乱数の個数に関する順序統計量の分布(I)

久 次 智 雄

目　　次

§0. はじめに
§1. 準　　備
§2. 第1の方法
§3. 第2の方法
§4. 値が0とならない条件

§0. は じ め に

まず記号を次のように定めておく。

M, N: 与えられた整数 ($M\geqq 1$, $N\geqq 0$)

$\alpha_1, \dots, \alpha_m, \dots, \alpha_M$: M 個の文字

$x_1, \dots, x_m, \dots, x_M$: $\alpha_m(1\leqq m\leqq M)$ を N 個並べた列におけるそれぞれの文字の出現回数 ($x_1+\dots+x_M=N$)

$N_1, \dots, N_m, \dots, N_M$: $x_m(1\leqq m\leqq M)$ を回数の小さいものから大きいものへと順に並べかえた値 ($N_1\leqq\dots\leqq N_M$, $N_1+\dots+N_M=N$)

本稿では，文字 α_m の現われ方についてランダム性を仮定するときの，順序統計量 $N_m(1\leqq m\leqq N)$ の確率 $P(N_m=n)$ の求め方について検討する。たとえば，$M=10$ とし，$\alpha_i(1\leqq i\leqq 10)$ をそれぞれ 0, 1, …, 9 とすれば，1桁の乱数を N 個選ぶときの，各数字の出現回数についての順序統計量 N_m の分布を問題にしていることになる。この問題は，日本統計学会誌 [3] の「解答を求む」欄に，$M=10$, $N=100$ の場合の最小回数 N_1 の分布を求める問題として示されたものを一般の順序統計量の問題として解こうとするものである。

本稿（I）では §1. において予備的解析を行なったのち，M, N が小など

きに用いることのできるような，漸化式にもとづく2通りの計算手続きを，それぞれ §2. および §3. に述べる。§4. には各種の量が0にならない条件をとりまとめた。なお，実際の計算は次稿（Ⅱ）に掲載する予定である。

§1. 準 備

1. 1 問題の整理 $x_m(1\leqq m\leqq M)$ または $N_m(1\leqq m\leqq M)$ に関する事象を E とするとき，E に含まれる N 文字の列（重複順列）の個数を $l\{E\}$ とあらわす。明らかに

$$P\{E\}=M^{-N}l(E) \tag{1.1}$$

確率 $P\{N_m=n\}$ $(n=0, 1, \dots, N)$ については明らかに

$$\begin{aligned}P\{N_m=n\}&=P\{N_m\leqq n\}-P\{N_m\leqq n-1\}\\&=P\{N_m\geqq n\}-P\{N_m\geqq n+1\}\end{aligned} \tag{1.2}$$

の関係があるから

$$P\{N_m\geqq n\}\quad n=0, \dots, N+1 \qquad \text{または}\ P\{N_m\leqq n\}\quad n=-1, \dots, N$$

の値を求めればよい。

各文字の出現回数 $x_1, \dots, x_M$ の分布は，出現確率が $1/M$ の多項分布であるから，その同時確率などが

$$P(x_1, \dots, x_M)=\frac{N!}{x_1!\dots x_M!}\cdot\frac{1}{M^N}$$

$$0\leqq x_i\leqq N(i=1, \dots, M),\ \sum x_i=N \tag{1.3}$$

$$P(x_1)=\binom{N}{x_1}\frac{(M-1)^{N-x_1}}{M^N}\qquad x_1=0, \dots, N \tag{1.4}$$

$$P(x_1,\ x_2)=\frac{N!}{x_1!\,x_2!(N-x_1-x_2)!}\ \frac{(M-2)^{N-x_1-x_2}}{M^N}$$

$$0\leqq x_1,\ x_2\leqq N,\ x_1+x_2\leqq N \tag{1.5}$$

であることは容易に示される。

(1.3) 式を用いれば，最小回数 N_1 および最大回数 N_m の分布については

$$\begin{aligned}P\{N_1\geqq n\}&=P\{(x_1\geqq n)\cap\dots\cap(x_M\geqq n)\}\\&=\sum_{\substack{x_1\geqq n,\ \cdots,\ x_M\geqq n\\x_1+\cdots+x_M=N}}P(x_1, \dots, x_M)\end{aligned} \tag{1.6}$$

$$P\{N_M \leqq n\} = P\{(x_1 \leqq n) \cap \dots \cap (x_M \leqq n)\}$$

$$= \sum_{\substack{x_1 \leqq n, \cdots, x_M \leqq n \\ x_1 + \cdots + x_M = N}} P(x_1, \dots, x_M) \qquad (1.6')$$

とあらわせるが，$M=10$, $N=100$ 程度になるとこのままの形では数値計算は容易ではない。

1．2　包除原理の公式　以下で用いる包除原理（包含と排除の原理）の公式をここにまとめておく。

定理 1.[(1)]　有限集合を S, その M 個の部分集合を $S_1, \dots, S_M$ とする。$S_1, \dots, S_M$ のうち m 個以上に含まれる要素全体の集合 A_m の要素の個数 $l\{A_m\}$ について次式が成り立つ。

$m=0$ のとき　　$l\{A_0\} = \bar{l}_0 = l\{S\}$

$1 \leqq m \leqq M$ のとき

$$l\{A_m\} = \sum_{i=m}^{M} (-1)^{i-m} \binom{i-1}{i-m} \bar{l}_i$$

$$= \binom{m-1}{0} \bar{l}_m - \binom{m}{1} \bar{l}_{m+1} + \dots + (-1)^{M-m} \binom{M-1}{M-m} \bar{l}_M \qquad (1.7)$$

ここで

$$\bar{l}_m = \sum_{i(1) < \cdots < i(m)} l\{S_{i(1)} \cap \dots \cap S_{i(m)}\} \qquad m=1, \dots, M \qquad (1.8)$$

とくに $m=1$ のとき

$$l\{A_1\} = l\{S_1 \cup \dots \cup S_M\}$$

$$= \bar{l}_1 - \bar{l}_2 + \dots + (-1)^{i-1} \bar{l}_i + \dots + (-1)^{M-1} \bar{l}_M \qquad (1.9)$$

1．3　指数型母関数の公式　次に，ある種の条件をみたす制限付き重複順列の個数についての母関数を示しておく。

定理 2.[(2)]　$M(\geqq 1)$ 個の文字 $\alpha_1, \dots, \alpha_M$ から $N(\geqq 0)$ 個をえらぶ重複順列

(1) 証明は組合せ理論または確率論のテキスト，たとえば河田［1］p. 54 を参照（そこでは確率論の命題として証明されている）.

(2) 証明は，たとえばリウ［2］の指数型母関数（計数子）の議論を参照すれば容易である.

のうちで，特定の $m(0\leqq m\leqq M)$ 個の文字 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ は p 個以上 q 個以下で，他の $(M-m)$ 個の文字 $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_M$ は r 個以上であるような制限付き重複順列の個数を

$$l(M, N, m, p, q, r)$$

であらわす。(制限条件のうちいくつかをはずしたい場合は，たとえば $p=0$, $q=\infty$, または $r=0$ などとおく)。このとき $l(M, N, m, p, q, r)$ の値は次の母関数 $f(t)$ の $t^N/N!$ の係数である。

$$\begin{aligned} f(t;\ M, m, p, q, r) &= \left(\frac{t^p}{p!}+\frac{t^{p+1}}{(p+1)!}+\dots+\frac{t^q}{q!}\right)^m \\ &\quad\times\left(\frac{t^r}{r!}+\frac{t^r}{(r+1)!}+\dots\dots\right)^{M-m} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N!}l(M, N, m, p, q, r) \end{aligned} \tag{1.10}$$

1．4　$P\{N_m=n\}$ の特別の値　さて，求めるべき $P\{N_m=n\}=P\{N_m=n|M, N\}$[3] の値は，次の 1)〜5) の場合については容易に計算される。

1)　$M=1$ の場合：　このときは $m=1$ となり，次の結果がえられる。

$$P\{N_1=n|1, N\}=\begin{cases}1 & n=N \text{ のとき}\\ 0 & n\neq N \text{ のとき}\end{cases} \tag{1.11}$$

$$P\{N_1\leqq n|1, N\}=\begin{cases}1 & n\geqq N \text{ のとき}\\ 0 & n<N \text{ のとき}\end{cases} \tag{1.11$'$}$$

$$P\{N_1\geqq n|1, N\}=\begin{cases}1 & n\leqq N \text{ のとき}\\ 0 & n>N \text{ のとき}\end{cases} \tag{1.11$''$}$$

2)　n の両端における値：　また次の値のえられることも自明である。

$$n<0 \text{ または } n>N \text{ のとき}\qquad P\{N_m=n\}=0 \tag{1.12}$$

$$\begin{aligned} &n<0 \text{ のとき} && P\{N_m\leqq n\}=0\\ &n\geqq N \text{ のとき} && P\{N_m\leqq n\}=1 \end{aligned} \tag{1.13}$$

$$\begin{aligned} &n\leqq 0 \text{ のとき} && P\{N_m\geqq n\}=1\\ &n>N \text{ のとき} && P\{N_m\geqq n\}=0 \end{aligned} \tag{1.14}$$

---

(3)　一般に，確率 $P\{\cdot\}$ において，そこに明示されていないパラメータ（たとえば M, N）を表示しておきたいときには $P\{\cdot|M, N\}$ のようにかくことにする．

2） $n>N/2$ の場合の $P\{N_M=n\}$： このときは，2つ以上の x_i が同時に n 以上にはなりえないので

$$P\{N_M=n\}=P\{(x_1=n)\cup\ldots\cup(x_M=n)\}$$
$$=\sum_{i=1}^{M}P\{x_i=n\}=M\cdot\binom{N}{n}\frac{(M-1)^{N-n}}{M^N}\qquad \frac{N}{2}<n\leqq N \tag{1.15}$$

3） $P\{N_1=0\}$： 包除原理の式（1.9）を（確率論の言葉に云い直して）用いれば容易に

$$P\{N_1=0\}=P\{(x_1=0)\cup\ldots\cup(x_M=0)\}$$
$$=\sum_{i=1}^{M}(-1)^{i-1}\binom{M}{i}\left(\frac{M-i}{M}\right)^N \tag{1.16}$$

3） N/M に最も近い $P\{N_m=n\}$ （$1\leqq m\leqq M$）： $[N/M]=k$（ただし［ ］はガウスの記号），$N=kM+l(0\leqq l<M)$ とおくと，容易に

$$P\{N_1=k\}=\ldots=P\{N_{M-l}=k\}=P\{N_{M-l+1}=k+1\}\ldots=P\{N_M=k+1\}$$
$$=P\{(N_1,\ \ldots,\ N_{M-l},\ N_{M-l+1},\ \ldots,\ N_M)=(k,\ \ldots,\ k,\ k+1,\ \ldots,\ k+1)\}$$
$$=\binom{M}{l}\frac{N!}{(k!)^{M-l}\{(k+1)!\}^l}\frac{1}{M^N} \tag{1.17}$$

4） 数値例： $M=10$, $N=100$ の場合について，（1.15）～（1.17）の値の一部を示すと次のとおりである。

m	n	$P(N_m=n)$
1	0	2.6560×10^{-4}
1～10	10	2.3571×10^{-8}

m	n	$P(N_m=n)$
10	51	5.6642×10^{-25}
	52	5.9304×10^{-26}
	⋮	
	99	9.0000×10^{-97}
	100	1.0000×10^{-99}

§2. 第 1 の 方 法

2.1 記号など n, M, N は取りあえず一定としておき，$\beta=L$, G；$m=1$, …, M にたいして，$E_m{}^\beta$, $B_m{}^\beta$（事象），$p_m{}^\beta$（確率和），$\bar{l}_m{}^\beta$, $l_m{}^\beta$（個数とその和）を次のとおりとする。

$$E_m{}^L\equiv\{x_m\leqq n\}\qquad E_m{}^G\equiv\{x_m\geqq n\} \tag{2.1}$$

$$B_m{}^\beta\equiv\{E_1{}^\beta,\ \ldots,\ E_M{}^\beta \text{ のうち } m \text{ 個以上が成立つ}\} \tag{2.2}$$

$$l_m{}^\beta = l\{E_1{}^\beta \cap \dots \cap E_m{}^\beta\} \tag{2.3}$$

$$\bar{l}_m{}^\beta = \sum_{i(1)<\cdots<i(m)} l\{E^\beta_{i(1)} \cap \dots \cap E^\beta_{i(m)}\} = \binom{M}{m} l_m{}^\beta \tag{2.4}$$

$$p_m{}^\beta = \sum_{i(1)<\cdots<i(m)} P\{E^\beta_{i(1)} \cap \dots \cap E^\beta_{i(m)}\} = M^{-N}\bar{l}_m{}^\beta = M^{-N}\binom{M}{m} l_m{}^\beta \tag{2.5}$$

2．2　$l_m{}^L$, $l_m{}^G$ による表現　まず次の同値関係

$$\begin{aligned} N_m \leqq n &\iff N_1 \leqq \dots \leqq N_m \leqq n \iff B_m{}^L \\ N_m \geqq n &\iff n \leqq N_m \leqq \dots \leqq N_M \iff B^G_{M-m+1} \end{aligned} \tag{2.6}$$

の成立つことに注意すれば，(2．6)，(1．7)[(4)]，(2．5) 式を順次用いることにより次の2式をうる。

$$\begin{aligned} P\{N_m \leqq n\} &= p_r\{B_m{}^L\} = \sum_{i=m}^{m} (-1)^{i-m}\binom{i-1}{i-m} p_i{}^L \\ &= M^{-N}\sum_{i=m}^{M} (-1)^{i-m}\binom{i-1}{i-m}\binom{M}{i} l_i{}^L \\ &= M^{-N}\left\{\binom{m-1}{0}\binom{M}{m} l_m{}^L - \binom{m}{1}\binom{M}{m+1} l^L_{m+1}\right. \\ &\quad \left. + \dots + (-1)^{M-m}\binom{M-1}{M-m}\binom{M}{M} l_M{}^L\right\} \end{aligned} \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} P\{N_m \geqq n\} &= P\{B^G_{M-m+1}\} = \sum_{i=M-m+1}^{M} (-1)^{i-M+m-1}\binom{i-1}{i-M+m-1} p_i{}^G \\ &= M^{-N}\sum_{i=M-m+1}^{M} (-1)^{i-M+m-1}\binom{i-1}{i-M+m-1}\binom{M}{i} l_i{}^G \\ &= M^{-N}\left\{\binom{M-m}{0}\binom{M}{M-m+1} l^G_{M-m+1}\right. \\ &\quad - \binom{M-m+1}{1}\binom{M}{M-m+2} l^G_{M-m+2} + \dots \\ &\quad \left. + (-1)^{m-1}\binom{M-1}{m-1}\binom{M}{M} l_M{}^G\right\} \end{aligned} \tag{2.8}$$

上の2式を，それぞれ最小回数 N_1 および最大回数 N_M の場合について

(4)　(1．7) 式は個数に関する等式として述べてあるが，ここではそれを確率に関する等式に直して利用している．

示すと次のとおりである。

$$P\{N_1\leqq n\}=P\{B_1{}^L\}$$

$$=M^{-N}\left\{\binom{M}{1}l_1{}^L-\binom{M}{2}l_2{}^L+\dots+(-1)^{M-1}\binom{M}{M}l_M{}^L\right\} \tag{2.9}$$

$$P\{N_M\leqq n\}=P\{B_M{}^L\}=M^{-N}l_M{}^L \tag{2.10}$$

$$P\{N_1\geqq n\}=P\{B_1{}^G\}=M^{-N}l_M{}^G \tag{2.11}$$

$$P\{N_M\geqq n\}=P\{B_M{}^G\}$$

$$=M^{-N}\left\{\binom{M}{1}l_1{}^G-\binom{M}{2}l_2{}^G+\dots+(-1)^{M-1}\binom{M}{M}l_M{}^G\right\} \tag{2.12}$$

ここまでをまとめると残された問題は

$$\left.\begin{aligned} l_m{}^L&\equiv l_L(m,\ n,\ M,\ N)=l\{(x_1\leqq n)\cap\dots\cap(x_m\leqq n)\}\\ l_m{}^G&\equiv l_G(m,\ n,\ M,\ N)=l\{(x_1\geqq n)\cup\dots\cup(x_m\geqq n)\}\end{aligned}\right. \tag{2.13}$$

を求める手続きということになる。

2．3　$l_m{}^L$, $l_m{}^G$ の母関数　$E_1{}^L\cap\dots\cap E_m{}^L$ に含まれる順列は，文字 $\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_m$ が n 個以下であることのほかに何も制限がないから，$l_m{}^L\equiv l_L(m,\ n,\ M,\ N)=l\{E_1{}^L\cap\dots\cap E_m{}^L\}$ に対する母関数は（1．10）式で $p=0,\ q=n,\ r=0$ とおくことにより

$$f_L(m,\ n,\ M)\equiv f(t\ ;\ M,\ m,\ 0,\ n,\ 0)$$

$$=\left(1+\frac{t}{1\,!}+\dots+\frac{t^n}{n\,!}\right)^m\left(1+\frac{t}{1\,!}+\dots\right)^{M-m}$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N\,!}l_L(m,\ n,\ M,\ N) \tag{2.14}$$

となる。同様にして $l_m{}^G\equiv l_G(m,\ n,\ M,\ N)=l(E_1{}^G\cap\dots\cap E_m{}^G)$ に対する母関数は，（1．10）式で $p=n,\ q=\infty,\ r=0$ とおくことにより

$$f_G(m,\ n,\ M)\equiv f(t\ ;\ M,\ m,\ n,\ \infty,\ 0)$$

$$=\left(\frac{t^n}{n\,!}+\frac{t^{n+1}}{(n+1)\,!}+\dots\right)^m\left(1+\frac{t}{1\,!}+\dots\right)^{M-m}$$

$$=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N\,!}l_G(m,\ n,\ M,\ N) \tag{2.14'}$$

となる。 これらのうち簡単に t のべき級数に展開できる場合を次にあげる（次の $*$ は任意の数でよい)。

$$f_L(0,*,M)=f_G(0,*,M)=\left(1+\frac{t}{1!}+\dots\right)^M=e^{Mt}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N!}M^N \tag{2.15}$$

$$f_L(1,n,1)=1+\frac{t}{1!}+\dots+\frac{t^n}{n!}=\sum_{N=0}^{n}\frac{t^N}{N!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N!}l_L(1,n,1,N)$$

$$f_G(1,n,1)=\frac{t^n}{n!}+\frac{t^{n+1}}{(n+1)!}+\dots=\sum_{N=n}^{\infty}\frac{t^N}{N!}=\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N!}l_G(1,n,1,N)$$

これらより

$$l_L(0,n,M,N)=l_G(0,n,M,N)=M^N \tag{2.16}$$

$$l_L(1,n,1,N)=\begin{cases}1 & n\geqq N\\ 0 & n<N\end{cases} \tag{2.17}$$

$$l_G(1,n,1,N)=\begin{cases}1 & n\leqq N\\ 0 & n>N\end{cases} \tag{2.17$'$}$$

をうる。また次のような関係がある。

$$f_L(m,n,m)=f_L(1,n,1)^m \qquad f_G(m,n,m)=f_G(1,n,1)^m$$

$$f_L(m,n,M)=f_L(m,n,m)e^{(M-m)x} \tag{2.18}$$

$$f_G(m,n,M)=f_G(m,n,m)e^{(M-m)x} \tag{2.18$'$}$$

2．4　M, m についての漸化式　$\alpha=L$ または G にたいして $M=M_1+M_2$, $m=m_1+m_2$, $0\leqq m_1\leqq M_1$, $0\leqq m_2\leqq M_2$ なる関係があるとき

$$f_\alpha(m,n,M)=f_\alpha(m_1,n,M_1)f_\alpha(m_2,n,M_2) \tag{2.19}$$

が成立つことは，(2．18)，(2．18′) 式から容易に分かる。この式の両辺を展開してかくと

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N!}l_\alpha(m,n,M,N)$$

$$=\sum_{N_1=0}^{\infty}\frac{t^{N_1}}{N_1!}l_\alpha(m_1,n,M_1,N_1)\sum_{N_2=0}^{\infty}\frac{t^{N_2}}{N_2!}l_\alpha(m_2,n,M_2,N_2)$$

両辺の $t^N/N!$ の係数を等しいとおくことにより，次の漸化式をうる。

$$l_\alpha(m,n,M,N)$$

$$=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}l_\alpha(m_1,\ n,\ M_1,\ N_1)l_\alpha(m_2,\ n,\ M_2,\ N-N_1) \tag{2.20}$$

(2.16)～(2.17′) 式による値（$m=0$ 又は $M=m=1$ の場合）を初期値として，この漸化式を適当に用いるならば $l_m{}^\alpha\equiv l_\alpha(m,\ n,\ M,\ N)$ の値が求まり，それらを (2.7), (2.8) 式に代入することにより $P\{N_m\leqq n\}$, $P\{N_m\geqq n\}$ の値が求まる。

2．5　特殊な形の漸化式　漸化式 (2.20) を使いやすいように，そのいくつかの特殊な形を示しておく。

1)　$M_2=m_2=1$ のとき：(2.17), (2.17) 式より，

$l_L(1,\ n,\ 1,\ N-N_1)=1 \Leftrightarrow n\geqq N-N_1 \Leftrightarrow N_1\geqq N-n$

$l_G(1,\ n,\ 1,\ N-N_1)=1 \Leftrightarrow n\leqq N-N_1 \Leftrightarrow N_1\leqq N-n$

よって

$$\left.\begin{aligned} l_L(m,\ n,\ M,\ N)&=\sum_{N_1=N-n}^{N}\binom{N}{N_1}l_L(m-1,\ n,\ M-1,\ N_1)\\ l_G(m,\ n,\ M,\ N)&=\sum_{N_1=0}^{N-n}\binom{N}{N_1}l_G(m-1,\ n,\ M-1,\ N_1)\end{aligned}\right\} \tag{2.21}$$

2)　$m_2=0$ のとき：

$$l_\alpha(m,\ n,\ M,\ N)=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}M_2{}^{N-N_1}l_\alpha(m,\ n,\ M_1,\ N_1) \tag{2.22}$$

とくに $M_2=M-m$, $m_2=0$ のとき

$$l_\alpha(m,\ n,\ M,\ N)=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}(M-m)^{N-N_1}l_\alpha(m,\ n,\ m,\ N_1) \tag{2.22′}$$

さらに $m=1$, $M_2=M-1$, $m_2=0$ とすると

$$\left.\begin{aligned} l_L(1,\ n,\ M,\ N)&=\sum_{N_1=0}^{n}\binom{N}{N_1}(M-1)^{N-N_1} \qquad (n\leqq N)\\ l_G(1,\ n,\ M,\ N)&=\sum_{N_1=n}^{N}\binom{N}{N_1}(M-1)^{N-N_1} \qquad (n\leqq N)\end{aligned}\right\} \tag{2.23}$$

また $M_2=1$, $m_2=0$ とすると

$$l_\alpha(m,\ n,\ M,\ N)=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}l_\alpha(m,\ n,\ M-1,\ N_1) \tag{2.24}$$

3)　$m=M$ のとき：　このときは $m_1=M_1$, $m_2=M_2$ ととることになる。

$$l_\alpha(M,\ m,\ M,\ N)$$
$$=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}l_\alpha(M_1,\ n,\ M_1,\ N_1)l_\alpha(M_2,\ n,\ M_2,\ N-N_1) \tag{2.25}$$

とくに

$$\begin{aligned} l_L(M,\ n,\ M,\ N)&=\sum_{N_1=N-n}^{N}\binom{N}{N_1}l_L(M-1,\ n,\ M-1,\ N_1)\\ l_G(M,\ n,\ M,\ N)&=\sum_{N_1=0}^{N-n}\binom{N}{N_1}l_G(M-1,\ n,\ M-1,\ N_1)\end{aligned} \tag{2.25$'$}$$

さらに $M=m=2$ とすれば

$$l_L(2,\ n,\ 2,\ N)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{N_1=N-n}^{n}\binom{N}{N_1} & 2n\geqq N \text{ のとき}\\ 0 & 2n<N \text{ のとき}\end{cases} \tag{2.26}$$

$$l_G(2,\ n,\ 2,\ N)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{N_1=n}^{N-n}\binom{N}{N_1} & 2n\leqq N \text{ のとき}\\ 0 & 2n>N \text{ のとき}\end{cases} \tag{2.26$'$}$$

4)　$M_1=M_2=M/2$, $m_1=m_2=m/2$（M, m 偶数）のとき：

$$l_\alpha(2m_1,\ n,\ 2M_1,\ N)$$
$$=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}l_L(m_1,\ n,\ M_1,\ N_1)l_L(m_1,\ n,\ M_1,\ N-N_1)$$
$$=2\sum_{N_1=}^{[(N-1)/2]}\binom{N}{N_1}l_L(m_1,\ n,\ M_1,\ N_1)l_L(m_1,\ n,\ M_1,\ N-N_1)$$
$$+\binom{N}{N/2}\{l_L(m_1,\ n,\ M_1,\ N/2)\}^2 \tag{2.27}$$

ここで〜〜の項は N が偶数のときのみ付け加える。

2. 6　計算の要領　まだ細部の検討がすんではいないが，手順がこみいっているので，実際に計算するさいの要領と注意点について述べておく。第1の方法による場合，計算は下の矢印の方向に進むことになる。

$$\text{初期値}\ \underset{\substack{(2.20)\text{式}\\(\text{漸化式})}}{\xrightarrow{①}}\ l_\alpha(m,\ n,\ M,\ N)\ \underset{\substack{(2.7)\\(2.8)}\text{式}}{\xrightarrow{②}}\ \begin{matrix}P\{N_m\leqq n\}\\ P\{N_m\geqq n\}\end{matrix}\ \xrightarrow{③}\ P\{N_m=n\}$$

これらの値がどのような場合に自明な値（たとえば確率が 0 または 1，個数が 0 または M^N）になるかという検討は §4 にゆずり，その他の点を概観しておく。

1）①の漸化式は（2. 20)～(2. 27）式などの形がある。初期値としては

$m=0$	（2. 16）式
$M=m=1$	（2. 17)，（2. 17′）式
$m=1$（M 任意）	（2. 23）式
$M=m=2$	（2. 26)，（2. 26′）式

の場合がすでに計算されている。

（m, M）の値のどういう順に計算していくかは，目的によっても変わってくることと思うが，1 案として，$m=M$ の場合について（2. 25′）式を用い，$m<M$ の場合については（2. 22′）式を用いるという方針が比較的簡明である。このとき $1\leqq m\leqq M$ の範囲の（m, M）について計算するとすれば次の順になる。

$$
\begin{tikzcd}
 & (1,\ M) \quad ((2.\ 23)\text{式で}) \\
(2,\ 2) \arrow[r] \arrow[d] \arrow[dr] & (2,\ M) \\
(3,\ 3) \arrow[r] \arrow[d] & (3,\ M) \\
\vdots \arrow[d] \arrow[dr] & \\
(M-1,\ M-1) \arrow[r] \arrow[d] & (9,\ M) \\
(M,\ M) &
\end{tikzcd}
$$

第 2 案としては，漸化式は（2. 20）の一般の形を用い，たとえば $M=10$, $1\leqq m\leqq 10$ の場合を計算するさいに，次の順に計算する。

$M=4$,	$1\leqq m\leqq 4$ のとき	（$M_1=M_2=2$ として）
$M=5$,	$1\leqq m\leqq 5$ のとき	（$M_1=4$, $M_2=1$ として）
$M=10$,	$1\leqq m\leqq 10$ のとき	（$M_1=M_2=5$ として）

以上において m_1, m_2 は適当な値をえらぶものとする。

2）たとえば特定の $M=M_0$, $N=N_0$ の場合を計算するとき，①の段階では，$M\leqq M_0$, $N\leqq N_0$ なる多くの（M, N）について計算しなければならな

い。そこで，特定値 (M_0, N_0) の場合だけでなく，一定範囲の (M, N) について最終結果の数表を作るように計算する方がある意味では効率的である。

3) ①，②の段階では，パラメータ n の異なる項が同一の算式中に表われることはない。(たとえば $P\{N_m \leqq n\}$ または $P\{N_m \geqq n\}$ を算出する n の範囲を限ってよい場合の計算のフローは組立てやすい。)

4) ②の段階が正負の項の交互の加算，③の段階が差計算であり，またパラメータ m, n, M, N の如何によって項が0とならない範囲などが著しく変化するので，中間段階での微少な値をカット・オフする基準を作りにくい。

§3. 第2の方法

3.1 確率変数 M_n　ここで述べる第2の方法では，具体的な計算手続きが(記号の相違を別として) 第1の方法と全く変わらない場合[(5)]も含まれるのであるが，考え方としては，文字の出現回数の順序統計量 N_m に関する命題を，次に述べるような文字の個数 M_n に関する命題におき直すことからはじめる。

整数 n にたいして，出現回数が n 回以下である文字の個数を M_n であらわす。M_n のとりうる値 m は，$m=0, 1, \ldots, M$ の範囲である。

$m \geqq 1$ のとき，次の同値関係

$$N_m \leqq n \iff N_1 \leqq \cdots \leqq N_m \leqq n \iff M_n \geqq m \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} N_m \geqq n &\iff \text{not } (N_m \leqq n-1) \iff \text{not } (M_{n-1} \geqq m) \\ &\iff M_{n-1} \leqq m-1 \end{aligned} \tag{3.1'}$$

が成立つので，確率 $P(N_m = n)$ は

$$\begin{aligned} P\{N_m = n\} &= P\{N_m \leqq n\} - P\{N_m \leqq n-1\} \\ &= P\{M_n \geqq m\} - P\{M_{n-1} \geqq m\} \end{aligned} \tag{3.2}$$

---

(5) 第1の方法で最大回数 N_M および最小回数 N_1 についてそれぞれ (2.10) および (2.11) 式にもとづいて検討することは，第2の方法において，それぞれ，$N_M \leqq n \iff M_n \geqq M \iff M_n = M$, $N_1 \geqq n \iff M_{n-1} \leqq 0 \iff M_{n-1} = 0$ とおき直して考えることと同等であり，この場合には両方法は，考え方と記号の相違を別として一致す (母関数も一致する).

$$P\{N_m=n\}=P\{N_m\geqq n\}-P\{N_m\geqq n+1\}$$
$$=P\{M_{n-1}\leqq m-1\}-P\{M_n\leqq m-1\} \qquad (3.2')$$

とあらわされる。したがって $m=1, \dots, M;\ n=0, \dots, N$ にたいして $P\{N_m=n\}$ の値を求めるには

$$P\{M_n\geqq m\} \qquad n=-1, \dots, N, \qquad m=1, \dots, M \qquad (3.3)$$

または

$$P\{M_n\leqq m\} \qquad n=-1, \dots, N, \qquad m=0, \dots, M-1 \qquad (3.3')$$

を，したがって

$$P\{M_n=m\}=P\{M_n=m|M, N\}$$
$$n=-1, \dots, N, \qquad m=0, \dots, M \qquad (3.4)$$

を求めればよい。これに対応する重複順列の個数を $l\{M_n=m|M, N\}$ とすれば

$$P\{M_n=m|M, N\}=M^{-N}l\{M_n=m|M, N\} \qquad (3.5)$$

となり，また次式も成立つ。

$$\sum_{m=0}^{M} P\{M_n=m|M, N\}=1 \qquad (3.6)$$

とくに $M=1$ の場合，次のようになることは容易に分かる。

$$P\{M_n=0|1, N\}=\begin{cases}1 & n<N \text{ のとき}\\ 0 & n\geqq N \text{ のとき}\end{cases} \qquad (3.7)$$

$$P\{M_n=1|1, N\}=\begin{cases}1 & n\geqq N \text{ のとき}\\ 0 & n<N \text{ のとき}\end{cases} \qquad (3.7')$$

3．2 $\hat{l}_m$ による表現・母関数 次に $l\{M_n=m|M, N\}$ の評価に利用できる母関数を探すことにする。まず，

$$M_n=m \iff \begin{pmatrix}N_1\leqq\cdots\leqq N_m\leqq n,\\ n<N_{m+1}\leqq\cdots\leqq N_M\end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix}\text{出現回数 } x_i \text{ は } m \text{ 個の文}\\ \text{字で } n \text{ 回以下，その他の}\\ \text{文字で } (n+1) \text{ 回以上}\end{pmatrix}$$

の関係がある。そこで，文字 $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ の出現回数がいずれも n 回以下で，その他の文字 $\alpha_{m+1}, \dots, \alpha_M$ の出現回数がいずれも $(n+1)$ 回以上となるような重複順列の個数を

$$\hat{l}_m \equiv \hat{l}(m, n, M, N) \tag{3.8}$$

とおくとき，文字に関する対称性を用いると

$$l\{M_n = m \mid M, N\} = \binom{M}{m} \hat{l}(m, n, M, N) \tag{3.9}$$

$$P\{M_n = m \mid M, N\} = M^{-N} \binom{M}{m} \hat{l}(m, n, M, N) \tag{3.9'}$$

の関係が成立つ。この $\hat{l}(m, n, M, N)$ にたいする母関数は，(1.10) 式で $p=0$, $q=n$, $r=n+1$ とおくことにより

$$\begin{aligned} \hat{f}(m, n, M) &\equiv f(t;\ M, m, 0, n, n+1) \\ &= \left(1 + \frac{t}{1!} + \dots + \frac{t^n}{n!}\right)^m \left(\frac{t^{n+1}}{(n+1)!} + \frac{t^{n+2}}{(n+2)!} + \dots\right)^{M-m} \\ &= \sum_{N=0}^{\infty} \frac{t^N}{N!} \hat{l}(m, n, M, N) \end{aligned} \tag{3.10}$$

となる。とくに，$M=1$, $m=0$ の場合および $M=1$, $m=1$ の場合には次の結果をうる。

$$\hat{l}(0, n, 1, N) = \begin{cases} 1 & n < N \text{ のとき} \\ 0 & n \geqq N \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\hat{l}(1, n, 1, N) = \begin{cases} 1 & n \geqq N \text{ のとき} \\ 0 & n > N \text{ のとき} \end{cases} \tag{3.11'}$$

また，一般に，(3.9′) および (3.6) 式より次式が成立つ。

$$\sum_{m=0}^{M} \binom{M}{m} \hat{l}(m, n, M, N) = M^N \tag{3.12}$$

3.3 M, m についての漸化式　$\hat{l}_m$ についての漸化式は 2.4 のときとほぼ同じ要領でえられる。いま $M \geqq 2$, $0 \leqq m \leqq M$ のとき，整数 M_1, M_2, m_1, m_2 を

$$M = M_1 + M_2,\ M_1 \geqq 1,\ M_2 \geqq 1,\ m = m_1 + m_2,\ 0 \leqq m_1 \leqq M_1,\ 0 \leqq m_2 \leqq M_2$$

となるように選ぶとき

$$\hat{f}(m, n, M) = \hat{f}(m_1, n, M_1) \hat{f}(m_2, n, M_2) \tag{3.13}$$

の関係のあることが，(3.10) 式の形から容易に分かる。この式の両辺を展

開してかくと

$$\sum_{N=0}^{\infty}\frac{t^N}{N!}\hat{l}(m,\ n,\ M,\ N)$$

$$=\sum_{N_1=0}^{\infty}\frac{t^{N_1}}{N_1!}\hat{l}(m_1,\ n,\ M_1,\ N_1)\sum_{N_2=0}^{\infty}\frac{t^{N_2}}{N_2!}\hat{l}(m_2,\ n,\ M_2,\ N_2)$$

両辺の $t^N/N!$ の係数を等しいとおくことにより次の漸化式をうる。

$$\hat{l}(m,\ n,\ M,\ N)$$

$$=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}\hat{l}(m_1,\ n,\ M_1,\ N_1)\hat{l}(m_2,\ n,\ M_2,\ N-N_1) \tag{3.14}$$

よって，(3. 11)，(3. 11′) 式による $M=1,\ m=0,\ 1$ のときの $\hat{l}_m$ の値を初期値としてこの漸化式を適当に用いれば $\hat{l}_m=\hat{l}(m,\ n,\ M,\ N)$ の値が求まり，次に (3. 9′) 式で $P\{M_n=m\}$ を求め，最後に (3. 2)，(3. 2′) 式を用いて $P\{N_m=n\}$ を求めることになる。

3. 4　特殊な形の漸化式　漸化式 (3. 14) のいくつかの特殊な形を示しておく。

1)　$M_2=m_2=1$ のとき：　(3. 11′) 式より

$$\hat{l}(1,\ n,\ 1,\ N-N_1)=1 \Longleftrightarrow n\geqq N-N_1 \Longleftrightarrow N_1\geqq N-n$$

よって

$$\hat{l}(m,\ n,\ M,\ N)=\sum_{N_1=N-n}^{N}\binom{N}{N_1}\hat{l}(m-1,\ n,\ M-1,\ N_1) \tag{3.15}$$

2)　$M_2=1,\ m_2=0$ のとき：　(3.11) 式より

$$\hat{l}(0,\ n,\ 1,\ N-N_1)=1 \Longleftrightarrow n<N-N_1 \Longleftrightarrow N_1<N-n$$

$$\hat{l}(m,\ n,\ M,\ N)=\sum_{N_1=0}^{N-n-1}\binom{N}{N_1}\hat{l}(m,\ n,\ M-1,\ N_1) \tag{3.16}$$

3)　$M_1=m_1=m$ のとき：

$$\hat{l}(m,\ n,\ M,\ N)$$

$$=\sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}\hat{l}(m,\ n,\ m,\ N_1)\,\hat{l}(0,\ n,\ M-m,\ N-M_1) \tag{3.17}$$

4)　$m=M$ のとき：　このとき，$m_1=M_1$, $m_2=M_2$ となる。

$$\hat{l}(M, n, M, N) = \sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1} l(M_1, n, M_1, N_1)\hat{l}(M_2, n, M_2, N-N_1) \quad (3.18)$$

とくに $m_2=M_2=1$ のとき

$$\hat{l}(M, n, M, N)=\sum_{N_1=N-n}^{N}\binom{N}{N_1}\hat{l}(M-1, n, M-1, N) \quad (3.18')$$

5)　$m=0$ のとき：　このとき $m_1=m_2=0$ となる。

$$\hat{l}(0, n, M, N) = \sum_{N_1=0}^{N}\binom{N}{N_1}\hat{l}(0, n, M_1, N_1)\hat{l}(0, n, M_2, N-N_1) \quad (3.19)$$

とくに $m_2=0$, $M_2=1$ のとき

$$\hat{l}(0, n, M, N)=\sum_{N_1=0}^{N-n-1}\binom{N}{N_1}\hat{l}(m, n, M-1, N_1) \quad (3.19')$$

6)　$M=2$ のとき：　$m=0, 1, 2$ にたいする値は，それぞれ例えば，(3.19′), (3.16), (3.18′) 式を用いると次のとおり。

$$\hat{l}(0, n, 2, N)=\sum_{N_1=n+1}^{N-n-1}\binom{N}{N_1} \qquad n\leqq\frac{N}{2}-1 \text{ のとき} \quad (3.20)$$

$$\hat{l}(1, n, 2, N)=\begin{cases}\displaystyle\sum_{N_1=0}^{n}\binom{N}{N_1} & n\leqq\dfrac{N-1}{2} \text{ のとき}\\ \displaystyle\sum_{N_1=0}^{N-n-1}\binom{N}{N_1} & n\geqq\dfrac{N-1}{2} \text{ のとき}\end{cases} \quad (3.20')$$

$$\hat{l}(2, n, 2, N)=\sum_{N_1=N-n}^{N}\binom{N}{N_1} \qquad n\geqq\frac{N}{2} \text{ のとき} \quad (3.20'')$$

3.5　計算の要領　第2の方法の要点は次のとおりである。

$$\text{初期値} \xrightarrow[\substack{(3.14)\text{式}\\(\text{漸化式})}]{①} \hat{l}(m, n, M, N) \xrightarrow[(3.9)\text{式}]{②} P\{M_n=m\} \xrightarrow{③}$$

$$\begin{matrix}P\{M_n\geqq m\}\\P\{M_n\leqq m\}\end{matrix} \xrightarrow[\substack{(3.2)\text{式}\\(3.2')\text{式}}]{④} P\{N_m=n\}$$

形式的には4段階にわたるが，②は単なる掛け算であるから，実質的には第1の方法よりも簡略化されたといってよいであろう。

1）①の漸化式には（3.14）～（3.20″）式などの形があり，初期値は $M=1,\ m=0,1$ および $M=2,\ m=0,1,2$ の場合について計算されている。計算していく順序としては，1案としては，$m=M$ の場合を（3.18′）式により漸化式計算，$m=0$ の場合を（3.19′）式により漸化式計算，しかるのちに（3.17）式を利用する手順が考えられる。そのほか第1の方法での第2案に準じた手順も考えられる。

2）まだ述べておきたいこともあるが，留意点は第1の方法と類似した事柄が多いので省略する（2.6を参照)。

§4.　値が0とならない条件

4.1　考察の対象　第1および第2の方法で考察した各種の確率 p および個数 l について，$p\neq 0$ となる条件，$p=1$ となる条件，$l\neq 0$ となる条件，$l=$(自明な値（$\neq 0$)）となる条件などをここにまとめておく。ここで扱かうのは次の確率および個数である。

$$\begin{cases} p_1\equiv p\{N_m=n\} \\ p_2\equiv p\{N_m\leqq n\} \\ \quad =p\{M_m\geqq n\} & \text{(3.1) 式} \\ p_3\equiv p\{N_m\leqq n\} \\ \quad =p\{M_{m-1}\leqq n-1\} & \text{(3.1}'\text{) 式} \\ p_3'\equiv p\{M_m\leqq n\} \\ p_4\equiv p\{M_n=m\} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \left.\begin{aligned} l_1\equiv l_m{}^L=l_L(m,n,M,N) \\ l_2\equiv l_m{}^G=l_G(m,n,M,N) \end{aligned}\right\} & \text{(2.3) 式} \\ l_3\equiv \hat{l}_m=\hat{l}(m,n,M,N) & \text{(3.8) 式} \end{cases}$$

このうち $l_3=\hat{l}_m$ については（3.9′）式より

$$p_4\neq 0 \iff l_3\neq 0 \qquad p_4=1 \iff l_3=M^N\binom{M}{m}^{-1} \tag{4.1}$$

となるので，p_4 について条件を述べればそれで足りる。以下では，$p_4,\ p_2,\ p_3',\ p_3,\ p_1,\ l_1,\ l_2$ の順に考察する。なお $M\geqq 1,\ N\geqq 0,\ 0\leqq m\leqq M$（$n$ は任意）

の範囲に限定して考える。

4．2　$p_4 \equiv P\{M_n=m\}$　結果をまとめると

$p_4 \equiv P\{M_n=m\} \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{lll} & n<0,\ m=0 & \\ \text{or} & n\geqq 0,\ 0\leqq m<M & \Rightarrow\ (M-m)(n+1)\leqq N \\ \text{or} & n\geqq 0,\ m=M & \Rightarrow\ N\leqq nM \end{array}\right\} \quad (4.2)$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n<0 & \Rightarrow\ m=0 \\ 0\leqq n\leqq (N/M)-1 & \Rightarrow\ 0\leqq m\leqq M-1 \\ (N/M)-1<n<N/M & \Rightarrow\ M-N/(n+1)\leqq m\leqq M-1 \\ N/M\leqq n<N & \Rightarrow\ M-N/(n+1)\leqq m\leqq M \\ N\leqq n & \Rightarrow\ m=M \end{array}\right\} \quad (4.2')$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} m=0 & \Rightarrow\ 0\leqq n\leqq (N/M)-1 \\ 1\leqq m\leqq M-1 & \Rightarrow\ 0\leqq n\leqq N/(M-m)-1 \\ m=M & \Rightarrow\ N/M\leqq n \end{array}\right\} \quad (4.2'')$$

$p_4 \equiv P\{M_n=m\} = 1$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n<0 & \Rightarrow\ m=0 \\ 0\leqq n\leqq N-1,\ M=1 & \Rightarrow\ m=0 \\ 0\leqq n,\ M=2 & \Rightarrow\ N=2n+1,\ m=1 \\ n=0,\ M>2 & \Rightarrow\ N=1,\ m=M-1 \\ n\geqq N & \Rightarrow\ m=M \end{array}\right\} \quad (4.3)$$

簡単に説明すると

$p_4 \neq 0 \Longleftrightarrow$（$n$ 回以下の文字は m 個（になりうる））

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 0\leqq m<M & \Rightarrow\ 0\leqq N_1\leqq\cdots\leqq N_m\leqq n<N_{m+1}\leqq\cdots\leqq N_M \\ m=M & \Rightarrow\ 0\leqq N_1\leqq\cdots\leqq N_M\leqq n \end{array}\right.$$

となる。$n<0$ のとき条件は明らかに $m=0$。$n>0$ のときは

$0\leqq m<M$ ならば　　$N=\sum_1^M N_i=\sum_1^m+\sum_{m+1}^M\geqq\sum_{m+1}^M\geqq(M-m)(n+1)$

$m=M$ ならば　　$N=\sum_{1}^{M} N_i \leqq nM$

これらをまとめて（4. 2）をうる。（4. 2′），（4. 2″）はこれを n, m について整理したものである（（4. 2）の条件を（m, n）を座標とする平面上に図示して考えると分かりやすい）。（4. 3）については

$p_4=1 \Leftrightarrow$（$p_4 \neq 0$ となる m は一意的）

なる関係があるから，（4. 2′）に示される m についての不等式において，不等式の下限の値が，{不等式の上限の値（これは整数値）-1} をこえる条件を調べればよい。

4. 3　$p_2 \equiv P\{M_m \geqq n\} = P\{N_m \leqq n\}$　　結果をまとめると

$p_2 \equiv P\{M_n \geqq m\} = P\{N_m \leqq n\} \neq 0$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n<0 & \Rightarrow m=0 \\ 0 \leqq n < N/M & \Rightarrow m \leqq M-1 \\ N/M \leqq n & \Rightarrow m \leqq M \end{array}\right\} \qquad (4.\,4)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} m=0 & \\ 1 \leqq m \leqq M-1 & \Rightarrow n \geqq 0 \\ m=M & \Rightarrow n \geqq M/N \end{array}\right\} \qquad (4.\,4')$$

$p_2 \equiv P\{M_n \geqq m\} = P\{N_m \leqq n\} = 1$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n \leqq (N/M)-1 & \Rightarrow m \leqq 0 \\ (N/M)-1 < n < N & \Rightarrow m < M+1-N/(n+1) \\ N \leqq n & \Rightarrow m \leqq M \end{array}\right\} \qquad (4.\,5)$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} m=0 & \\ 1 \leqq m \leqq M-1 & \Rightarrow n > N/(M-m+1)-1 \\ m=M & \Rightarrow n \geqq N \end{array}\right\} \qquad (4.\,5')$$

（4. 2′）の条件が　$m_L \leqq m \leqq m_U \cdots$①　の形であるとすると

$$\left.\begin{array}{llll} p_2 \neq 0 & \Longleftrightarrow & m \leqq m_U & \\ p_2 = 1 & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} m \text{ が ① の範囲の} \\ \text{最小整数以下} \end{pmatrix} & \Longleftrightarrow \quad m < m_L - 1 \\ p_3' \neq 0 & \Longleftrightarrow & m \geqq m_L & \\ p_3' = 1 & \Longleftrightarrow & \begin{pmatrix} m \text{ が ① の範囲の} \\ \text{最大整数以上} \end{pmatrix} & \Longleftrightarrow \quad m > m_U - 1 \end{array}\right\} \tag{4.6}$$

このことを用いると，いずれの条件も（4.2′）から簡単に導かれる。

4．4　$p_3' \equiv P\{M_n \leqq m\}$

$p_3' \equiv P\{M_n \leqq m\} \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n \leqq (N/M) - 1 & \Rightarrow m \geqq 0 \\ (N/M) - 1 < n < N & \Rightarrow m \geqq M - N/(n+1) \\ N \leqq n & \Rightarrow m \geqq M \end{array}\right\} \tag{4.7}$$

$p_3' \equiv P\{M_n \leqq m\} = 1$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n < 0 & \Rightarrow m \geqq 0 \\ 0 \leqq n < N/M & \Rightarrow m \geqq M - 1 \\ N/M \leqq n & \Rightarrow m \geqq M \end{array}\right\} \tag{4.8}$$

導き方は（4.6）を参照。

4．5　$p_3 \equiv P\{M_{n-1} \leqq m-1\} = P\{N_m \geqq n\}$

$p_3 \equiv P\{M_{n-1} \leqq m-1\} = P\{N_m \geqq n\} \neq 0$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n \leqq N/M & \Rightarrow m \geqq 1 \\ N/M < n \leqq N & \Rightarrow m \geqq M + 1 - (N/n) \end{array}\right\} \tag{4.9}$$

$$\Longleftrightarrow \quad 1 \leqq m \leqq M, \qquad n \leqq N/(M - m + 1) \tag{4.9′}$$

$p_3 \equiv P\{M_{n-1} \leqq m-1\} = P\{N_m \geqq n\} = 1$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} n \leqq 0 & \Rightarrow m \geqq 1 \\ 1 \leqq n < (N/M) + 1 & \Rightarrow m = M \end{array}\right\} \tag{4.10}$$

$$\Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{ll} 1 \leqq m \leqq M - 1 & \Rightarrow n \leqq 0 \\ m = M & \Rightarrow n < (N/M) + 1 \end{array}\right\} \tag{4.10′}$$

これらは p_3' についての条件より直ちにみちびかれる。

4．6　$p_1\equiv P\{N_m=n\}$　$(1\leqq m\leqq M$ とする$)$

$$p_1\equiv P\{N_m=n\}\neq 0$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{cases} 1\leqq m\leqq M-1 & \Rightarrow\ 0\leqq n\leqq N/(M-m+1) \\ m=M & \Rightarrow\ N/M\leqq n\leqq N \end{cases}\right\} \quad (4.11)$$

$$\Longleftrightarrow \left.\begin{cases} 0\leqq n< M/N & \Rightarrow\ 1\leqq m\leqq M-1 \\ M/N\leqq n\leqq N & \Rightarrow\ M+1-N/n\leqq m\leqq M \end{cases}\right\} \quad (4.11')$$

これらは p_2 または p_3 の条件から導かれる。(p_1 の条件から p_2, p_3' の条件を導く場合の逆の要領による。)

4．7　$l_1\equiv l_L(m, n, M, N)$　と　$l_2\equiv l_G(m, n, M, N)$

$$\left.\begin{cases} l_1\neq 0 & \Longleftrightarrow\ p_2\equiv P\{N_m\leqq n\}\neq 0\ \Longleftrightarrow\ (4.4),\ (4.4')\text{式} \\ l_2\neq 0 & \Longleftrightarrow\ p_3\equiv P\{N_m\geqq n\}\neq 0\ \Longleftrightarrow\ (4.9),\ (4.9')\text{式} \\ l_1=M^N & \Longleftrightarrow\ N\leqq n \\ l_2=M^N & \Longleftrightarrow\ n\leqq 0 \end{cases}\right\} \quad (4.12)$$

以上のことは容易に分かる。

なお $l_1=l\{(x_1\leqq n)\cap\dots\cap(x_m\leqq n)\}$ については，$n+1>N/2$ のとき，2つ以上の x_i について同時に $x_i\geqq n+1$ とはなりえないので，

$$\bigcap_{i=1}^{m}(x_i\leqq n),\ (x_1\geqq n+1),\ \dots,\ (x_m\geqq n+1)$$

によりすべての場合がつくされる。すなわち

$$l_L(m, n, M, N)+m\, l_G(1, n+1, M, N)=M^N$$

となり，この式と，(2．23) 式より

$$l_L(m, n, M, N)=M^N-m\sum_{N_1=n+1}^{N}\binom{M}{M_1}(M-1)^{N-N_1}$$

$$n>(N/2)+1 \text{ のとき} \quad (4.13)$$

をうる。　（未完）

(1976．2．4)

参考文献

［1］ 河田敬義・丸山文行・鍋谷清治『大学演習　数理統計』裳華房（1962）.
［2］ C.L. リウ著，伊里正夫・伊里由美訳『組合せ数学入門 I』共立出版（1972）.
［3］「解答を求む」『日本統計学会誌』Vol. 3, No. 2, (1973), 90–91.