)$ で出される場合をも含むことに注意されたい．

(9)　2．2 の検討は，2区分の定性的特性の場合の Moors [5] の方法にほぼ準ずる．

次に母数 P_1, P_2 に関しては $P_1>P_2$ と仮定しても一般性を失なわない。(2．11) 式をまず P_1 に関して偏微分すると

$$\frac{\partial V(\hat{\mu}_A)}{\partial P_1}=\frac{-1}{(P_1-P_2)^3}\left[\frac{Q_2{}^2\sigma_A{}^2}{n_1}\{P_1+P_2+(Q_1+Q_2)\phi_1{}^2+(P_1Q_2+P_2Q_1)\phi_2{}^2\}+\frac{2Q_1Q_2}{n_2}a_2\right]<0$$

よって $V(\hat{\mu}_A)$ を小さくするには P_1 を回答者の協力のえられる範囲でなるべく大きく，$P_1=0.8\pm0.1$ 程度にとるのがよい。

P_2 に関して同様にして $\partial V(\hat{\mu}_A)/(\partial P_1)>0$ となるから，P_2 の最適値は0，すなわち第2の標本は μ_Y の推定のみに用いるのがよい。Greenberg 等 [4] では $P_1+P_2=1$ となるように P_2 を選ぶことを提案しているが，この提案には余り根拠がない。(10)

2．3 相対効率

次に §4．の結果と比べるために，上述の方法による μ_A の推定量の分散を，同じ標本の大きさ n をもつ通常の方法による推定量 $\hat{\mu}_{A0}$ の分散 $V(\hat{\mu}_{A0})=\sigma_A{}^2/n$ と比較しておこう。(11) 計算の便宜上以下ではランダム回答法による推定量 $\hat{\mu}$ について，$\hat{\mu}_{A0}$ に対する分散比（相対効率の逆数）

$$V(\hat{\mu})/(\sigma_A{}^2/n)$$

を考察する。

まず Y に関する既知情報があるときには，推定量 $\hat{\mu}_{A1}$ の分散式 (2．9) を (2．10) を用いて書き直すと，分散比は次のようになる。

$$\frac{V(\hat{\mu}_{A1})}{(\sigma_A{}^2/n)}=\frac{1}{P^2}(P+Q\phi_1{}^2+PQ\phi_2{}^2) \qquad (2．12)$$

次に一般の無関係な質問法のときには，まず分散 $V(\hat{\mu}_A)$ を P_2 に関して最適化して $P_2=0$ とおき，さらに n_1, n_2 に関して最適配分した場合のみを

(10) そのことは定性的特性の場合について Moors [5] が指摘している．

(11) ランダム回答法より通常の方法の方が偏りが大となることが予想されるので，想定される平均平方誤差を比較するのが実際的かもしれないが，本稿ではそこまで立ち入らない．

取り上げる。このときの推定量 $\hat{\mu}_{A2}{}^*$ の分散比は，(2. 7) 式で $P_1=P$, $Q_1=Q$, $P_2=0$, $Q_2=1$ とおき，$a_2=\sigma_Y{}^2=\phi_1{}^2\sigma_A{}^2$ となることなどに注意すると

$$V(\hat{\mu}_{A2})/(\sigma_A{}^2/n)=(\sqrt{a_1}+Q\sqrt{a_2})^2/(nP^2\sigma_A{}^2/n)$$
$$=(a_1+Q^2a_2+2Q\sqrt{a_1a_2})/(P^2\sigma_A{}^2)$$
$$=\frac{1}{P^2}(P+Q\phi_1{}^2+PQ\phi_2{}^2+Q_1{}^2\phi_1{}^2+2Q\phi_1\phi_3) \qquad (2.\ 13)$$

ここで

$$\phi_3=a_1/\sigma_A=\sqrt{P+Q\phi_1{}^2+PQ\phi_2{}^2} \qquad (2.\ 14)$$

P, ϕ_1, ϕ_2 のいくつかの値の組に対する，(2. 12) および (2. 13) 式の分散比の値を第1表に示しておく。たとえば $P=0.7$ とするとき，$\phi_1=1$, $|\phi_2|=0.5$ すなわち $\sigma_Y=\sigma_A$, $\mu_Y=\mu_A\pm0.5\sigma_A$ となる事項 Y を用いるならば，通常の方法に対する分散比は，Y に関する既知情報がある場合には 2.148，一般の場合に n_1, n_2 に関して最適配分を行なうならば 3.588 である。

第1表　無関係な質問法による推定量 $\hat{\mu}_{A1}$, $\hat{\mu}_{A2}{}^*$ の分散比
(通常の方法による推定量 $\hat{\mu}_{A0}$ に対して)

ϕ_1	$\lvert\phi_2\rvert$	$V(\hat{\mu}_{A1})/(\sigma_A{}^2/n)$ (2. 12) 式				$V(\hat{\mu}_{A2}{}^*)/(\sigma_A{}^2/n)$ (2. 13) 式			
		$P=$ 0.5	0.7	0.8	0.9	$P=$ 0.5	0.7	0.8	0.9
2	2	14.000	5.592	3.500	2.049	32.967	10.380	5.621	2.735
2	1	11.000	4.306	2.750	1.716	28.266	8.598	4.658	2.348
2	0.5	10.250	3.985	2.563	1.633	27.056	8.141	4.413	2.250
2	0	10.000	3.878	2.500	1.605	26.649	7.988	4.331	2.217
1	1	5.000	2.469	1.813	1.346	10.472	4.000	2.548	1.616
1	0.5	4.250	2.148	1.625	1.262	9.373	3.588	2.325	1.524
1	0	4.000	2.041	1.563	1.235	9.000	3.449	2.250	1.494
0.5	0.5	2.750	1.689	1.391	1.170	4.658	2.292	1.701	1.293
0.5	0	2.500	1.582	1.328	1.142	4.331	2.167	1.632	1.264
0	0	2.000	1.429	1.250	1.111	2.000	1.429	1.250	1.111

§3. 数量的属性に関する2つの交代質問法

3．1 モデルの概要

以下では Folsom 等［2］により2区分の定性的特性の場合について示された「2つの交代質問法（two alternate questions model）」を数量的属性の場合について提示し，検討を行なうことにする。この方法は，無関係な質問法における属性 Y に関する既知の情報が利用可能でない状況の下で，2組の標本に対する質問の数を増しまた質問の組合せ方に工夫を加えることにより，属性 A に関する推定の効率を高めることをねらいとする。

2組の互いに独立な単純復元抽出による標本を用いることにする。問題とする数量的特性 A（たとえば過去1年間の所得）の他に，2つの A と無関係な数量的特性 Y_1, Y_2 を考えることとし，これらの母平均を μ_A, μ_1, μ_2, 母分散を $\sigma_A{}^2$, $\sigma_1{}^2$, $\sigma_2{}^2$ として，μ_A を推定することを問題とする。

質問の割り当て方は次のとおりである。第1標本については，まず確率化の装置を用いて質問 A および質問 Y_1 のいずれかに答えてもらい，次に直接質問することにより全員について質問 Y_2 に答えてもらう，第2標本については Y_1 と Y_2 の役割を入れ換えて，まず確率化の装置を用いて質問 A および質問 Y_2 のいずれかに答えてもらい，次に直接質問することにより全員について Y_1 に答えてもらう。以上の質問の仕方を図式的に示すと第2表のとおりである。

確率的装置により質問 A が選ばれる確率はいずれの標本においても P であるとする。$i=1, 2$ として，第 i 標本の大きさを n_i, 第 i 標本中の j 番目

第2表 質問 A および無関係な質問 Y_1, Y_2 の各標本への割り当て方

質問方法	第1標本	第2標本
確率化の装置による	{質問 A {質問 Y_1	{質問 A {質問 Y_2
直接の質問	質問 Y_2	質問 Y_1

の人の確率化の装置による質問に対する回答を $Z_{ij}{}^r$, 直接の質問に対する回答を $Z_{ij}{}^d$ とする。[12]

両標本の $Z_{ij}{}^r$, $Z_{ij}{}^d$ の期待値は次のようになる（$Q=1-P$ とする)。

第1の標本： $E(Z_{1j}{}^r)=\lambda_1{}^r\equiv P\mu_A+Q\mu_1$

$E(Z_{1j}{}^d)=\lambda_1{}^d\equiv\mu_2$ （3．1）

第2の標本： $E(Z_{2j}{}^r)=\lambda_2{}^r\equiv P\mu_A+Q\mu_2$

$E(Z_{2j}{}^d)=\lambda_2{}^d\equiv\mu_1$ （3．2）

これらの期待値の不偏推定量 $\hat{\lambda}_i{}^r$, $\hat{\lambda}_i{}^d$ としては両標本のそれぞれの回答の標本平均値を用いる。さて（3．1),（3．2）式より，μ_A について次の2つの不偏推定量のえられることが分かる。

$$\hat{\mu}_A(1)=(\hat{\lambda}_1{}^r-Q\hat{\lambda}_2{}^d)/P \qquad (3.\ 3)$$

$$\hat{\mu}_A(2)=(\hat{\lambda}_2{}^r-Q\hat{\lambda}_1{}^d)/P \qquad (3.\ 4)$$

いま和が1である2つの正数 w_1, w_2 をウエイトとする両推定量の加重平均 $\hat{\mu}_{AS}$ を μ_A の推定量とする。すなわち

$$\hat{\mu}_{AS}=w_1\hat{\mu}_A(1)+w_2\hat{\mu}_A(2) \qquad (3.\ 5)$$

ここで $w_1+w_2=1$

したがって $\hat{\mu}_{AS}$ の分散は次のようになる。

$$V(\hat{\mu}_{AS})=w_1{}^2V(\hat{\mu}_A(1))+2w_1w_2\ \mathrm{Cov}\ (\hat{\mu}_A(1),\ \hat{\mu}_A(2))+w_2{}^2V(\hat{\mu}_A(2))$$
$$=w_1{}^2\Sigma_1{}^2+2w_1w_2\Sigma_{12}+w_2{}^2\Sigma_2{}^2 \qquad (3.\ 6)$$

ところで $\hat{\mu}_A(1)$, $\hat{\mu}_A(2)$ の分散，共分散は次のようになる。

$$\Sigma_1{}^2=V(\hat{\mu}_A(1))=(1/P^2)\{V(\hat{\lambda}_1{}^r)+Q^2V(\hat{\lambda}_2{}^d)\}$$
$$=\frac{1}{P^2}\left(\frac{b_1}{n_1}+\frac{c_1}{n_2}\right) \qquad (3.\ 7)$$

$$\Sigma_2{}^2=V(\hat{\mu}_A(2))=(1/P^2)\{V(\hat{\lambda}_2{}^r)+Q^2V(\hat{\lambda}_1{}^d)\}$$
$$=\frac{1}{P^2}\left(\frac{b_3}{n_2}+\frac{c_3}{n_2}\right) \qquad (3.\ 8)$$

$$\Sigma_{12}=\mathrm{Cov}\ (\hat{\mu}_A(1),\ \hat{\mu}_A(2))$$

---

(12) Z の右肩についた r は randomized の，d は direct の略号である．

$$=(1/P^2)\{-Q\ \mathrm{Cov}\ (\hat{\lambda}_1{}^r,\ \hat{\lambda}_1{}^d)-Q\ \mathrm{Cov}\ (\hat{\lambda}_2{}^r,\ \hat{\lambda}_2{}^d)\}$$

$$=-\frac{1}{P^2}\left(\frac{b_2}{n_1}+\frac{c_2}{n_2}\right) \tag{3. 9}$$

ここで

$$b_1=V(Z_{1j}{}^r)=E\{(Z_{1j}{}^r)^2\}-\{E(Z_{1j}{}^r)\}^2$$

$$=P(\sigma_A{}^2+\mu_A{}^2)+Q(\sigma_1{}^2+\mu_1{}^2)-(P\mu_A+Q\mu_1)^2$$

$$=P\sigma_A{}^2+Q\sigma_1{}^2+PQ(\mu_1-\mu_A)^2$$

$$=\sigma_A{}^2(P+Q\phi_{11}{}^2+PQ\phi_{12}{}^2) \tag{3. 10}$$

$$b_3=Q^2V(Z_{1j}{}^d)=Q^2\sigma_2{}^2=\sigma_A{}^2Q^2\phi_{21}{}^2 \tag{3. 11}$$

$$b_2=Q\ \mathrm{Cov}\ (Z_{1j}{}^r,\ Z_{1j}{}^d)=Q\{P(\sigma_{A2}+\mu_A\mu_2)+Q(\sigma_{12}+\mu_1\mu_2)$$

$$-(P\mu_A+Q\mu_1)\mu_2\}=Q(P\sigma_{A2}+Q\sigma_{12})$$

$$=\sigma_A{}^2Q\phi_{21}(P\rho_{A1}+Q\rho_{12}\phi_{11}) \tag{3. 12}$$

$$c_1=Q^2V(Z_{2j}{}^d)=Q^2\sigma_1{}^2=\sigma_A{}^2Q^2\phi_{11}{}^2 \tag{3. 13}$$

$$c_3=V(Z_{2j}{}^r)=P\sigma_A{}^2+Q\sigma_2{}^2+PQ(\mu_2-\mu_A)^2$$

$$=\sigma_A{}^2(P+Q\phi_{21}{}^2+PQ\phi_{22}{}^2) \tag{3. 14}$$

$$c_2=Q\ \mathrm{Cov}\ (Z_{2j}{}^r,\ Z_{2j}{}^d)=Q(P\sigma_{A1}+Q\sigma_{21})$$

$$=\sigma_A{}^2Q\phi_{11}(P\rho_{A2}+Q\rho_{12}\phi_{21}) \tag{3. 15}$$

$$\begin{aligned}&\phi_{11}=\sigma_1/\sigma_A,\ \phi_{12}=(\mu_1-\mu_A)/\sigma_A\\&\phi_{21}=\sigma_2/\sigma_A,\ \phi_{22}=(\mu_2-\mu_A)/\sigma_A\end{aligned} \tag{3. 16}$$

上式中の σ_{A1}, σ_{A2}, σ_{12} および ρ_{A1}, ρ_{A2}, ρ_{12} は，それぞれ変量 A, 1, 2 の間の共分散および相関係数をあらわす。

(3. 10)～(3. 15) 式を (3. 7)～(3. 9) 式に代入し，さらにそれらを (3. 6) 式に代入すれば分散 $V(\hat{\mu}_{A3})$ が求められる。また，(3. 7)～(3. 9) 式における $V(\hat{\lambda}_i{}^r)$, $V(\hat{\lambda}_i{}^d)$, Cov $(\hat{\lambda}_i{}^r,\ \hat{\lambda}_i{}^d)$ は標本データから推定され，それらの推定値にもとづいて分散 $V(\hat{\mu}_{A3})$ を標本から推定することが可能である。

3. 2 モデルの最適条件

ここでは (3. 6) 式の $V(\hat{\mu}_{A3})$ を最小にするためには，母数 w_i, n_i, P, σ_i,

μ_i, ρ などをどのように決めるのが最適かを考える。

3．2．1　w_1, w_2 の選択[13]

w_1, w_2 以外の母数を一定とするとき，$w_1+w_2=1$ の条件の下で $V(\hat{\mu}_{A3})$ を最小にするには λ を未知の定数として

$$L=V(\hat{\mu}_{A3})+\lambda(w_1+w_2-1)$$

を w_1, w_2 について偏微分して0とおくことにより

$$\left(\frac{w_1}{w_2}\right)_{opt.}=\frac{\Sigma_2{}^2-\Sigma_{12}}{\Sigma_1{}^2-\Sigma_{12}}=\frac{(\Sigma_2{}^2-\Sigma_{12})/(\Sigma_1{}^2+\Sigma_2{}^2-2\Sigma_{12})}{(\Sigma_1{}^2-\Sigma_{12})/(\Sigma_1{}^2+\Sigma_2{}^2-2\Sigma_{12})} \qquad (3.\ 17)$$

このとき分散の最小値は

$$\min_{w} V(\hat{\mu}_{A3})=(\Sigma_1{}^2\Sigma_2{}^2-\Sigma_{12}{}^2)/(\Sigma_1{}^2+\Sigma_2{}^2-2\Sigma_{12}) \qquad (3.\ 18)$$

となる。$\Sigma_1{}^2$, $\Sigma_2{}^2$, Σ_{12} の値は母数を含むため未知であるが，標本からの推定量 $\hat{\Sigma}_1{}^2$, $\hat{\Sigma}_2{}^2$, $\hat{\Sigma}_{12}$ を（3．17）式に代入することにより近似的に w_1, w_2 の最適値を定めることができる。

なお $w_1=w_2=1/2$ と等ウエイトにした場合の分散 $V(\hat{\mu}_{A3})_{w=1/2}$ を，最適ウエイトの場合の分散と比べると次のとおりである。

$$\frac{V(\hat{\mu}_{A3})_{w=1/2}}{\underset{w}{\mathrm{Min}}\ V(\hat{\mu}_{A3})}=1+\frac{(\Sigma_1{}^2-\Sigma_2{}^2)^2}{4(\Sigma_1{}^2\Sigma_2{}^2-\Sigma_{12}{}^2)} \qquad (3.\ 19)$$

3．2．2　n_1, n_2 の選択

次に n_1, n_2 以外の母数（w_1, w_2 をも含む）を一定として，$n_1+n_2=n$（一定）の条件の下で $V(\hat{\mu}_{A3})$ を最小にすることを考える。（3．6）式を書き直すと

$$V(\hat{\mu}_{A3})=\frac{1}{P^2}\left(\frac{D_1}{n_1}+\frac{D_2}{n_2}\right) \qquad (3.\ 20)$$

ここで

---

(13)　3．2．1の内容は Folsom 等［2］に本質的に示されている．

$$D_1=b_1w_1^2-2b_2w_1w_2+b_3w_2^2$$
$$D_2=c_1w_1^2-2c_2w_1w_2+c_3w_2^2 \qquad (3.\ 21)$$

$b_1 \sim c_3$ は (3. 10)～(3. 15) 式で与えられる。上の条件の下で $V(\hat{\mu}_{AS})$ を最小にする n_i の最適値は

$$\left(\frac{n_1}{n_2}\right)_{opt.}=\sqrt{\frac{D_1}{D_2}}=\sqrt{\frac{b_1w_1^2-2b_2w_1w_2+b_3w_2^2}{c_1w_1^2-2c_2w_1w_2+c_3w_2^2}} \qquad (3.\ 22)$$

このとき分散の最小値は

$$\underset{n}{\mathrm{Min}}\ V(\hat{\mu}_{AS})=\frac{1}{nP^2}(\sqrt{D_1}+\sqrt{D_2})^2 \qquad (3.\ 23)$$

となる。なお $n_1=n_2=n/2$ と等配分した場合の分散 $V(\hat{\mu}_{AS})_{n=1/2}$ を最適配分の場合の分散と比べると次のとおり，

$$\frac{V(\hat{\mu}_{AS})_{n=1/2}}{\underset{n}{\mathrm{Min}}\ V(\hat{\mu}_{AS})}=\frac{1}{1-\dfrac{(\sqrt{D_1}-\sqrt{D_2})^2}{2(D_1+D_2)}} \qquad (3.\ 24)$$

3. 2. 3 n_1, n_2 および w_1, w_2 の選択

上の 3.2.1，3.2.2 の結論をまとめると，n_1, n_2 および w_1, w_2 の最適な選択のしかたがえられる。(3. 17) および (3. 22) 式を (3. 7)～(3. 9) 式を用い，また

$$r=n_1/n_2,\ s=w_1/w_2 \qquad (3.\ 25)$$

とおいて書き直すと

$$s=\frac{w_1}{w_2}=\frac{(b_3+b_2)/n_1+(c_3+c_2)/n_2}{(b_1+b_2)/n_1+(c_1+c_2)/n_2}$$
$$=\frac{(b_3+b_2)+(c_3+c_2)r}{(b_1+b_2)+(c_1+c_2)r}\equiv f_1(r) \qquad (3.\ 26)$$

$$r=\frac{n_1}{n_2}=\sqrt{\frac{b_1s^2-2b_2s+b_3}{c_1s^2-2c_2s+c_3}}\equiv f_2(s) \qquad (3.\ 27)$$

この両式をともに満足する $r=n_1/n_2$ および $s=w_1/w_2$ が n_i, w_i に関する最適な選択のしかたを示す。最適値は，上の2つの式から導かれる r または s に関する4次方程式を解くとか，あるいは r に適当な初期値 r_0 を与

えて $r_{i+1}=f_2(f_1(r_i))$ とする逐次近似法などにより求められることになる。

とくに $\phi_{21}=\phi_{11}$, $\phi_{22}=\phi_{12}$ かつ $\rho_{A1}=\rho_{A2}$ の場合（この場合を“事項 Y_1, Y_2 の分布の特性が同一の場合”とよぶことにする）は，最適値が $r=n_1/n_2=1$, $s=w_1/w_2=1$, すなわち標本は等配分し等ウエイトを用いることが最適となり[14]，分散の最小値は

$$V(\hat{\mu}_{A3}^*)=\frac{1}{2nP^2}(b_1-2b_2+b_3+c_1-2c_2+c_3)$$

$$=\frac{1}{nP^2}(b_1-2b_2+b_3) \qquad (3.\ 28)$$

となる。n_i, w_i の理論的な最適値は以上のとおりであるが，母数に関する事前情報などが不足の場合には，便宜的に標本数の等配分や等ウエイトを利用することもあるものと思われる。参考までに第3表に，母数の値についての2組の仮想例に対する，r, s の最適値，および分散の最小値 $V_{opt.}$，通常の方法による分散 $\sigma_A{}^2/n$, 等配分・等ウエイトの場合の分散 $V_{n,\ w=1/2}$ を比較したものを示しておく。

第3表　n_i および w_i に関する最適配分の例

	例 1	例 2		例 1	例 2
母数			最適比		
P	0.7	0.7	$r=(n_1/n_2)_{opt.}$	2.083	1.718
ϕ_{11}	1	1	$s=(w_1/w_2)_{opt.}$	3.136	2.598
ϕ_{21}	2	2	分散比		
ϕ_{12}	0	0.5	$V_{opt.}/(\sigma_{A2}/n)$	2.518	1.554
ϕ_{22}	0	0.7	$V_{n,\ w=1/2}/(\sigma_A{}^2/n)$	3.051	2.873
ρ_{A1}	0	0.5	$V_{n,\ w=1/2}/V_{opt.}$	1.159	1.726
ρ_{A2}	0	0.3			
ρ_{12}	0.5	0.2			

(14) このとき（3. 26）および（3. 27）式から導かれる r についての4次方程式の実根は ±1 で，他の2根は複素数となる．

3．2．4　ρ, μ_i, σ_i の選択

分散 $V(\hat{\mu}_{A8})$ を小さくするにはどのような事項 Y_1, Y_2 を選んだらよいかを考える。(3．20) の分散式について (3．21) および (3．10)～(3．15) 式を参照して検討する。

まず母数 ρ_{A1}, ρ_{A2}, ρ_{12} は b_1～c_3 のうち b_2 および c_2 のみに含まれ，分散式におけるそれらの係数は負であるから，分散 $V(\hat{\mu}_{A8})$ を小さくするにはこれらの ρ の値を回答者の疑惑を招くことのない範囲で大きくとるとよい。しかし実際にはこれらの ρ が0乃至は高々0.5程度になるような項目を Y_1, Y_2 として考えるのが無難であろう。

次に μ_1, μ_2 を含む母数 ϕ_{12}, ϕ_{22} は b_1, c_3 のみに含まれ，分散式におけるそれらの係数は正であるから，分散を小さくするには $\phi_{12}=\phi_{22}=0$, すなわち $\mu_1=\mu_A$, $\mu_2=\mu_A$ となるような事項 Y_1, Y_2 を選ぶことが望ましい。

最後に σ_1, σ_2 を含む母数 ϕ_{11}, ϕ_{21} について考える。まず ϕ_{11} が b_1, b_2, c_1, c_2 のみに含まれることに注意して，(3．20) 式を ϕ_{11} に関して偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\hat{\mu}_{A8})}{\partial\phi_{11}}&=\frac{1}{P^2}\left\{\frac{1}{n_1}\left(w_1{}^2\frac{\partial b_1}{\partial\phi_{11}}-2w_1w_2\frac{\varrho b_2}{\partial\phi_{11}}\right)\right.\\&\quad\left.+\frac{1}{n_2}\left(w_1{}^2\frac{\partial c_1}{\partial\phi_{11}}-2w_1w_2\frac{\partial c_2}{\partial\phi_{11}}\right)\right\}\\&=\frac{2Q\sigma_A{}^2w_1{}^2}{P^2n_1}\left\{\left(1+\frac{n_1}{n_2}\right)\left(\phi_{11}-\frac{w_2}{w_1}Q\rho_{12}\phi_{21}\right)\right.\\&\quad\left.-\frac{w_2n_1}{w_1n_2}P\rho_{A2}\right\}\end{aligned}$$

Y_1, Y_2 の分布の特性が同一で，かつ等配分・等ウエイトの場合のみについて上式を考える。このとき上式は

$$\frac{\partial V(\hat{\mu}_{A8}{}^*)}{\partial\phi_{11}}=\frac{Q\sigma_A{}^2}{P^2n}\{2\phi_{11}(1-Q\rho_{12})-P\rho_{A2}\} \tag{3. 29}$$

となり。分散を最小にする ϕ_{11} の値は

$$(\phi_{11})_{opt.}=\frac{P\rho_{A2}}{2(1-Q\rho_{12})} \tag{3. 30}$$

と一応は求まる。しかし回答者の協力度を勘案して ρ をたとえば $\rho_{A2}\leqq 0.5$, $\rho_{12}\leqq 0.5$ の範囲に限定するとき

$$P\rho_{A2}/[2(1-Q\rho_{12})]\leqq 0.5P/(2-Q)$$

したがって $P=0.5$ のとき $(\phi_{11})_{opt.}\leqq 1/6$, $P=0.8$ のとき $(\phi_{11})_{opt.}\leqq 2/9$ というように ϕ_{11} の最適値は回答者の協力を損ないかねない小さな値になるが，ϕ_{11} の選択は協力度にたいする配慮から $\phi_{11}=\sigma_1/\sigma_A=1$ 程度以上にしておくことが必要であろう。なお $\phi_{21}=\sigma_2/\sigma_A$ の選び方についても ϕ_{11} の場合と同様の結論をうる。

3．2．5　P の選択

分散式（3．19）を P について偏微分すると

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\hat{\mu}_{A3})}{\partial P}=&-\frac{\sigma_A{}^2}{P^3}\Bigg[P\left(\frac{w_1{}^2}{n_1}+\frac{w_2{}^2}{n_2}\right)+(2-P)\left(\frac{w_1{}^2}{n_1}\phi_{11}{}^2+\frac{w_2{}^2}{n_2}\phi_{21}{}^2\right)\\&+P\left(\frac{w_1{}^2}{n_1}\phi_{12}{}^2+\frac{w_2{}^2}{n_2}\phi_{22}{}^2-2\frac{w_1w_2}{n_1}\rho_{A1}\phi_{21}-2\frac{w_1w_2}{n_2}\rho_{A2}\phi_{11}\right)\\&+2(1-P)\left\{\frac{w_1{}^2}{n_1}\phi_{21}{}^2+\frac{w_2{}^2}{n_2}\phi_{11}{}^2-2\left(\frac{1}{n_1}+\frac{1}{u_2}\right)w_1w_2\rho_{12}\phi_{11}\phi_{21}\right\}\Bigg]\end{aligned}$$

この場合も，Y_1, Y_2 の分布の特性が同一で等配分・等ウエイトのときのみを検討する。このとき上式は

$$\begin{aligned}\frac{\partial V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)}{\partial P}=&-\frac{\sigma_A{}^2}{nP^3}\{P+(2-P)\phi_{11}{}^2+P(\phi_{12}{}^2-2\rho_{A1}\phi_{11})\\&+2(1-P)(1-2\rho_{12})\phi_{11}{}^2\}\end{aligned}\qquad(3.\ 31)$$

となり，この式の右辺の｛　｝内の P についての1次式を $h(P)$ とおくと

$$h(0)=4(1-\rho_{12})\phi_{11}{}^2\geqq 0$$

$$h(1)=\phi_{12}{}^2+(1-\phi_{11})^2+2(1-\rho_{A1})\phi_{11}\geqq 0$$

であるから，$h(P)$ はつねに非負，したがって $\partial V(\hat{\mu}_{A3})/(\partial P)$ はつねに非正であるから，分散を小さくするには，P を回答者の協力のえられる範囲でなるべく大きな値，すなわち $P=0.8\pm 0.1$ 程度とするのがよい。

3.3 相対効率

さて，$V(\hat{\mu}_{A3})$ を通常の方法による分散 $\sigma_A{}^2/n$ と比較してみよう。簡単のために，Y_1, Y_2 の分布の特性が同一で，n_i, w_i に関する最適配分，すなわち等配分・等ウエイトの場合のみに限定して検討する。このとき分散の相対比は，(3.28) 式などにより，また

$$\phi_1{}^2=\phi_{11}{}^2=\phi_{21}{}^2,\ \phi_2=\phi_{12}=\phi_{22} \tag{3.32}$$

とおくと

$$\begin{aligned}V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)/(\sigma_A{}^2/n)&=(b_1-2b_2+b_3)/(nP^2\sigma_A{}^2/n)\\&=\frac{1}{P^2}\{P+Q(1+Q)\phi_1{}^2+PQ\phi_2{}^2\\&\quad-2Q\phi_1(P\rho_{A1}+\rho_{12}Q\phi_1)\}\end{aligned} \tag{3.33}$$

となる。いま (3.33) 式と (2.13)，(2.12) 式との差を求めると

$$\frac{V(\hat{\mu}_{A2}{}^*)-V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)}{\sigma_A{}^2/n}=\frac{2Q\phi_1}{P^2}\{\phi_3+P\rho_{A1}+Q\rho_{12}\phi_1\} \tag{3.34}$$

$$\frac{V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)-V(\hat{\mu}_{A1})}{\sigma_A{}^2/n}=\frac{Q}{P^2}\{Q(1-2\rho_{12})\phi_1{}^2-2P\rho_{A1}\phi_1\} \tag{3.35}$$

となる。これより「2つの交代質問法」と「無関係な質問法」との精度の比較に関して，たとえば次のようなことが分かる。

(1) $\rho_{A1}\geqq 0$, $\rho_{12}\geqq 0$ ならば $V(\hat{\mu}_{A2}{}^*)>V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)$

(2) $\rho_{12}<0.5$, $\rho_{A1}\geqq 0$, $\phi_1\neq 0$ ならば $V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)>V(\hat{\mu}_{A1})$

(3) $\rho_{12}=0.5$, $\rho_{A1}=0$ ならば $V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)=V(\hat{\mu}_{A1})$

この (1)，(2) より，通常よく用いられそうな母数の範囲では

$$V(\hat{\mu}_{A2}{}^*)>V(\hat{\mu}_{A3}{}^*)>V(\hat{\mu}_{A1}{}^*)$$

の順になる。したがって，通常用いられる場合に，2つの交代質問法の精度は，一般の無関係な質問法より良く，Y の既知情報がある場合の無関係な質問法よりは劣る。

母数のいくつかの値の組に対する (3.33) 式の値を第4表および第5表に示しておく。(第4表および第5表の $\rho_{A1}=0$, $\rho_{12}=0.5$ に対する値は，上述

第4表 「2つの交代質問法」による推定量 $\hat{\mu}_{A3}^*$ の
分散比 $V(\hat{\mu}_{A3}^*)/(\sigma_A^2/n)$ (3. 33) 式
(通常の方法による推定量 $\hat{\mu}_{A0}$ に対して)
$\phi_1=\phi_{11}=\phi_{21}=1$, $\phi_2=\phi_{12}=\phi_{22}=0$
$\rho_{A1}=\rho_{A2}$, $n_1=n_2=n/2$, $w_1=w_2=1/2$ の場合

ρ_{A1}	ρ_{12}	$P=$ 0.5	0.7	0.8	0.9
0.5	0.5	3.000	1.612	1.313	1.123
0.5	0	4.000	1.796	1.375	1.136
0.5	−0.5	5.000	1.980	1.438	1.149
0	0.5	4.000	2.041	1.563	1.235
0	0	5.000	2.224	1.625	1.247
0	−0.5	6.000	2.408	1.688	1.259
−0.5	0.5	5.000	2.469	1.813	1.346
−0.5	0	6.000	2.653	1.875	1.358
−0.5	−0.5	7.000	2.837	1.938	1.370

の(3)より，Y の既知情報がある場合の無関係な質問法の分散比 (2. 12) 式に等しいことに注意されたい。) たとえば $P=0.7$ のとき，$\phi_1=1$, $|\phi_2|=0.5$, すなわち $\sigma_1=\sigma_2=\sigma_A$, $\mu_1=\mu_2=\mu_A\pm0.5\sigma_A$, $\rho_{A1}=\rho_{A2}=\rho_{12}=0$ とするならば，「2つの交代質法」による分散比は 2.332 であり，2. 3に示した一般の「無関係な質問法」による分散比 3.588 よりはるかに小さく，Y が既知の場合の分散比 2.148 に極めて近い値を示している。第5表を第1表と比べると，一般に $\rho_{A1}=\rho_{12}=0$ の場合の 2つの交代質問法は，一般の無関係な質問法 ((2. 13) 式) に比べてかなりの精度の向上が見られることが分かる。

§4. む す び

以上のように本稿では，数量的特性に関する2つの交代質問法を，モデルの最適条件を中心として検討してきた。無関係な質問法との精度比較においては，Y に関する既知情報がえられない状況の下では，全標本数を一定として考える場合の精度は，2つの交代質問法は一般の無関係な質問法より高

第5表「2つの交代質問法」による推定量 $\hat{\mu}_{A3}^*$ の
分散比 $V(\hat{\mu}_{A3}^*)/(\sigma_A{}^2/n)$　(3.33) 式
(通常の方法による推定量 $\hat{\mu}_{A0}$ に対して)
$\phi_1=\phi_{11}=\phi_{21},\ \phi_2=\phi_{12}=\phi_{22}$
$\rho_{A1}=\rho_{A2},\ n_1=n_2=n/2,\ w_1=w_2=1/2$ の場合

ρ_{A1}	ρ_{12}	$P=$ 0.5	0.7	0.8	0.9	$P=$ 0.5	0.7	0.8	0.9
		$\phi_1=2,\ \lvert\phi_2\rvert=2$				$\phi_1=2,\ \lvert\phi_2\rvert=1$			
0.5	0.5	12.000	4.735	3.000	1.827	9.000	3.449	2.250	1.494
0	0.5	14.000	5.592	3.500	2.049	11.000	4.306	2.750	1.716
0	0	18.000	6.327	3.750	2.099	15.000	5.041	3.000	1.765
−0.5	−0.5	24.000	7.918	4.500	2.370	21.000	6.633	3.750	2.037
		$\phi_1=2,\ \lvert\phi_2\rvert=0.5$				$\phi_1=2,\ \lvert\phi_2\rvert=0$			
0.5	0.5	8.250	3.128	2.063	1.410	8.000	3.020	2.000	1.383
0	0.5	10.250	3.985	2.563	1.633	10.000	3.878	2.500	1.605
0	0	14.250	4.719	2.813	1.682	14.000	4.612	2.750	1.654
−0.5	−0.5	20.250	6.311	3.563	1.954	20.000	6.204	3.500	1.926
		$\phi_1=1,\ \lvert\phi_2\rvert=1$				$\phi_1=1,\ \lvert\phi_2\rvert=0.5$			
0.5	0.5	4.000	2.041	1.563	1.235	3.250	1.719	1.375	1.151
0	0.5	5.000	2.469	1.813	1.346	4.250	2.148	1.625	1.262
0	0	6.000	2.653	1.875	1.358	5.250	2.332	1.688	1.275
−0.5	−0.5	8.000	3.265	2.188	1.481	7.250	2.944	2.000	1.398
		$\phi_1=1,\ \lvert\phi_2\rvert=0$				$\phi_1=0.5,\ \lvert\phi_2\rvert=0.5$			
0.5	0.5	3.000	1.612	1.313	1.123	2.250	1.474	1.266	1.114
0	0.5	4.000	2.041	1.563	1.235	2.750	1.689	1.391	1.170
0	0	5.000	2.224	1.625	1.247	3.000	1.735	1.406	1.173
−0.5	−0.5	7.000	2.837	1.938	1.370	3.750	1.995	1.547	1.231
		$\phi_1=0.5,\ \lvert\phi_2\rvert=0$				$\phi_1=0,\ \phi_2=0$			
0.5	0.5	2.000	1.367	1.203	1.086	2.000	1.429	1.250	1.111
0	0.5	2.500	1.582	1.328	1.142	2.000	1.429	1.250	1.111
0	0	2.750	1.628	1.344	1.145	2.000	1.429	1.250	1.111
−0.5	−0.5	3.500	1.888	1.484	1.204	2.000	1.429	1.250	1.111

く，Y の既知情報がある場合と比べてもあまり見劣りしないことが明らかとなった。しかしながら以上ではふれえなかった問題も多いのでその概要を以下にまとめておく。

云うまでもないことであるが，ランダム回答法の性能評価にあたっては，分散の大小のみによってではなく，偏りなども含めて考えなければならない。ランダム回答法は通常の方法の場合よりも調査に対する協力度を向上させることをねらいとしているので，偏りが相対的に小となることが期待されるが，結果として小となるかは個々の状況に応じて具体的に検討されなければならない問題である。事実ランダム回答法自体が新たな誤差を誘発する可能性のあることにも留意しなければならない。(15)

そのような観点からは，予想される偏りに応じて結果がどう歪むかという感度分析が必要であろうし，とくに 2 つの交代質問法の場合には，2 つの標本において質問の組合せ方が違うために，両標本において現われる調査誤差は必ずしも同じ分布になるとは云えないことをも念頭におかなければならないであろう。

なお従来のランダム回答法は個人を対象とする面接調査に関する手法として開発されているが，このような手法の考え方は，個別情報を蓄積しているデータ・センターが個別情報の秘密を保持しながら利用者へデータを提供するさいのデータの変換の問題などにも応用しうるものである。(16) 後者の場合には，確率化の処理は計算機内で実施可能となり，秘密保持および提供結果の精度保証の観点から望ましい手法は従来のランダム回答法によるものとは異なってくるのであろう。またこの場合には，多変数のデータ処理の状況を問題としなければならないことも多いであろう。

参 考 文 献

[1] Abul-Ela, Abdel-Latif A., Greenberg, Bernard G. and Horvitz, Daniel G., "A Multi-Proportions Randomized Response Model," *Jour. Amer. Stat. Assn.*, 62, (1967), 990–1008.

---

(15) Abul-Ela 等 [1] が指摘しているように，ランダム回答法を実際に適用してみると，調査員乃至回答者がランダム手法の意味を理解しえないために生ずる手続きの誤り，全くいい加減に答えてしまう誤り，また回答者が非ランダム的な答え方をするために生ずる誤りなどが問題点となる．

(16) Warner [8] p. 888 参照．

[2] Folsom, Ralph E., Greenbeg Bernard G., Horvitz, Daniel G. and Abernathy James R., "The Two Alternate Questions Randomized Response Model for Human Surveys," *Jour. Amer. Stat. Assn.*, 68, (1973), 525–30.

[3] Greenberg, Bernard G., Abul-Ela, Abdel-Latif A., Simmons, Walt R., and Horvitz, Daniel G., "The Unrelated Questions Randomized Response Theoretical Framework," *Jour. Amer. Stat. Assn.*, (1969), 520–39.

[4] Greenberg, Bernard G., Kuebler, Roy R. Jr., Abernathy, James R. and Horvita, Daniel G., "Application of the Randomized Response Technique in Obtaining Quantitative Data," *Jour. Amer. Stat. Assn.*, 66, (1971), 243–50.

[5] Moors, J. J. A., "Optimization of the Unrelated Question Randomized Response Model," *Jour. Amer. Stat. Assn.*, 66, (1971), 627–29.

[6] 逆瀬川浩孝・高橋宏一,「ランダム回答法についての二三の注意」, 第42回日本統計学会研究発表要旨,『日本統計学会誌』, 5, (1974), 39.

[7] Warner, Stanley L., "Randomized Response: A Survey Technique for Eliminating Evasive Answer Bias," *Jour. Amer. Stat. Assn.*, 60, (1965), 63–69.

[8] Warner, Stanley L., "The Linear Randomized Response Model," *Jour. Amer. Stat. Assn.*, 66, (1971), 884–88.