マンハイムの階層的サーチにおける主観的確率分布の修正について

遠藤　　薫

1. はじめに

ある財について，価格が売手によってことなり，買手はどの売手がどの価格で売っているかわからないとき，買手は売手のあいだをまわってみて低い価格で買おうとするであろう。このような価格のサーチという行動を買手がどのようにおこなうとよいかについては多くの研究がおこなわれている（リップマン＝マッコール〔3〕）。

そこでは買手が売手のあいだを１人１人聞いてまわる，あるいは次々と価格を知らされるということが基本前提であり，買手が売手の何らかの特徴にもとづいて売手全体の中からあるグループをとりだし，そのグループについての価格に関する何らかの情報を得るという行動はまだ分析されていない。このようなグループの例としては売手の地域別によるグループとか，規模別によるグループとかが考えられ，価格についての何らかの情報としては，グループ内の売手の価格のおおよその平均値などが考えられる。ある地域ならおおよそいくらぐらいであり，デパートならおおいよそくらぐらいという情報を得るということである。

このような情報を得ることができる場合もあるであろうし，できない場合もあるであろう。経験的な知識が十分に役に立つ場合にはあえてそのような情報を得ることが無意味な場合もあるであろう。しかし売手の価格を直接聞くほかに，何らかのグループに関する大まかな，いわば間接的な情報も利用可能な場

原稿受領日　1982年4月30日

合にどのようにサーチをおこなうのが合理的かについて考察を加えておくことは意味があるであろう。個々の売手から直接価格を聞くという行動と，個々のグループについて価格に関する大まかな情報を得るという行動とをどのように組合わせてサーチするとよいかということである。

あるグループについて大まかな情報を得たときに，その値が十分に低いものであってもただちに買うことはできない。買手はそのグループ内の個々の売手の価格をある程度確かめてみる必要がある。すなわち買手はこのグループ内の売手の価格をサーチする必要がある。大まかな情報が十分に低い値のものでなければ他のグループについてまた大まかな情報を得ることを考えてもよく，あるいはグループを考えることなく売手全体について価格をサーチすることを考えてもよい。あるいは以前に調べたグループ内をサーチしてみることも可能である。あるグループに関する間接的な大まかな情報は買うということのためには直接役に立たず，あらためてグループ内をサーチしなければならないことをサーチの階層性と呼ぶことにする。

このようなサーチの階層性をとりあつかうモデルは高速道路のルートを決めることを目的としてマンハイム〔4〕によって研究された。本稿では第2節でサーチにおける階層性について述べ，第3節でそこにおける主観的確率分布の修正に関するマンハイムの手法について解説する。第4節ではマンハイムの無視した面に注目し，それを組込んだ1つの手法を示す。

2. サーチにおける階層性

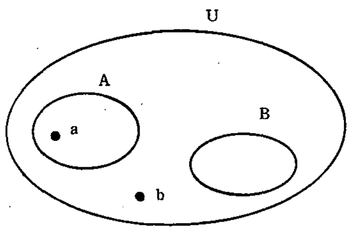
個々の売手を $a, b, c,\cdots$ で表わし，売手全体の集合を U で表わす。地域別とか規模別とか何らかの基準でとられたある特徴をもった売手のグループを各々 $A, B, C,\cdots$ で表わす。このグループ $A, B, C,\cdots$ を特に U の部分集合と言うことにする。すなわち売手全体でもなく個々の売手でもないものをグループあるいは部分集合と言うことにする。

1つの部分集合について得られた大まかな価格についての情報を x で表わし，1人の売手の価格は y で表わすとする。たとえば部分集合 A, B, C につ

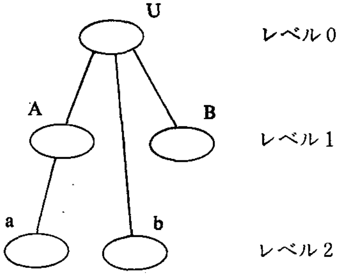
いての価格に関する大まかな情報は x_1, x_2, x_3 で示され，売手 a, b, c の価格は y_1, y_2, y_3 で示される。x も y も同じ単位をもつとする。

個々の売手から価格を聞いたときは，次の3通りの行動が可能である。(1) 今示された価格で買う。(2) さらにサーチをしてみる。(3) 過去に知り得た内でもっとも低い価格をつけた売手からその時の価格で買う（このようにできる場合はリコールができると言う)。ここで (2) のさらにサーチをしてみるという行動はさらにくわしく分けると次の3通りとなる。(イ)すでにあるいくつかの部分集合の中から1つを選び，その部分集合の中から1人の売手をとりだして価格を聞く(後の節では売手はランダムにとりだされたものとみなす)。(ロ) 新しい部分集合をとりだしてその部分集合についての価格に関する大まかな情報を得る（やはり後の節では新しい部分集合はランダムにとりだされたものとみなす)。(ハ) 大まかな情報というものにはまったく頼らずに売手全体の中から1人の売手をとりだしてその売手の価格を聞く（前と同様に，後の節では売手はランダムにとりだされたものとみなす)。

売手のある部分集合についての価格に関する大まかな情報を得た場合は，特定の売手の価格を知ったわけではないのでただちにその大まかな価格で買うということはできない。(1) さらにサーチをしてみるか，あるいは (2) 過去に知り得た内でもっとも低い価格をつけた売手からその時の価格で買うという2通りが可能なだけである。ここでも (1) のさらにサーチをしてみるは細かく分けると前と同じ3通りとなるが，今とりだされたばかりの部分集合は (イ)



(a) 包含関係



(b) 階層構造

図1　サーチにおける階層性

のすでにあるいくつかの部分集合の1つとして含まれることになる。

このようなサーチの仕方は図1のように図で示すことができる。図1 (*a*) の *a*, *b* は個々の売手を示し，*U* は売手全体の集合，*A*, *B* は *U* の部分集合を示しており，何らかの基準で特徴づけられた売手のグループである。*a* と *A* の関係は，*a* は部分集合 *A* 内の1人の売手ということであり，*A* について大まかな情報を得たあとで，その部分集合 *A* 内でサーチがおこなわれ，とりだされた売手が *a* であることが示されている。部分集合 *B* について大まかな情報を得たあと *B* 内でサーチをすることはまだおこなわれていない。*b* は売手全体を対象にしたサーチによってとられた1人の売手を表わしている。もし *A* が先にとりだされており，次に *B* をとりだしたとき，*A* にもどって *A* から *a* をとりだすということもおこりうる。

売手 *a* は部分集合 *A* に包含され，売手 *a*, *b*, と部分集合 *A*, *B* は集合 *U* に包含されている。これが図1 (*a*) の示している包含関係である。このような包含関係は図1 (*b*) のようにトリー構造で表現することができるので，直接的な情報の他に間接的な情報も利用できる場合にはサーチが階層構造をもつと言うことにする。ここで図1 (*b*) において *U* のある位置をレベル0, *A*, *B* のある位置をレベル1, *a*, *b* のある位置をレベル2と呼ぶことにする。一般的には大まかな情報における大まかさの程度を細かく分けることによりレベルの数を増やすことができる。その場合も一番下のレベルは直接的な情報が得られるものに対応するとこになる。

3. マンハイムモデルにおける主観的確率分布の修正

マンハイムモデルの基本は図に示された簡単な階層構造によって説明することができる。マンハイムの場合は高速道路のルートを決めるために何種類もの調査がおこなわれている実際にそくして，それらをどのように組合せて進めてゆくと合理的かについてのモデルを考えた。そこでは調査結果を逐次検討しながら，次にどの種類の調査をおこなうと，あるいはもう調査を終了すると建設費用と調査費用の合計を最小にすることができるかという問題が研究された。

本節では買手が低い価格をサーチする場合にそくしてマンハイムモデルのうち特に主観的確率分布の修正に関して解説する。

ある同一の財について価格が売手によってことなっていて，買手はどの売手がどの価格で売っているかわからないとき，買手にとって価格は確率変数であるとみなすことができる。ただしこの確率変数がどういう確率分布にしたがうかは完全に既知ではなく，ある1つのパラメーターが未知であるとする。どのようなパラメーターであるかはここでは問わない。

なお，もし部分集合 $A, B, C,\cdots$ について各々の価格の確率分布が既知であれば，あらかじめそれらの分布を比較して他よりも低い価格を得ることが期待される部分集合を選び，もっぱらその部分集合についてサーチをおこなうとよい。したがって図1のようにサーチがおこなわれるのは個々の部分集合について価格の分布が完全には知られていないということから生じている。

買手が売手全体の中から1人の売手をとりだしてその売手の価格を知ることは，確率変数としての価格の1つの実現値を得たことになる。確率変数としての価格を Y で表わし，実現値を y で表わすことにする。ここで買手はランダムに売手の1人をとりだしたとみなすことにする。図1では売手 b の価格が y_2 であるということになる（売手 a の価格は y_1 とするが，売手 a についてはあとで述べる）。

この確率変数 Y の密度関数を $f_2(y|\theta)$ とする。θ は未知パラメーターである。f の添字の2はレベル2に位置していることになっている個々の売手の価格を聞くことを表わすものとする。このように個々の売手をとりだすことを実験2ということにする（調査2といってもサーチ2といってもよいであろう）。未知パラメーター θ については主観的確率分布を与えることができるとし，確率変数 Θ のとりうる値が θ であるとする。これは売手全体の集合 U についての価格の確率分布について考えられているものであるから，ここでは確率変数 Θ の密度関数は $g_U(\theta)$ と表わすものとする。

もし直接売手から価格を聞くという行動だけが許されているのであれば，$g_U(\theta)$ は得られる価格 $y_1, y_2,\cdots$ に対応する $f_2(y_1|\theta), f_2(y_2|\theta),\cdots$ を用いてベイズ

の定理により修正され，さらにサーチを続けるべきか，もうサーチを止めるべきかが決定される。

直接売手から価格を聞くことのほかに，なんらかの特徴で区別された売手の部分集合からその部分集合についての価格に関する大まかな情報を得ることができるとき，その値を x で表わすことにする。図1では部分集合 A について x_1 を得，部分集合 B について x_2 を得るというようになる。x_1, x_2 は大まかな情報を表わす確率変数 X の実現値であると考え，確率変数 X の密度関数を $f_1(x|\theta)$ とする。θ は$f_2(y|\theta)$ の θ と同一の意味をもつ未知パラメーターとする。f の添字の1は部分集合 A, B,…がレベル1に位置することを示している。レベル1におかれることになる部分集合をとりだして大まかな情報を得ることを実験1と呼ぶことにする。

$f_1(x|\theta)$ は $f_2(y|\theta)$ から導かれる場合もあるであろうし，そのようなことはできなくてマンハイムの場合のように経験的にしか設定できない場合もあるであろう。その場合も $f_1(x|\theta)$ と $f_2(y|\theta)$ の θ はともに同じ意味をもつパラメーターであるとする。また $f_2(y|\theta)$ の θ は集合 U について考えられているものであるが，$f_1(x|\theta)$ の θ も集合 U について考えられているものとする。このようにすると $f_1(x|\theta)$ の θ についての主観的確率分布は先ほどの$g_U(\theta)$ と同じものとしてよく，実験1を用いて大まかな情報 x を観測したときにも集合 U についての主観的確率分布 $g_U(\theta)$ を $f_1(x|\theta)$ を用いて修正するのにベイズの定理を用いることができる。

実験1によって集合 U からとり出された部分集合の A や B はそれ自体売手の集合である。したがって，この部分集合に属する売手の価格の分布を考えることができる。これをどうするかについてマンハイムは部分集合 A とか B についての価格の確率分布は集合 U についての価格の確率分布 $f_2(y|\theta)$ と同一であると仮定した。θ は未知パラメーターであり，したがって次に部分集合 A とか B の各々についての確率変数 Θ の主観的確率分布を考えなければならないことになる。これについてもたとえば部分集合 A がすぐ上の集合 U からまさにとりだされたとき，部分集合 A についての Θ の主観的確率分

布 $g_A(\theta)$ はすぐ上の集合 U についての Θ の主観的確率分布 $g_U(\theta)$ と同一であると仮定する。「すぐ」という形容はレベルの数が図1の例より多くなったときに必要となり，そのとき部分集合の上に位置するものは別な基準による部分集合かあるいは集合 U となる。

部分集合 A について x_1 という値が観測されてすぐ上にある集合 U についての Θ の主観的確率分布 $g_U(\theta)$ がベイズの定理を用いて $f_1(x_1|\theta)$ によって修正されたとき，いまとりだされたばかりの部分集合 A についての Θ の主観的確率分布 $g_A(\theta)$ もまったく前者の場合と同じようにベイズの定理を用いて $f_1(x_1|\theta)$ によって修正すると仮定する。したがって集合 U から部分集合 A がとりだされて x_1 という値が観測されたとき，U についての Θ の主観的確率分布 $g_U(\theta)$ と A についての Θ の主観的確率分布 $g_A(\theta)$ は最初同一と仮定され，さらに次に同じ $f_1(x_1|\theta)$ を用いて修正されるので，集合 U についての Θ の事後分布 $g_U(\theta|x_1)$ と集合 A についての Θ の事後分布 $g_A(\theta|x_1)$ はまったく同じものとなる。ここで

$$g_U(\theta|x_1)=\frac{f_1(x_1|\theta)g_U(\theta)}{\int f_1(x_1|\theta)g_U(\theta)d\theta}$$

$$g_A(\theta|x_1)=\frac{f_1(x_1|\theta)g_A(\theta)}{\int f_1(x_1|\theta)g_A(\theta)d\theta}$$

である。また図2のように表わすことができる。

これは大へん強い仮定を含んだルールである。部分集合 A について観測値 x_1 を得る前に A についての Θ の主観的確率分布 $g_A(\theta)$ が，集合 U（ここから A がとり出された）の Θ についての主観的確率分布 $g_U(\theta)$ と同一であるとみなすのは，観測結果を得る前は両者の間に差異を見出すことができないという理由からもっともと思われる。次に集合 U についての Θ の主観的確率分布 $g_U(\theta)$ が観測結果 x_1 を得たあと $f_1(x_1|\theta)$ を用いてベイズの

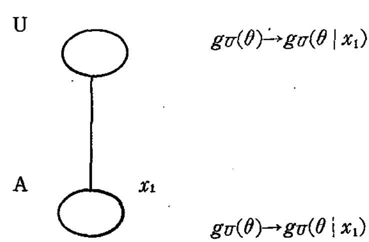


図 2　とり出された部分集合 A と集合 U についての主観的確率分布の修正

定理により修正されることにも問題はないとしてよいであろう。しかし集合 U からとりだされたばかりの部分集合 A についての Θ の主観的確率分布 $g_A(\theta)$ を $f_1(x_1|\theta)$ を用いてベイズの定理によって修正するということは本来あり得ないことであり，階層構造であるがゆえにもちあがった新しい問題をとりあえずベイズの定理を変則的に用いて処理しているにすぎない。

しかし部分集合 A はまさに観測された対象そのものであり，それについて観測値 x_1 を得たのであるから，A についての Θ の主観的確率分布 $g_A(\theta)$ を修正しないままにしておくのは消極的であり，むしろ逆に，$g_U(\theta)$ が修正される場合よりも強く修正されることが相対的には妥当と考えられる。したがって集合 U についての Θ の主観的確率分布の修正と同じように修正されるのは相対的にひかえめなルールであるともいえる。しかし根本的には解決になっていない。この問題は階層構造にベイズ接近するときのもっとも大きな問題と考えられるが，上記のルールを本稿でも次節ではそのまま用いるものとする。マンハイムの手法は合理的な手法であることを目ざしているものの，ヒューリスティックな手法である。次節で示される手法も基本的にマンハイムの手法にもとづいているためやはりヒューリスティックなもので，問題点として残る。

部分集合 A とか B は各々売手の集合である。この部分集合内の売手のつけている価格の確率分布は集合 U についてのの価格の確率分布 $f_2(y|\theta)$ と同一とみなすと先に仮定した。部分集合 A から1人の売手 a をとりだして価格 y_1 を知ったときは $f_2(y_1|\theta)$ を用いて集合 A についての Θ の主観的確率分布 $g_A(\theta)$ を修正するのにベイズの定理を用いることができる。またこのとき部分集合 A を包含している（部分集合 A の上にある）集合 U についての Θ の主観的確率分布 $g_U(\theta)$ の修正にも $f_2(y_1|\theta)$ を用いてベイズの定理を適用することができると仮定する。後者の手法についてはあとで問題点としてとりあげる。

売手 a についての価格は1つだけであり，売手 a の価格の確率分布というものを考える必要はない。このことは集合 U から1人の売手 b をとりだしたときも同様である。すなわち一番下のレベル（図1の例ではレベル2）のも

のがとりだされたときはそのものの価格の確率分布を考える必要はない。図2においてもし部分集合 A のところが売手 a であったとすると，g_A (θ) に相当するものはなくなり，したがって修正ということもおこなわれない。

実験2は最初は集合 U から個々の売手をとりだすことを意味したが，前記の仮定から，部分集合 A とか B から個々の売手をとりだすときにも実験2といってかまわないであろう。このとき集合 U に実験2を適用して売手 b をとり出す，部合 A に実験2を適用して売手 a をとり出すというように表現してちがいをはっきりさせることができる。

とりだされた部分集合あるいは売手を包含する集合あるいは部分集合と，とりだされた部分集合自身についての U の主観的確率分布の修正は上に述べたようにおこなうことを仮定する。他の部分集合についてはマンハイムは次のように仮定する。主観的確率分布の修正は観測値に対応した部分集合と，それを包含する集合あるいは部分集合についてのみおこない，他の部分集合に対する影響はほとんどないと仮定して修正はおこなわないとする。

階層構造における主観的確率分布の修正をマンハイムは以上のようにおこなった。用いられた基本仮定は次のつである。

(1) 主観的確率分布の修正にはベイズの定理を用いる。

(2) 主観的確率分布の修正は観測のためにとりだされた売手あるいは売手の部分集合を包含する集合あるいは部分集合，およびとりだされた部分集合についておこなわれる。他の部分集合への影響は無視できるとするのでそれらについては修正をおこなわない。

(3) 観測のためにとりだされたばかりの部分集合についての Θ の主観的確率分布はそれを包含するすぐ上の集合あるいは部分集合についての Θ の主観的確率分布と同一であるとする。

ここで残しておいた1つの問題点について考える。図1において部分集合 A に実験2をおこなって売手 a の価格を y_1 と知ったときの集合 U についての Θ の主観的確率分布 g_U (θ) の修正の仕方である。それは f_2 $(y_1|\theta)$ を用いてベイズの定理により修正するとした。しかし y_1 は部分集合 A からラン

ダムにとられた売手 a の価格であり，集合 U からランダムにとられたのではない。部分集合 A についての価格の確率分布は集合 U についての価格の確率分布 $f_2(y|\theta)$ と同じと仮定したが，上記の理由からして $g_A(\theta)$ を修正できるのと同じ考え方が $g_U(\theta)$ の修正にも成立つわけではないであろう。しかしマンハイムは同じ考え方で修正していることになる。売手 a は部分集合 A からランダムにとられたにもかかわらず，集合 U からもランダムにとられたとみなしていることになる。

図1において集合 U の部分集合 A に対する観測値が得られたあとで部分集合 A に実験2が適用され売手 a の価格が y_1 であったとき，具体的手法は問わないとして，次の3つの修正の仕方を考えることができる。

(1) A についての Θ の確率分布だけを修正し，U についての Θ の確率分布は修正しない。

(2) A についての Θ の確率分布と U についての Θ の確率分布を修正し，他は修正しない。

(3) A, U のほかに，a を包含していない B についても Θ の確率分布を修正する。

以上の3つのうち (1) の方法は部分で得られた情報はその部分内だけにおよび他にはおよばないとするものである。大きな誤差のある情報が全部に伝わった場合の損失をできるだけ避けようとする判断が背後にあると考えてよいであろう。そのために利益をみすごす場合があってもよいとする判断である。(3) は (1) とは逆で大きな誤差をもった情報が全部に入ることによる損失を重要視しないでできるだけ情報を伝わらせ利益はのがすまいとするゆき方である。(2) は (1) と (3) の中間である。マンハイムのモデルは (2) の1つの例である。しかしそこでは上述の疑問が生じる。A を包含する U のうち A 以外の部分にも，全体として考えているのではあるが，A に行くのと同じように情報が伝わっていくということである。このことは同じ $f_2(y|\theta)$ を用いて $g_A(\theta)$ も $g_U(\theta)$ も修正していることから生じる。もう少し細かく修正の仕方を考えることができるのではないだろうか。U のうち A の部分と A 以外の部分とを区

別して考えてみることにする。具体的な手法は次節で示される，

4. 1つの拡張された手法

ある集合について設定された確率分布の密度関数が $h(x)$，他の1つの集合について設定された確率分布の密度関数が $k(y)$ であるとする。x と y は同じ意味をもつとする。この2つの集合を合併したときの密度関数は，2つの集合の比率を α, β としたときに

$$\alpha h(x)+\beta k(y)$$

となる（小針〔2〕，118ページ）。このことを確率変数 Θ の主観的確率分布に対して適用する。部分集合 A についての Θ の密度関数が $g_A(\theta)$ であり，いま A に実験2を適用して売手 a の価格が y_1 であったとすると，A についての Θ の分布は $f_2(y_1|\theta)$ を用いてベイズの定理により $g_A(\theta|y_1)$ と修正される。次に U については，U のうち A に相当する部分については $g_U(\theta)$ から $g_U(\theta|y_1)$ に修正すると考え，U のうち A 以外に相当する部分については $g_U(\theta)$ のままであるとする。U は A と A 以外との合併集合であるから，A の U に関する比率 α と $U-A$の比率 $\beta=1-\alpha$ を求め，U についての Θ の分布は新しく

$$\alpha g_U(\theta|y_1)+\beta g_U(\theta)$$

とする。ここで機械的に $\alpha=1, \beta=0$ とするとマンハイムの手法と同じ結果をもたらす。したがって本節の手法はマンハイムモデルにおける該当個所の手法の1つの拡張であると言える。

ここで α と β の与え方について考えてみる。U が無限集合の場合 A の濃度も $U-A$ の濃度も U の濃度と同じである。したがって $\alpha \doteqdot 1$ とするマンハイムの手法は無限集合を前提としているとも言える。しかし部分集合 A に実験2を適用して y_1 を観測したとき A についての Θ の主観的確率分布も，A を包含する U についての Θ の主観的確率分布も同じ修正のされ方をするのは直観的なイメージから離れるものである。本節の手法によると相対的に U についての Θ の主観的確率分布が弱く修正されることになる。このためマン

ハイムの手法によると，サーチをはじめた段階でもし実験1を集合 U に適用して部分集合 A をとりだし，そのあとただちに部分集合 A に実験2を適用した場合，U についても A についても Θ の事後分布は同じものとなるが，本節の手法ではそのようなことは生じない。

多レベルの場合の計算例を示しておく。部分集合 A は部分集合 P に包含され，部分集合 P は集合 U に包含されているとする。各々はレベル2, レベル1，レベル0の位置にあるとする。いま実験3が部分集合 A に適用されて1人の売手がとりだされ，価格が y であったとする。売手はレベル3に位置し，それが最下段のレベルとする。U, P, A についての Θ の主観的確率分布を各々 $g_U(\theta)$, $g_P(\theta)$, $g_A(\theta)$ としたとき，観測値を得たことにより，各々はマンハイムの手法によると次のように修正される。

$$g_U(\theta|y)=\frac{f_3(y|\theta)g_U(\theta)}{\int f_3(y|\theta)g_U(\theta)d\theta}$$

$$g_P(\theta|y)=\frac{f_3(y|\theta)g_P(\theta)}{\int f_3(y|\theta)g_P(\theta)d\theta}$$

$$g_A(\theta|y)=\frac{f_3(y|\theta)g_A(\theta)}{\int f_3(y|\theta)g_A(\theta)d\theta}$$

本節の手法では上の結果を用いて次のようになる。U については，

$$\alpha g_U(\theta|y)+\beta g_U(\theta)$$

P については，

$$\alpha' g_P(\theta|y)+\beta' g_P(\theta)$$

となり，A についてはマンハイムの手法と同じである。

5. ま　と　め

本稿では直接的な情報のほかに間接的な情報も得ることができるとき，マンハイム〔4〕にしたがい，サーチに階層性が生じること（第2節），ベイズの定理を一部分は変則的に用いた主観的確率分布の修正（第3節）について解説した。そして階層性をとりあつかうことの困難さにともなう2つの点を問題点とした。そこでの1つの問題点を解決すべく，観測された部分と観測されなかっ

た部分（比重が各々 α と β）を区別することにもとづく1つの手法を示した（第4節)。それは $\alpha=1$, $\beta=0$ の場合がマンハイムの手法となっているような拡張された手法である。しかし比重 α, β をどのように決めるかという問題が新しく発生したことになる。ただ逆にモデルの側での自由度の増大と言える場合もあるであろう。マンハイムの手法の枠内でさらにもっともと考えられる手法を示したのであるからヒューリスティックな手法であるという性質はそのまま残る。また拙論〔1〕で問題とした，実験順序がちがうと Θ の分布もちがってくるというマンハイムモデルのさらにもう1つの問題点は本稿の手法では解決されない。

本稿では主観的確率分布の修正のみを問題としたため大まかな情報を得るということがどういう場合に必要となりうるかについては検討しなかった。今後の課題としたい。

参 考 文 献

[1] 遠藤薫「地域データを用いた決定過程における経験的ベイズモデル」『エコノミックフロンティア』第13号，1981年，pp. 25–32.

[2] 小針晛宏『確率・統計入門』岩波書店，1973年.

[3] Lippman, S. A. and J. J. McC all, "The Economics of Job Search: A Survey (Part I)," *Economic Inquiry*, Vol. 14, No. 2, 1976, pp. 155–189.

[4] Manheim, M. L., *Hierarchical Structure: A Model of Design and Planning Processes*, The M. I. T. Press, 1966.