不確実性下の消費者選択の理論

——2期間分析の展望と解説——

加　藤　睦　洋

1. 序　　論

1970年代に入ってからの経済学の進展を回顧してみると，マクロ理論における合理的期待理論の登場とマネタリズムの影響力の増大，ミクロ理論における微分位相幾何学・測度論等の援用による一般均衡理論の拡張・精緻化と産業組織論その他の応用ミクロ分析の発展等を始めとして，労働経済学における計量分析の隆盛，公共財理論へのゲーム理論的アプローチ，最適課税の理論及び不平等尺度の理論の再興，そして本稿の主題である不確実性の経済学の発展等，その急展開には目を見はるものがある。恐らくこの時期は，経済学史における一つの重要な画期として記憶されることになるであろう。

本稿は，これらの諸潮流のうち最後に挙げた不確実性の経済分析のなかの危険を含む消費者選択の理論に焦点を当てて，今までに得られた主要な成果を解説的に整理・展望する[1]。ここで取り挙げる危険ないし不確実性[2]は，時間的な (temporal) それ，即ち将来に対する予見不可能性に起因するものとする。従ってこのような確率的環境における最適化は，一般的には有限又は無限視野の多期間モデルによって定式化し，分析することが可能であるが，ほとんどの場合問題の本質の解明は2期間モデルで十分可能であると言って過言ではな

原稿受領日　1984年5月9日

1) 不確実性経済学全般にわたる展望的解説としては，Hey (1979), Lippman-McCall (1981), 酒井 (1982) 等がよくまとまっている。

2) 危険 (risk) と不確実性 (uncertainty) を区別する場合もあるが，確率的環境における最適化を数学的に分析する経済理論では通常この両者を同じ意味で使うことが多い。本論文も又同様である。

い[3]。しかも2期間モデルは理解が容易なばかりでなく，効用関数の異時点間の加法分離性を仮定しなくてもよい場合があり，この点むしろヨリ一般的である[4]。そこでここでは専ら2期間分析だけを取り挙げることにする。

われわれの主題に言及した展望論文が二つある。一つは Sandmo (1974) であり，もう一つは Lippman-McCall (1981) である。前者は2期間モデルの枠組みで将来所得と利子率（資本収益率）の不確実性の最適消費／貯蓄決定への効果を調べ，更にポートフォリオ選択にも触れている。後者の論点は多岐にわたっているが，そのうち個人の消費／貯蓄決定を扱っている第4節では，まず2期間モデルを用いて所得及び利子率の不確実性の効果が要約されている。(所得不確実性は Leland (1968) モデルの紹介である。) 次に議論は多期間モデルの説明に移り，無限視野モデルにおける所得不確実性下の最適消費政策の存在と不確実性増大の効果を扱った Miller (1976) モデルが紹介され，最後に寿命が不確実でかつ生命保険一年金を利用しない場合の最適政策を扱った Levhari-Mirman (1977) モデルが紹介されている。

Lippman-McCall 論文では恐らく紙幅の関係からであろうと思われるが，いくつかの重要な問題に全く言及していないのは残念である。そこで本稿では，消費者の直面する四種類の不確実性，所得，資本（収益率），寿命，価格の不確実性が，最適な消費／貯蓄決定及び（期待効用の意味での）厚生にどのような効果をもたらすかを，現在までの研究で明らかになっている基本的な結果を整理要約して，できるだけ理解し易い形で紹介したい。前掲二論文と重複せざるをえない部分についても，なるべく補完的な説明になるよう心掛ける。

2. 所得不確実性

まず最初に，将来所得（但しここでは賃金の如き非資本所得を考える）の危険に直面する消費者の最適消費／貯蓄決定について考える。所得の不確実性を

3) 寿命不確実性下の最適消費／貯蓄決定の分析においては，最低3期間必要な問題もある。

4) 多期間モデルでは加法的効用関数が通常仮定される。従ってこの場合異時点間の消費の補完ないしは競争関係ははじめから排除されてしまう。

扱った主要な論文として，2期間モデルに関しては，Leland (1968), Sandmo (1970), Drèze-Modigliani (1972)，多期間モデルに関しては，Miller (1974, 1976), Sibley (1975), Yaari (1976), Schechtman (1976), Grossman-Levhari-Mirman (1979), Levhari-Mirman-Zilcha (1980), Hey (1980), 等が挙げられよう。以下でこれら諸論文の要諦を紹介する。

モデルを定式化する。次の最適化問題について考える。

$$\underset{c_1,\ c_2}{\mathrm{Max}}\quad E[U(c_1,\ c_2)] \tag{2.1}$$

$$s.t.\quad s=y_1-c_1, \tag{2.2}$$

$$c_2=s+y_2. \tag{2.3}$$

記号の意味は，$c_t=t$ 期の消費，$y_t=t$ 期の所得，$s=$ 貯蓄である。$t=1$ は現在時点を表わし，$t=2$ は将来時点を表わす。簡単化のため貯蓄は利子（収益）を生まないと仮定し，遺産を残さないものとする。$U(\ \ )$ は基数的効用関数で

$$U_1,\ U_2>0;\ U_{11},\ U_{22}<0;\ U_{12}\geqq 0$$

なる性質を持つものとする。ここに $U_i=\partial U/\partial c_i, U_{ii}=\partial^2 U/\partial c_i^2, U_{12}=\partial^2 U/\partial c_1\partial c_2$ である。$U_i>0$ は不飽和，$U_{ii}<0$ は危険回避を表わす。もし $U_{12}<0$ ならば現在消費もしくは将来消費のどちらかが劣等（下級）財になる可能性があるばかりでなく[5]，無差別曲線が原点に対して凹になり，コーナー解が発生するかもしれないので，$U_{12}\geqq 0$ の仮定が必要である。y_1 は非確率的なのに対して，y_2 は確率変数であり，$0\leqq y_2<\infty$ の範囲で適当な分布関数と期待値を持つものとし，第2期にその実現値を知りうるものとする。依って c_2 は確率的となるから $U(\ \ )$ も又確率的となる。そこで消費者は期待効用 $E[U(\ \ )]$ を最大化するような消費計画 $<c_1, c_2>$ を選択するというのがこの問題である。y_2 は最悪の場合0であるから，これを当てにして第1期に借金をすることはできない[6]。依って

5）基数的効用関数の交差2階導関数の経済的意味については，Stigler (1950) の第6章，Chipman (1977) 参照。

6）言うまでもないが，正の最小所得 $y_{\min}>0$ が存在し y_2 が $y_{\min}\leqq y_2<\infty$ の範囲に分布しているならば，第1期に $y_{\min}$ までは借り入れることが可能である。

$$0 \leqq s \leqq y_1,\ 0 \leqq c_1 \leqq y_1,\ 0 \leqq c_2 \leqq y_1 + y_2$$

である。

c_2 の最適値（これを c_2^* と書く。以下＊印は最適解を表す。）は

$$c_2^* = s + y_2 \tag{2.4}$$

と書けることは明らか。

かくて問題は結局

$$\begin{aligned}\underset{c_1}{\mathrm{Max}}\ E[U(c_1,\ c_2^*)] &= E[U(c_1,\ s+y_2)] \\ &= E[U(c_1,\ y_1 - c_1 + y_2)]\end{aligned} \tag{2.5}$$

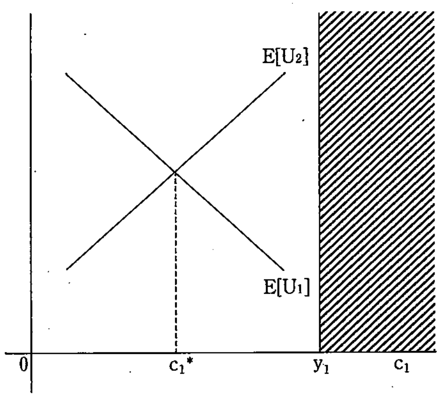
となる。$U(c_1, c_2^*)$ は可変的間接効用関数 (Variable Indirect Utility Function) と呼ばれる。内部解の存在を仮定すると一階条件は

$$E[U_1] = E[U_2] \tag{2.6}$$

によって与えられる。この式を満たす c_1 が最適解 c_1^* である。

(2.6) による c_1^* の決定を図解する。両辺を c_1 で微分して

$$\frac{dE[U_1]}{dc_1} = E[U_{11} - U_{12}] < 0,\ \frac{dE[U_2]}{dc_1} = E[U_{12} - U_{22}] > 0$$



第1図

を得るから，左辺は c_1 に関して右下り，右辺は右上りのグラフが描ける。（第1図参照）両曲線の交点の横座標が c_1^* である。

次に問題となることは，y_2 の平均保存的拡散 (Mean Preserving Spread) による不確実性の増大[7]の最適消費決定に対する効果である。これを第1図を利用して調べる。確率変数の強く凸（凹）な関数の期待値は，平均保存的拡散による不確実性の増大によって大きく（小さく）なるという周知の定理を援用する。そのためには，所与の c_1 に対して U_1 及び U_2 が y_2 の凸な関数かあるいは凹な関数かを調べればよい。U_1 及び U_2 を y_2 で2回微分して，U_{122} 及び U_{222} を得る。危険回避の仮定 ($U_{11}, U_{22}<0$) だけではこれらの符号は分らないから，追加的仮定が必要になる。

これに対して Leland が提出した仮定は，彼が「集中に対する危険回避逓減の原理」(Principle of Decreasing Risk Aversion to Concentration) と呼ぶもので，これは二つの非確率的消費計画 $<c_1{}^0, c_2{}^0>$，$<c_1{}^1, c_2{}^1>$(但し $c_2{}^1>c_2{}^0$ とおく）が無差別，即ち

$$U(c_1{}^0,\ c_2{}^0)=U(c_1{}^1,\ c_2{}^1)$$

であるとき，c_2 が確率変数になると（今確率的 c_2 を $\tilde{c}_2$ で表わす），$<c_1{}^1, \tilde{c}_2{}^1>$ が $<c_1{}^0, \tilde{c}_2{}^0>$ より選好される，即ち

$$E[U(c_1{}^1,\ \tilde{c}_2{}^1)]>E[U(c_1{}^0,\ \tilde{c}_2{}^0)] \tag{2.7}$$

となることを意味している。（但し $E[\tilde{c}_2{}^0]=c_2{}^0$，$E[\tilde{c}_2{}^1]=c_2{}^1$ とし，$\tilde{c}_2{}^0, \tilde{c}_2{}^1$ は共通の分散 σ^2 を持つものとする。）$O(\sigma^2)$ の項を無視して期待効用を Taylor 展開すると

$$E[U(c_1{}^0,\ \tilde{c}_2{}^0)]=U(c_1{}^0,\ c_2{}^0)+\frac{1}{2}U_{22}^0\sigma^2 \tag{2.8}$$

$$E[U(c_1{}^1,\ \tilde{c}_2{}^1)]=U(c_1{}^1,\ c_2{}^1)+\frac{1}{2}U_{22}^1\sigma^2 \tag{2.9}$$

となるから，(2.7) は

7) Rothschild-Stiglitz (1970) 参照。

$$U_{22}^{1} > U_{22}^{0} \tag{2.10}$$

を意味する。この関係を一般化して

$$\left.\frac{dU_{22}}{dc_2}\right|_{U=\mathrm{const.}} > 0 \tag{2.11}$$

を得る。これは，同一無差別曲線上で c_2 が大きくなるにつれて，効用関数の将来消費に関する凹性（危険回避）が弱まること，あるいは効用関数のグラフが直線に近づくことを意味している。(2.11) は

$$U_{222} - \frac{U_2}{U_1} U_{122} > 0 \tag{2.12}$$

と書ける。これは

$$U_{122} < 0, \ U_{222} > 0$$

のとき成立する。

かくして U_1 及び U_2 は所与の c_1 に対して y_2 の強凹及び強凸関数となり，$E[y_2]$ を不変に保つ y_2 の分布の危険の増大に対して $E[U_1]$ は小さくなり，$E[U_2]$ は大きくなる。依って c_1^* はその結果小さくなり，最適貯蓄 $s^* = y_1 - c_1^*$ は大きくなる。（第1図で考えよ。）

これに対して Sandmo は次のように考えた。まず（絶対的）危険回避関数

$$R_A(c_1, c_2) = -U_{22}/U_2 \tag{2.13}$$

を定義する。ここで彼は

$$\partial R_A(\quad)/\partial c_1 > 0, \ \partial R_A(\quad)/\partial c_2 < 0$$

と仮定すべきことを主張する。酒井 (1982, p. 182) は，この条件を次のように注釈している。R_A が将来消費 c_2 に関して減少的なのは，Arrow-Pratt の一変数の場合の絶対的危険回避減少仮説から自然である。R_A が現在消費 c_1 に関して増加的であるのは，c_1 が増加すれば貯蓄が減少し，第2期の消費に充当すべき資金が減少するので，個人の危険回避の気持が大きくなるからである。この

仮定から Leland と同じ条件が出てくることは明らかである。

所得不確実性の増大が初期消費を減少させることは，Sandmo によれば次のように理解できる。(2.1), (2.2), (2.3) を見てみると，y_2の分布の危険の増大は c_2 の分布の分散を大きくし ($U(\ )$ の強凹性によって) 期待効用を低下させる。このとき s を増大させれば y_2 の分散に影響を与えずに，$E[c_2]$ を大きくし，従って期待効用を増大させることができる。しかし他方 s の増大は c_1 の減少従って効用の減少をもたらすから，何かある条件の下でしか s の増大は，増大した将来所得の危険に対する対策として有効ではないことが分る。その条件が Leland の集中に対する危険回避逓減の原理，又は Sandmo の危険回避関数が現在消費について増加的，将来消費について減少的という仮定なのである。

次に効用関数が加法分離的な場合を考える。この場合 $U_{12}=0$ となるから，議論は簡単化される。$U(\ )$ を

$$U(c_1,\ c_2)=u(c_1)+\delta u(c_2) \tag{2.14}$$

とおく。$u'>0, u''<0$ とおく。δ は割引因子で $0<\delta\leqq 1$ である。制約条件は今まで通りとする。$c_2^*=s+y_2$ であることも今まで通りである。第1期の最適化は，

$$\operatorname*{Max}_{c_1}\quad u(c_1)+\delta E[u(c_2^*)] \tag{2.15}$$

となる。一階条件は

$$u'(c_1)=\delta E[u'(c_2^*)] \tag{2.16}$$

となる。c_1^* の決定は第1図と同じように図解できる。$u'(c_2^*)$ を y_2 で2回微分すると $u'''(c_2^*)$ を得るから，前と同じ論法で，$u'''>0(<0)$ ならば c_1^* は小さく（大きく）なることが分る。

今までは explicit な最適解が求まらなかったが，効用関数が加法分離的でかつ一期間効用関数が絶対的危険回避度不変のタイプのものであれば explicit な解が求まることが，Levhari-Mirman-Zilcha 及び Hey によって指摘された。

実際に計算をしてみる。

$$u(c_t)=-\frac{1}{A}\exp[-Ac_t] \tag{2.17}$$

とおく。ここに絶対的危険回避度 $A=-u''(c_t)/u'(c_t)=$一定である。結果は

$$c_1^*=\frac{1}{2A}\left[Ay_1-\log\ E[\exp(-Ay_2)]-\log\ \delta\right] \tag{2.18}$$

$$c_2^*=\frac{1}{2A}\left[Ay_1+Ay_2+\log\ \delta\right] \tag{2.19}$$

$$u(c_1^*)+\delta E[u(c_2^*)]=-\frac{1}{A}\exp\left(-\frac{1}{2}\ Ay_1\right)$$

$$\times\delta^{1/2}\left[(E[\exp(-Ay_2)])^{1/2}+E\left[\exp\left(-\frac{1}{2}Ay_2\right)\right]\right] \tag{2.20}$$

である。不確実性の増大は，c_1^* と期待効用を低下させることはすぐ分る。なお (2.17) の第3次導関数 u''' は常に正である。

3. 資本不確実性

次の問題は資本不確実性の消費者選択への効果である。ここに資本不確実性とは，消費者の保有する富(金融資産)の収益率の危険のことである。この問題を扱った主な文献として，2期間モデルでは，Sandmo (1969, 1970), Rothschild-Stiglitz (1971), Drèze-Modigliani (1972), 多期間モデルでは，Phelps (1962), Samuelson (1969), Merton (1969, 1971), Levhari-Srinivasan (1969), Hakansson (1970), Hahn (1970), Hamada (1972), Mirrlees (1974) 等が代表的である。

モデルを次のように定式化する。

$$\underset{c_1,\ c_2}{\mathrm{Max}}\ E[U(c_1,\ c_2)] \tag{3.1}$$

$$\text{s. t. } W_2=(W_1-c_1)r, \tag{3.2}$$

$$c_2=W_2. \tag{3.3}$$

ここに W_t は t 期の富で単一の金融資産とする。$r-1$ はこの富の収益率で，第 2 期にはその実現値を知りうる確率変数とし，$0 \leqq r < \infty$ の範囲に分布し，資本は生産的即ち $1 < E[r] < \infty$ とする。明快な結果を得るために賃金等の所得は受け取らないものと仮定する。最悪の場合 $r=0$（利子率がマイナス100%）であるから，この場合も第 2 期の利子所得を当てにして借り入れをすることはできない。故に

$$0 \leqq c_1 \leqq W_1, \quad 0 \leqq c_2 \leqq W_1 r$$

である。$U(\ )$ の性質は前節と同じである。

第 2 期の最適消費は

$$c_2^* = W_2 \tag{3.4}$$

によって与えられる。第 1 期の最適消費は一階条件

$$E[U_1] = E[U_2 r] \tag{3.5}$$

を満たす。c_1^* の決定は第 1 図と同じように図解できる。両辺を c_1 で微分して

$$E[U_{11} - U_{12} r] < 0, \quad E[r(U_{12} - U_{22} r)] > 0$$

を得るから，左辺は c_1 に関して右下り，右辺は右上りのグラフが描ける。（図略）

不確実性増大の効果を見るために，所与の c_1 に対して，U_1 及び $U_2 r$ を r で 2 回微分すると

$$(W_1 - c_1)^2 U_{122} < 0, \ (W_1 - c_1)[2U_{22} + r(W_1 - c_1) U_{222}] \cdots\cdots \text{不確定}$$

となるから，U_1 は r の強凹関数，$U_2 r$ は r の凸関数か凹関数か不明である。依って $E[r]$ を不変に保つ r の分布の危険の増大は，所与の c_1 に対して，$E[U_1]$ を減少させるが，$E[U_2 r]$ の変化の方向については分らない。従って危険の増大が c_1^* を大きくさせるか小さくさせるかは分らない。

Sandmo はこれを次のように説明する。(3.1), (3.2), (3.3) を見ると，r の分布の危険の増大は c_2 の分散を大きくするから期待効用を低下させる。この期待効用の低下を少しでも食い止めるために貯蓄 W_1-c_1 を大きくすると，c_2 の平均と分散の双方が大きくなってしまい，貯蓄の増加従って c_1 の減少が，ヨリ危険な r の分布に対する対策として有効か否かは一概に言えない。

次に効用関数が加法分離的な場合を考える。前節と同じく $U(c_1, c_2)=u(c_1)+\delta u(c_2)$ とおく。一階条件は

$$u'(c_1)=\delta E[u'(c_2^*)r] \tag{3.6}$$

となる。$u'(c_2^*)r$ を r で2回微分すると

$$(W_1-c_1)[u'''(c_2^*)(W_1-c_1)r+2u''(c_2^*)]$$

となり，この符号は $u'''>0$ のとき不確定，$u'''<0$ のとき負，即ち $u'(c_2^*)r$ は r の強凹関数となる。従って $u'''<0$ ならば，$E[u'(c_2^*)r]$ は危険の増大の結果小さくなり，c_1^* は大きくなる。

一期間効用関数が相対的危険回避度一定のタイプのものであれば，最適解を explicit な形で求めることができる。

$$u(c_t)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-a}c_t^{1-a}, & a\neq 1,\ a>0\\ \log c_t, & a=1\end{cases} \tag{3.7}$$

とおく。ここに相対的危険回避度 $a=-c_t u''(c_t)/u'(c_t)=$ 一定である。なお a は限界効用の弾力性に等しい。(3.7) に対して

$$c_1^*=\begin{cases}\dfrac{z}{1+z}W_1, & a\neq 1,\ a>0\\ \dfrac{1}{1+\delta}W_1, & a=1\end{cases} \tag{3.8}$$

$$c_2^*=\begin{cases}\dfrac{1}{1+(\delta r^{1-a})^{-1/a}}rW_1, & a\neq 1,\ a>0\\ \dfrac{\delta}{1+\delta}rW_1, & a=1\end{cases} \tag{3.9}$$

$$u(c_1^*)+\delta E[u(c_2^*)]=\begin{cases}\left(\dfrac{z}{1+z}\right)^{-a}\dfrac{1}{1-a}W_1^{1-a},\ a\neq 1,\ a>0\\(1+\delta)\log W_1+\delta\log\delta-(1+\delta)\log(1+\delta)\\\qquad+\delta E[\log r],\ a=1\end{cases}\qquad(3.10)$$

を得る。ここに

$$z=(\delta E[r^{1-a}])^{-1/a}$$

である。

$a>1\,(<1)$のとき，危険の増大に対してzは小さく（大きく）なるから，c_1^*は小さく（大きく）なる。$a=1$のときc_1^*は不変である。期待効用は，危険が増大したとき，すべての$a>0$に対して低下する。なお(3.7)に対して$u'''>0$である。

4. 寿命不確実性

第3番目に問題としたいのは，消費者自身の寿命あるいは死亡時期の不確実性がもたらす効果である。これについては Yaari (1965) が有名な先駆的論文で，連続時間モデルを用いて，生命保険が利用可能な場合と不可能な（ないしは可能であっても利用しない）場合に分けて精密な分析をした。しかしながら連続時間モデルは必ずしも理解し易くはない。そのため連続時間モデルそれ自体の発展も勿論あるとはいえ，学会の研究方向としては理解の容易な離散時間モデルの分析に進んだ。以下においてはこの動向に沿った解説をする。

その前に，寿命不確実性の持つ意味について少し説明する。一般に個人が彼（彼女[8]）の死亡時期を確実に知りえたならば，遺族に遺産を残すという動機さえ働かない限り（以下これを仮定する），死亡時点における貯蓄残高が丁度ゼロになるように生涯消費／貯蓄計画を立案するであろう。そしてこのような場合人は，生命保険にも（保険型）年金[9]にも加入する必要性を感じないであろ

8) 以下「彼女」は省略する。別段他意はない。

9) 死亡時期が不確実なとき，平均寿命がほぼ等しいと思われる人々が共同して寿命の

う。もし個人が早死することを確実に知りえたならば，彼は大急ぎで消費の享受に努めるであろう。逆に長生きすることを確実に知りえたならば，彼は老後に備えて節約に努めるであろう。

さて今や死亡時期を確実には知りえない状況に置かれたとする。たとえ寿命が不確実になろうとも消費／貯蓄計画は立案せねばならない。しかし自分が何時死ぬか，換言すればこの先何時まで生存するかは分らない。このとき人は一体どのような生涯貯蓄計画を立てるべきであろうか？　これに対する答は生命保険一(保険型)年金を利用するかしないかによって異なってくる。

もし人が生命保険一年金を利用しないとすれば，彼は医学的・生理学的に可能な最大の長生きを仮にしたとしても困らないような貯蓄計画を立てなければならないことは直ちに分る。しかし最大可能な長生きを実際にすることになる人々はほとんどいないであろうから，この場合大部分の人々は結果的に無駄な過剰貯蓄をすることになる。これが寿命の不確実性に直面しながら生命保険一年金を利用しないことの不利益である。しかもこの場合消費者は負債を残して死んではならないという制約条件を課すと，借り入れができないことは明白である。(というのは何時死ぬか分らないから。)

上記のような無駄な貯蓄を避けるためには平均寿命の同じ人々が共同して寿命の危険をプール化すればよい。これが生命保険一年金である。これは，加入者が保険料を払い込み，早死した人には生命保険金を，長生きした人には年金を支払うことによってプールされた所得を加入者に再分配することを目指す。従って各個人はあたかも自分が平均寿命を生きるかの如く想定して貯蓄計画を立てられるという利点を持つ。それ故この場合各個人は，結果的に資産を残して死ぬかもしれず，逆に負債を残して死ぬかもしれない。(即ち借り入れが認

危険をプール化し，長生きした人々が早死した人々を援助するのが生命保険，逆に早死した人々が長生きした人々を援助するのが保険型の年金である。年金にはこのほかに集団の死亡確率分布に基礎を置かない種類のもの，即ち積立て金を年金の形で払い戻す方式のものがある。日本では「郵便年金」(終身年金)が前者の例に当り，「財産形成年金貯蓄」(確定年金)が後者の例に当る。両者の年金ともに払い込み掛金額は確定しているが，受取年金額は前者では寿命次第，後者は寿命に無関係に決まっている。

められる。）この残された資産又は負債を加入者同士で相互に清算し合うわけである。但しこの場合このシステム自体が財政的に破綻しないように，即ち加入者全員の生涯総所得額と生涯総消費額が等しくなるように，保険料ならびに保険金・年金の額が適正に決定されているものと仮定する。換言すれば保険一年金証券は保険統計数理的に適正な (actuarially fair) 価格を持つと仮定する。更に当初予想されていた死亡確率が計画立案後に変化する道徳的危険 (Moral Hazard) のような現象[10]は起こらないものとする。

さて前置きはこれくらいにしてモデル分析にかかる。

4.1 生命保険一年金を利用する場合

離散時間モデルでこの場合を検討した論文には，2期間分析としては Katz (1979), Pelzman-Rousslang (1982), 多期間分析としては Barro-Friedman (1977) がある。

以下2期間の場合を分析する。まず簡単化のために，生命保険一年金に加入する個人は，誰も彼も皆同一の効用関数，同一の死亡確率，同一の所得流列を持つ，即ち加入者は皆完全に同質的と仮定する。効用関数は加法分離的と仮定する。第1期の死亡確率はゼロ即ち生存確率1[11]，第2期の生存確率は p $(0<p<1)$ 即ち死亡確率は $1-p$ とおく。このとき平均寿命は $L=1+p$ で表わせる。一期間効用関数を，c_t を t 期 $(t=1,2)$ の消費として $u(c_t)$ と書く。$u(\ )$ は通常の性質 $u'>0$, $u''<0$ を持つほかに，$u(0)$ は有限の大きさを持つ $(u(0)>-\infty)$ ものと仮定する。議論を単純化するため，将来効用の割引率と利子率はゼロとする。すると消費者の最適化問題は次のようになる。

$$\max_{c_1,\, c_2} \quad EU=u(c_1)+pu(c_2)+(1-p)u(0) \tag{4.1}$$

$$\text{s. t.} \quad c_1+pc_2=y_1+py_2 \tag{4.2}$$

---

10) 保険に入ったというので安心して暴飲暴食にふけるとか，保険金の受け取り・詐取を目的にした自殺や殺人の如き現象。

11) これを仮定しなければ，死人が計画を立てることもあるという奇怪なことになる。

ここに y_t は t 期の所得である。上式の意味は，EU は生涯期待効用を表し，(4.2) は生涯期待消費と生涯期待所得が等しいという予算制約式を表す[12]。期待効用関数 (4.1) は生命保険一年金を利用しようがしまいが同じであるが，予算制約式 (4.2) は明白に異なる。先にも述べたように，(4.2) は保険加入者全体で収支勘定が合っていればよい，換言すれば各個人はあたかも平均寿命を生存する保険加入者の代表的個人の如く行動することを意味する。なお (4.2) は期待遺産がゼロであると見ることもできる。

ところでもしこの個人が1期間しか生存しなかったとしたら（これは $1-p$ の確率で起る)，生涯消費は c_1, 生涯所得は y_1 であり，もし2期間生存することができたなら（これは確率 p で起る)，生涯消費は c_1+c_2, 生涯所得は y_1+y_2 となる。このときもし $c_1>$ $(<)$ y_1 であれば1期間しか生存しない人々は負債（資産）を残して死ぬことになる。すると保険システムが統計数理的に適正であるという想定から，$c_1+c_2<$ $(>)$ y_1+y_2 となり，2期間生存する人々は資産（負債）を残して死ぬことになる。即ちこの場合第2期（第1期）から第1期（第2期）への所得の移転が起ることになる，換言すれば2期間生存した人々が1期間しか生存しなかった人々に生命保険金を支払う（1期間しか生存しなかった人々が2期間生存した人々に年金を支払う）ことになる[13]。

さてわれわれの問題の一階条件は

$$u'(c_1)=u'(c_2) \tag{4.3}$$

によって与えられる[14]。最適消費は

---

12) (4.2) は

$$c_1+pc_2+(1-p)\times 0=y_1+py_2+(1-p)\times 0$$

の意味である。同じことであるが次のように考えてもよい。両期を生存し c_1+c_2 の消費を享受する確率は p, 第1期しか生存せず消費が c_1 である確率は $1-p$ であるから，生涯期待消費は

$$p(c_1+c_2)+(1-p)c_1$$

で表わされる。これは (4.2) の左辺に等しい。所得についても同様である。

13) 一般に動学的経済理論において (4.2) のように制約式を書くことは，異時点間の所得移転が可能である、即ち正の貯蓄ばかりでなく負の貯蓄（将来所得を前借りして消費すること）も可能であることを意味している点に注意しなければならない。

$$c_1^* = c_2^* = c^* \tag{4.4}$$

となることは明らか。(4.4) を (4.2) に代入して

$$c^* = \frac{y_1 + py_2}{1+p} = \frac{y_1 + (L-1)y_2}{L} \tag{4.5}$$

を得る。ここに $L=1+p$ は期待寿命。c^* を L で微分して,

$$\frac{\partial c^*}{\partial L} = \frac{y_2 - y_1}{L^2} \begin{cases} >0 \ldots y_2 > y_1 \text{ のとき} \\ =0 \ldots y_2 = y_1 \text{ のとき} \\ <0 \ldots y_2 < y_1 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.6}$$

を得る。即ち第2期目に第1期よりもヨリ高い（低い）所得を稼ぐ場合，平均寿命の増大は最適消費水準を大きく（小さく）させる。

さてこの消費者がもし1期間しか生存しなかったら，彼の生涯消費は c^* $(=c_1^*)$ であるのに対して生涯所得は y_1 である。両者を比較して

$$c^* \begin{cases} > y_1 \ldots y_1 < y_2 \text{ のとき} \\ = y_1 \ldots y_1 = y_2 \text{ のとき} \\ < y_1 \ldots y_1 > y_2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.7}$$

となることが分る。次にもし2期間生存した場合は，生涯消費は $2c^*(=c_1^* + c_2^*$ であるのに対して生涯所得は y_1+y_2 である。両者を比較して

$$2c^* \begin{cases} < y_1 + y_2 \ldots y_1 < y_2 \text{ のとき} \\ = y_1 + y_2 \ldots y_1 = y_2 \text{ のとき} \\ > y_1 + y_2 \ldots y_1 > y_2 \text{ のとき} \end{cases} \tag{4.8}$$

を得る。このことから，もし第1期の所得が第2期の所得よりも小さければ（大きければ），1期間しか生存しなかった人々は負債（資産）を残して死に，

14) (4.3) には p が入ってこないことに注意。しかしながらこれは寿命不確実性が生命保険一年金によって駆逐されることを意味するものではない。

2期間生存した人々は資産（負債）を残して死ぬ，即ち第2期（第1期）から第1期（第2期）への所得移転が起ることになる。これは言うまでもなく長生き（早死）した人々から早死（長生き）した人々に対して生命保険金（年金）の支払いがなされることを意味している。

最適政策が使われたときに達成される期待効用は

$$EU^* = u(c^*) + pu(c^*) + (1-p)u(0)$$
$$= Lu(c^*) + (2-L)u(0) \tag{4.9}$$

である。これを L で微分して

$$\frac{\partial EU^*}{\partial L} = u(c^*) - u(0) - u'(c^*)(c^* - y_2) \tag{4.10}$$

を得る。

$$c^* - y_2 = \frac{y_1 - y_2}{L} \tag{4.11}$$

であるから，$u(c^*) - u(0) > 0$ であることを考慮して，$y_1 \leqq y_2$ のときは (4.10) が正であることは明らか。$y_1 > y_2$ のときは $u(\ )$ の強凹性によってやはり (4.10) は正になる。故に (4.10) は常に正である。即ち，期待寿命が長くなると期待効用は必ず大きくなる。

4.2 生命保険一年金を利用しない場合

この場合を離散時間モデルで分析した論文には Levhari-Mirman (1977) の多期間分析がある。

とりあえず2期間の場合から説明する。問題は次の如くである。

$$\max_{c_1, c_2} \quad EU = u(c_1) + pu(c_2) + (1-p)u(0) \tag{4.12}$$

$$\text{s.t.} \quad W_2 = W_1 - c_1, \tag{4.13}$$

$$c_2 = W_2, \tag{4.14}$$

$$W_1 = \text{所与}\ (0 < W_1 < \infty), \tag{4.15}$$

$$0 \leqq c_1 \leqq W_1 \tag{4.16}$$

ここに W_t は t 期の富を表す。各期の経常的所得は Levhari-Mirman に従ってゼロと仮定する。(4.12) は期待効用関数である。ここでも第1期の生存確率は1，第2期の生存確率は p $(0<p<1)$ 従って死亡確率は $1-p$ である。(4.13) は富の異時的関係式を表わし，利子率はゼロと仮定されている。(4.14) は遺産がゼロであることを意味している。(4.15) は初期条件。(4.16) は $c_1, c_2 \geqq 0$ を意味する。

最適政策を求める。第2期の最適消費は

$$c_2^* = W_2 \tag{4.17}$$

である。第1期の問題は

$$\begin{aligned}\underset{c_1}{\mathrm{Max}} \quad & u(c_1)+pu(c_2^*)+(1-p)u(0)=u(c_1)+pu(W_2)+(1-p)u(0) \\ & =u(c_1)+pu(W_1-c_1)+(1-p)u(0) \end{aligned} \tag{4.18}$$

と書ける。一階条件は

$$u'(c_1)=pu'(c_2^*) \tag{4.19}$$

となる。生命保険一年金が利用可能な場合と違って最適条件の中に p が入ってくることに注意されたい。(4.19) から直ちに

$$c_1^* > c_2^* \tag{4.20}$$

となることが分る。即ちこのモデルでは p は割引因子と同じ役割を果たしている。換言すれば寿命不確実性が導入されるとあたかも割引率が大きくなったかの如き効果を持つ[15)]。

15) 異時点間に渡る消費者選択の理論において将来効用を割引することを正当化する根拠の一つがこれである。これは Böhm-Bawerk その他の人々以来の有力な議論であり，Yaari によって数学的に明確に根拠づけられた。但しこれは Barro-Friedman も注意しているように，個人が生命保険一年金を利用しない場合にのみ妥当する議論である。

p が大きくなると c_1^* と c_2^* の差は縮小する。これが平均寿命増大の最適消費への効果である。

Levhari-Mirman は相対的危険回避度一定と仮定する。即ち

$$u(c_t)=\frac{1}{1-a}c_t^{1-a},\ 0<a<1 \tag{4.21}$$

とおく。彼らは $a=1$ ($u(c)=\log c$) 及び $a>1$ の場合も考えているが，このとき $u(0)\to-\infty$ に発散するのでこれらの場合を排除するのが望ましい[16)]。(4.21) に対しては explicit な最適解が求まる。即ち

$$c_1^*=\frac{1}{1+p^{1/a}}W_1, \tag{4.22}$$

$$c_2^*=\frac{p^{1/a}}{1+p^{1/a}}W_1, \tag{4.23}$$

$$EU^*=(1+p^{1/a})^a\frac{1}{1-a}W_1^{1-a} \tag{4.24}$$

となる。平均寿命増大の効果は，

$$\frac{\partial c_1^*}{\partial p}<0,\ \frac{\partial c_2^*}{\partial p}>0,\ \frac{\partial EU^*}{\partial p}>0$$

となることは明らか。

さて寿命の不確実性が個人の最適政策とりわけ初期消費 c_1^*（又は初期貯蓄 $W_2^*=W_1-c_1^*$）にいかなる効果を及ぼすかは，従来から特別に関心を持たれてきた。これについては相反する二つの要因が働く。第一は不確実性があたかも割引率の増大と同じ効果を持つことで，これは c_1^* を大きくさせる効果を持つ。これは早死するかもしれないという可能性からくるものである。第二はこれとは逆に長生きするかもしれないという可能性が持つ貯蓄促進効果であって，これは c_1^* を小さくさせる。この互に逆方向に作用する二要因のうちいずれが勝るか，あるいはヨリ正確に言えば，どのような条件の下でどちらの要因が優勢となるかという問題を考える。

16) Levhari-Mirman モデルの期待効用関数では $u(0)$ を含む項が落ちている。

この問題を分り易く考えるためには，寿命の不確実性がない場合とある場合を比較すればよいように一見思われる。しかしながらこのような問題設定は実は具合が悪い。というのは，確実な寿命をどういう長さで考えるのかが明確ではないからである。今まで考察してきた 2 期間モデルでは，確実な寿命としては 1 期間（$p=0$ のときで最小生存期間）と 2 期間（$p=1$ のときで最大生存期間）の二つが考えられる。効用関数が (4.21) で与えられるならば，確実に 1 期間生存するときの最適消費は $c_1^*=W_1$，確実に 2 期間生存するときの最適消費は $c_1^*=\frac{1}{2}W_1$ となり，

$$c_1^*\Big|_{p=1}=\frac{1}{2}W_1<c_1^*\Big|_{0<p<1}=\frac{1}{1+p^{1/a}}W_1<c_1^*\Big|_{p=0}=W_1 \qquad (4.25)$$

という関係が成立する。即ち寿命が不確実になることによって，それが確実な場合に比して初期消費は大きくなるという言い方も逆に小さくなるという言い方もどちらも可能である。

そこでこのような混乱を避けるためには，$L=1+p$ の長さの期間を確実に生存する個人と，平均寿命が $L=1+p$ であるが寿命が不確実な個人を比較すればよいように思われるが，これは無意味である。(なぜなら $L=1+p$ は整数でないから。) しかもこの場合 $L=1+p$ を固定すると，p は唯一つの値しか取れないから，同一の平均寿命を持つ二つの異なった寿命分布を比較するということもできない。

この問題を解決するために，Levhari-Mirman は平均寿命保存的な危険の増大という概念を新たに考え出した。この概念を理解するためには最低 3 期間必要なので，個人の最大可能な生存期間を 3 期間とする。t 期末における死亡確率を g_t $(0<g_t<1)$ とおけば

$$g_1+g_2+g_3=1 \qquad (4.26)$$

が成立する。t 期首における生存確率を今まで通り p_t とおけば

$$p_1=g_1+g_2+g_3=1,$$

$$p_2=g_2+g_3=1-g_1,$$

$$p_3 = g_3 = 1-(g_1+g_2),$$
$$p_1 > p_2 > p_3$$

となる。平均寿命 L は $L = p_1 + p_2 + p_3 = 1 + p_2 + p_3$ によって与えられる。ここで二つの寿命分布 $\langle p_t \rangle$ と $\langle p_t' \rangle$ を考える。このときもし

$$\left.\begin{array}{l} p_2 > p_2' \\ p_2 + p_3 = p_2' + p_3' \end{array}\right. \tag{4.27}$$

ならば，$\langle p_t' \rangle$ は $\langle p_t \rangle$ よりもヨリ危険な寿命の分布であると定義する。ここで $p_1 = p_1' = 1$, かつ $L = 1 + p_2 + p_3 = L' = 1 + p_2' + p_3'$ が成立している。従って $p_3 < p_3'$ である。勿論 $p_1' > p_2' > p_3'$ である。故に

$$0 < p_3 < p_3' < p_2' < p_2 < 1, \tag{4.28}$$
$$p_2 - p_2' = p_3' - p_3 \tag{4.29}$$

が成立することになる。

さて3期間モデルは次のように定式化される。

$$\underset{c_1,\,c_2,\,c_3}{\mathrm{Max}} \quad EU = u(c_1) + p_2 u(c_2) + (1-p_2)u(0)$$
$$+ p_3 u(c_3) + (1-p_3)u(0) \tag{4.30}$$

$$\text{s. t. } c_3 = W_3, \tag{4.31}$$
$$W_3 = W_2 - c_2, \tag{4.32}$$
$$W_2 = W_1 - c_1, \tag{4.33}$$
$$W_1 = \text{所与}, \tag{4.34}$$
$$0 \leqq c_1 \leqq W_1, \tag{4.35}$$
$$0 \leqq c_2 \leqq W_2 \tag{4.36}$$

記号の意味及び仮定は今まで通りである。効用関数は (4.21) をそのまま使う。今問題としているのは初期消費であるから，これだけを書くと

$$c_1^* = \frac{W_1}{1 + \left[\dfrac{p_2 + p_3{}^{1/a}}{(1 + p_3^{1/a})^{1-a}}\right]^{1/a}} \tag{4.37}$$

となる。Levhari-Mirman の論文ではこれは

$$c_1^* = \frac{W_1}{1 + p_2^{1/a} + p_3^{1/a}} \tag{4.38}$$

とされている。(記号は私流のものに改めた)。もし彼らの計算が正しいのなら，彼らの論文の中で展開されているように議論はエレガントなものとなろう。2期間モデルでは，(4.38) のような表現は一見妥当であるように見える。((4.22) 参照。) しかしながら筆者は，(4.37) と (4.38) が同一であることを確認することはできなかった[17]。

かくして平均寿命保存的な不確実性の増大の c_1^* への効果を一般的に調べることは難かしい。そこでここでは数値例を使って調べてみる。次の二つの寿命分布を考える。

$$<p_1 = 1,\ p_2 = 1,\ p_3 = 0>$$

$$<p_1' = 1,\ p_2' = \frac{1}{2},\ p_3' = \frac{1}{2}>$$

前者の平均寿命は $L = 1 + 1 + 0 = 2$, 後者は $L' = 1 + 1/2 + 1/2 = 2$ となり $L = L'$ である。$p_2 = 1 > p_2' = 1/2$ であるから寿命分布 $<p_t'>$ は $<p_t>$ よりもヨリ危険である。$p_2 - p_2' = 1 - 1/2 = 1/2 = p_3' - p_3 = 1/2 - 0 = 1/2$ という要請も満たされている。明らかに $<p_t>$ は不確実性が存在しない場合（2期間を確実に生存する）であり，$<p_t'>$ は考えられうる最も不確実な場合である。寿命分布 $<p_t>$ の下での最適初期消費は，$0 < a < 1$ のどんな値に対しても

$$c_1^* = \frac{1}{2} W_1 \tag{4.39}$$

で与えられる。他方，分布 $<p_t'>$ の下でのそれは，たとえば $a = 1/2$ ならば，

$$c_1^{*\prime} = \frac{20}{29} W_1 \tag{4.40}$$

で与えられる。この例では

17) Lippman-McCall も Levhari-Mirman の計算の誤りに気付いている。p. 245 の脚注参照。

$$c_1^{*\prime} > c_1^* \tag{4.41}$$

となる。この結果は Levhari-Mirman の得たそれに一致する。

5. 価格不確実性

最後に取り挙げる問題は，多数財経済における異時点間に渡る消費者選択に伴う相対価格不確実性の効果である。この分野の研究文献としては，二期間多数財の場合を扱った Epstein (1975)，二期間二財の場合を扱った Eaton (1980) 等があるが，問題の解明は未だ十分に進んでいるとは言い難い。

ここでは二財二期間の枠組みで説明する。モデルを提示する前に仮定と記号の意味を述べる。二財のうち一方の財を「安全財」と呼びその t 期における消費量を x_t $(t=1,2)$ で表わす。この財の現在及び将来の価格は既知である。他方の財は「危険財」と呼ばれその消費量は y_t で表わされる。この財の現在価格は既知であるのに対して将来価格は不確実である。安全財をヌーメレールとする。即ちその価格は両期を通じて1である。危険財の将来価格は主観的分布を持つ確率変数であり，これを p で表わす。(消費者は第2期に p の実現値を知りうる。) 簡単化のため，危険財の将来価格の期待値を1とおき，同財の現在価格も1とおく。不確実性が消失した場合の p の値は1になるものとする。消費者の富は単一種類の利子収益を生まない金融資産であり，t 期におけるその保有量を W_t とおく。更に消費者は賃金等の所得を受け取らないものとする。将来における相対価格の変動に対するヘッジングは行なわないものとする。

モデルは次の如く定式化される。

$$\max_{x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2} E[V(x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2)] \tag{5.1}$$

$$\text{s. t. } W_2 = W_1 - x_1 - y_1, \tag{5.2}$$

$$x_2 + py_2 = W_2, \tag{5.3}$$

$$0 \leqq W_2 \leqq W_1, \tag{5.4}$$

$$W_1 = \text{所与}(0 < W_1 < \infty), \tag{5.5}$$

$$E[p] = 1,\ 0 < p_{min} \leqq p \leqq p_{max} < \infty$$

$$(0 < p_{min} \leqq 1 \leqq p_{max} < \infty;\ p_{min},\ p_{max} = \text{非確率的定数})$$

(5.1) において $V(\ \ )$ は基数的効用関数であり，x_t, y_t について厳密に凹な増加関数とする。故に $E[V(\ \ )]$ は期待効用を表わす。(5.2) は初期富のうち第1期で消費されない部分（貯蓄）が第2期に残されることを表わす。(5.3) は第2期の予算制約式である。(5.4) は各期の消費水準は非負であるべきことを意味する。(5.5) は初期条件である。

上記のモデルの意味するところを言葉で述べると次のようになる。消費者は所与の富 W_1 を持っている。第1期に彼は安全財 x_1 と危険財 y_1 をそれぞれ価格1で購入する。従って彼は $W_2=W_1-x_1-y_1$ 貯蓄することになる。第2期に彼はこの W_2 で安全財 x_2 を価格1で，危険財 y_2 を価格 p で購入する。2期間に渡る消費は彼に効用 $V(\ \ )$ をもたらす。彼はこの期待値 $E[V(\ \ )]$ を最大ならしめる消費計画 $\langle x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2\rangle$ を選択せねばならない。

この問題の最適解の計算手順は次の如くである。まず第2期の最適化問題

$$\max_{x_2,\ y_2}\ V(x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2) \tag{5.6}$$

$$\text{s. t.}\ \ x_2+py_2=W_2, \tag{5.3}$$

$$W_2=\text{所与}, \tag{5.7}$$

$$x_1,\ y_1=\text{所与}, \tag{5.8}$$

$$p=\text{非確率的定数}. \tag{5.9}$$

を最初に解く。一階条件は

$$\frac{\partial V(\ \ )}{\partial x_2}=\frac{\partial V(\ \ )}{\partial y_2}\Big/p \tag{5.10}$$

であり，この解は $x_2^*=x_2^*(W_2,\ p,\ x_1,\ y_1)$ 及び $y_2^*=y_2^*(W_2,\ p,\ x_1,\ y_1)$ である。次に第1期の最適化問題

$$\max_{x_1,\ y_1}\ E[V(x_1,\ y_1;\ x_2^*,\ y_2^*)] \tag{5.11}$$

$$\text{s. t.}\ \ W_2=W_1-x_1-y_1, \tag{5.2}$$

$$0\leqq W_2\leqq W_1, \tag{5.4}$$

$$W_1=\text{所与} \tag{5.5}$$

を解く。記法の混乱を避けるため可変的間接効用関数 $V(x_1, y_1;\ x_2^*, y_2^*)$ (x_1, y_1, W_2, p は所与) を $V^*(\ )$ と書けば，一階条件は，最適貯蓄の内部解を仮定して，

$$E\left[\frac{\partial V^*}{\partial x_1}\right]=E\left[\frac{\partial V^*}{\partial x_2^*}\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial W_2}-\frac{\partial \chi_2^*}{\partial \chi_1}\right)+\frac{\partial V^*}{\partial y_2^*}\left(\frac{\partial y_2^*}{\partial W_2}-\frac{\partial y_2^*}{\partial x_1}\right)\right], \tag{5.12}$$

$$E\left[\frac{\partial V^*}{\partial y_1}\right]=E\left[\frac{\partial V^*}{\partial x_2^*}\left(\frac{\partial x_2^*}{\partial W_2}-\frac{\partial x_2^*}{\partial y_1}\right)+\frac{\partial V^*}{\partial y_2^*}\left(\frac{\partial y_2^*}{\partial W_2}-\frac{\partial y_2^*}{\partial y_1}\right)\right] \tag{5.13}$$

となる。これらの方程式を解いて得られる最適解を x_1^*, y_1^* とおく。最適貯蓄は

$$W_2^*=W_1-x_1^*-y_1^* \tag{5.14}$$

と定義される。

さて今まではこのモデルの形式的な解法に触れてきたわけであるが，このような一般的な枠組みを保持しながら，経済的に意味のある最適解が存在するか否か，又存在するとして相対価格不確実性の増大の効果はどうなるかを調べることは非常に難かしい。

そこで若干の例について最適解を計算してみよう。

例1.　$V(x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2)=x_1^\alpha y_1^\beta x_2^\gamma y_2^\delta,\quad 0<\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta<1$　　(5.15)

$$x_1^*=\frac{\alpha(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta)-\alpha\beta}W_1, \tag{5.16}$$

$$y_1^*=\frac{\beta(\gamma+\delta)}{(\alpha+\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta)-\alpha\beta}W_1, \tag{5.17}$$

$$x_2^*=\frac{\gamma}{\gamma+\delta}W_2^*, \tag{5.18}$$

$$y_2^*=\frac{\delta}{\gamma+\delta}\cdot\frac{W_2^*}{p}, \tag{5.19}$$

$$W_2^*=\frac{(\gamma+\delta)^2}{(\alpha+\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta)-\alpha\beta}W_1, \tag{5.20}$$

$$E[V(x_1^*.\ y_1^*;\ x_2^*,\ y_2^*)]$$
$$=\frac{\alpha^\alpha\beta^\beta\gamma^\gamma\delta^\delta(\gamma+\delta)^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}{[(\alpha+\gamma+\delta)(\beta+\gamma+\delta)-\alpha\beta]^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}}W_1^{\alpha+\beta+\gamma+\delta}E[1/p^\delta] \tag{5.21}$$

Flemming-Turnovsky-Kemp (1977) の幾何学的平均保存拡散 (Geometric MPS) による相対価格不確実性の増大[18]の効果を見てみると，x_1^*, y_1^*, x_2^*, py_2^*, W_2^* は影響を受けないが，$1/p^\delta$ が $\log p$ に関して強凸であることから期待効用水準は上昇することが分る。

問題を幾分扱い易くするために効用関数の異時的加法分離性を仮定する。一期間効用関数を $U\ (x_t,\ y_t)$ $(t=1,2)$ と書けば

$$V(x_1,\ y_1;\ x_2,\ y_2)=U(x_1,\ y_1)+\delta U(x_2,\ y_2) \tag{5.22}$$

となる。$0<\delta\leqq 1$ は割引因子である。$U\ (\ \ )$ は x_t, y_t に関して厳密に凹な増加関数で，非負の交差二階導関数[19]を持つものとする。即ち，$U_x=\partial U/\partial x>0$, $U_y=\partial U/\partial y>0$, $U_{xx}=\partial^2U/\partial x^2<0$, $U_{yy}=\partial^2U/\partial y^2<0$, $U_{xy}=\partial^2U/\partial x\partial y\geqq 0$ である。

第 2 期における最適化のための一階条件は,

$$U_x\ (x_2,\ y_2)=U_y\ (x_2,\ y_2)/p \tag{5.23}$$

となる。最適貯蓄が内部解 $(0<W_2^*<W_1)$ であると仮定すれば，第 1 期の最適化の一階条件は

$$\begin{aligned} U_x(x_1,\ y_1)&=\delta E\left[U_x(x_2^*,\ y_2^*)\frac{\partial x_2^*}{\partial W_2}+U_y(x_2^*,\ y_2^*)\frac{\partial y_2^*}{\partial W_2}\right] \\ &=\delta E[U_y(x_2^*,\ y_2^*)/p] \end{aligned} \tag{5.24}$$

18) 従来価格不確実性の増大というときには，平均価格を不変に保ちつつ分散を増加させるか，あるいは Rothschild-Stiglitz 流の算術的平均保存拡散 (Arithmetic MPS) による価格分布の危険の増大という概念が使われた。しかしながらFlemming-Turnovsky-Kemp によれば，これらの概念はヌーメレールの選択に感応するために不適当であり，代って彼らの幾何学的平均保存拡散を用いるべきである。この新概念は $\log p$ の分布における算術的平均保存拡散と同値である。以後この概念を使う。

19) 限界効用が正かつ逓減的である限り，$U_{xy}\geqq 0$ (Auspitz-Lieben の意味での弱補完性) は x, y 両財が正常財（上級財）であること及び無差別曲線の強凸性を保証する。$U\ (x, y)$ を単調変換すると U_{xy} の符号は変る可能性があることに注意。Stigler (1950, 第 6 章), Chipman (1977) 参照。

$$U_y(x_1,\ y_1) = \text{同上} \tag{5.25}$$

と書ける。

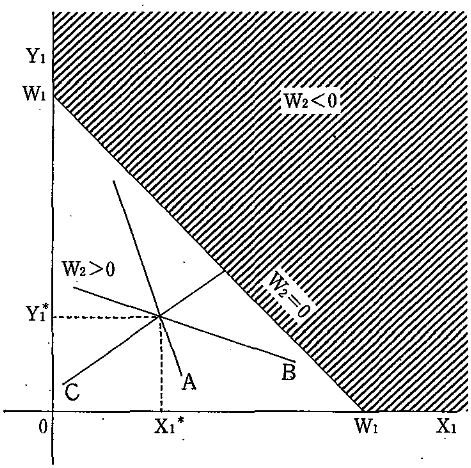
もし $U_{xy}=0$ ならば x_1^*, y_1^* の決定を図解できる。(5.24) 及び (5.25) の (x_1, y_1) 平面におけるグラフの傾きは,

$$-\left[1+\frac{U_{xx}}{\delta E\left[U_{yy}\frac{\partial y_2^*}{\partial W_2}/p\right]}\right]<-1 \text{ 及び } -1<-\frac{1}{1+U_{yy}/\delta E\left[U_{yy}\frac{\partial y_2^*}{\partial W_2}/p\right]}<0$$

である。$U_x\ (x_1,\ y_1)=U_y\ (x_1,\ y_1)$ の軌跡 (Engel 曲線) の傾きは $U_{xx}/U_{yy}>0$ である。(即ち両財は正常財。) 三つの方程式のグラフを図示すると第2図のようになり, 交点の座標が $(x_1^*,\ y_1^*)$ を示す。

再び設例の計算を通じて最適解のイメージを与える。$V(\quad)=U(x_1, y_1)+\delta U(x_2,\ y_2)$ に対して

例 2. $U(x_t,\ y_t)=\alpha \log x_t+(1-\alpha)\log y_t,\quad 0<\alpha<1,\ t=1,2$ (5.26)



A…(5.24)
B…(5.25)
C…Ux(X1,Y1)=UY(X1,Y1)

第2図

$$x_1^* = \frac{\alpha}{1+\delta} W_1, \tag{5.27}$$

$$y_1^* = \frac{1-\alpha}{1+\delta} W_1, \tag{5.28}$$

$$x_2^* = \alpha W_2^*, \tag{5.29}$$

$$y_2^* = (1-\alpha) W_2^* / p, \tag{5.30}$$

$$W_2^* = \frac{\delta}{1+\delta} W_1, \tag{5.31}$$

$$\begin{aligned} U(x_1^*,\ y_1^*) + \delta E[U(x_2^*,\ y_2^*)] &= \delta \log \delta \\ &+ (1+\delta)[\alpha \log \alpha + (1-\alpha)\log(1-\alpha) - \log(1+\delta) \\ &\quad + \log W_1] - (1-\alpha)\delta E[\log p] \end{aligned} \tag{5.32}$$

この例では割引因子の効果が理解し易い。不確実性増大の効果を見てみると，x_1^*, y_1^*, x_2^*, py_2^*, W_2^* 及び期待効用は全然影響を受けないことが分る。

例 3.　$U(x_t,\ y_t) = \alpha \log(x_t - \bar{x}) + (1-\alpha)\log(y_t - \bar{y})$　(5.33)

$$0 < \alpha < 1,\ x_t \geqq \bar{x} \geqq 0,\ y_t \geqq \bar{y} \geqq 0,\ t=1,\ 2$$

この例に対しては，

$$W_1 \geqq 2\bar{x} + (1+p_{max})\bar{y},\ \bar{x} + p_{max}\bar{y} \leqq W_2 \leqq W_1 - \bar{\chi} - \bar{y}$$

そしてそれ故に

$$y_1 \leqq -x_1 + (W_1 - \bar{x} - p_{max}\bar{y})$$

でなければならない。第２期の需要関数は

$$x_2^* = \alpha W_2 + (1-\alpha)\bar{x} - \alpha p \bar{y}, \tag{5.34}$$

$$y_2^* = [(1-\alpha)W_2 - (1-\alpha)\bar{x} + \alpha p \bar{y}]/p \tag{5.35}$$

である。x_1^*, y_1^* は

$$\frac{\alpha}{x_1 - \bar{x}} = \delta E\left[\frac{1}{W_2 - \bar{x} - p\bar{y}}\right], \tag{5.36}$$

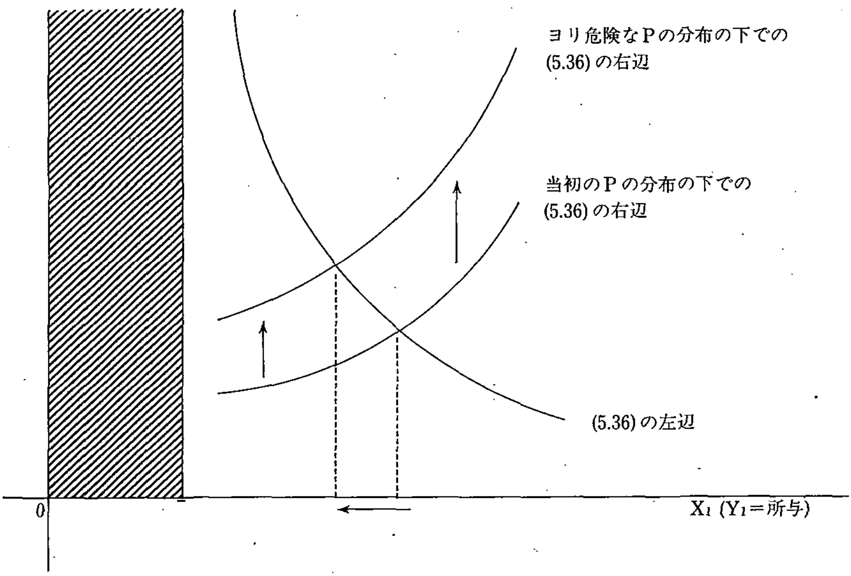
$$\frac{1-\alpha}{y_1-\bar{y}}=\delta E\left[\frac{1}{W_2-\bar{x}-p\bar{y}}\right] \tag{5.37}$$

を満たす。第1期の需要関数は explicit な形では求まらない。第1期の限界効用均等法則は

$$y_1=\frac{1-\alpha}{\alpha}x_1-\frac{1-\alpha}{\alpha}\bar{x}+\bar{y} \tag{5.38}$$

で表わされる。x_1^*, y_1^* の決定は第2図のように図解できる（図略)。不確実性増大の効果は，x_1^*, y_1^* は小さくなり，x_2^*, py_2^*, W_2^* は大きくなることである。期待効用への効果は不明である。

証明は次の如くである。(5.36), (5.37) の右辺の $1/(W_2-\bar{x}-p\bar{y})$ は $\log p$ に関して凸であるから，(5.36), (5.37) の右辺は危険の増大により大きくなる。このことは第2図の A, B 両曲線に相当する曲線が左にシフトすることを意味する。というのは (5.36) の左辺は x_1 の減少凸関数，右辺は，所与の y_1 に対して，x_1 の増加凸関数であるから，第3図から分るように危険の増大によって，



第3図

所与 y_1 に対して，(5.36) を満たす x_1 は小さくなるからである。同様の方法により (5.37) のグラフも又左にシフトすることが分る。(5.38) のグラフ（第2図のC曲線に相当するもの）は危険増大の影響を受けないことは明らか。以上の推論から結論が従う。

以上の諸例では最適貯蓄は一般に内部解であった。しかしながら常にそうであるわけではない。たとえば

$$U(x_t,\ y_t)=x_t^{\alpha}y_t^{\beta},\ \ 0<\alpha,\ \beta<1,\ t=1,2 \tag{5.39}$$

に対しては貯蓄の内部解は必ずしも保証されない[20]。この事実は今まで看過されてきた。従って (5.39) に対する最適解の検討は本稿の目的を逸脱することになるので割愛する。

引用文献

BARRO, R. J. and FRIEDMAN, J. W. (1977), "On Uncertain Lifetimes", *Journal of Political Economy,* 85, 843–849.

CHIPMAN, J. S. (1977), "An Empirical Implication of Auspitz-Lieben-Edgeworth-Pareto Complementarity", *Journal of Economic Theory,* 14, 228–231.

DRÈZE, J. H. and MODIGLIANI, F. (1972), "Consumption Decisions under Uncertainty", *Journal of Economic Theory,* 5, 308–335.

EATON, J. (1980), "Price Variability, Utility and Savings", *Review of Economic Studies,* 47. 513–520.

EPSTEIN, L. (1975), "A Disaggregate Analysis of Consumer Choice under Uncertainty", *Econometrica,* 43, 877–892.

FLEMMING, J. S., TURNOVSKY, S. J. and KEMP, M. C. (1977), "On the Choice of Numeraire and Certainty Price in General Equilibrium Models of Price Uncertainty", *Review of Economic Studies,* 64, 573–583.

GROSSMAN, S., LEVHARI, D. and MIRMAN, L. J. (1979), "Consumption under Uncertainty", in GREEN, J. R. and SCHEINKMAN, J. A. (Eds.) *General Equilibrium, Growth, and Trade, Essays in Honor of Lionel McKenzie,* Academic Press, 105–124.

HAHN, F. H. (1970), "Savings and Uncertainty", *Review of Economic Studies,* 37, 21–24.

HAKANSSON, N. H. (1970), "Optimal Investment and Consumption

20) 一財モデルでは最適貯蓄は一般にコーナー解にはならないことに注意。

Strategies under Risk for a Class of Utility Functions", *Econometrica,* 38, 587–607.

HAMADA, K. (1972), "Income, Consumption and the Demand for Money", *Economic Studies Quarterly,* 23, No. 1, 28–37.

HEY, J. D. (1979), *Uncertainty in Microeconomics,* New York University Press.

HEY, J. D. (1980), "Optimal Consumption under Income Uncertainty, An Example and a Conjecture", *Economics Letters,* 5, 129–133.

KATZ, E. (1979), "A Note on Uncertain Lifetimes", *Journal of Political Ecomomy,* 87, 193–195.

LELAND, H. E. (1968), "Saving and Uncertainty: The Precautionary Demand for Saving", *Quarterly Journal of Economics,* 82, 465–473.

LEVHARI, D. and MIRMAN, L. J. (1977), "Savings and Consumption with an Uncertain Horizon", *Journal of Political Economy,* 85, 265–281.

LEVHARI, D., MIRMAN, L. J. and ZILCHA, I. (1980), "Capital Accumulation under Uncertainty", *International Economic Review,* 21, 661–671.

LEVHARI, D. and SRINIVASAN, T. N. (1969), "Optimal Savings under Uncertainty", *Review of Economic Studies*, 36, 153–163.

LIPPMAN, S. A. and McCALL, J. J. (1981), "The Economics of Uncertainty: Selected Topics and Probabilistic Methods", in ARROW, K. J. and INTRILIGATOR, M. D. (Eds.) *Handbook of Mathematical Economics,* Vol. 1, Chapter 6, North-Holland, 211–284.

MERTON, R. C. (1969), "Lifetime Portfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case", *Review of Economics and Statistics,* 51, 247–257.

MERTON, R. C. (1971), "Optimum Consumption and Portfolio Rules in a Continuous-Time Model", *Journal of Economic Theory,* 3, 373–413.

MILLER, B. L. (1974), "Optimal Consumption with a Stochastic Income Stream", *Econometrica,* 42, 253–266.

MILLER, B. L. (1976), "The Effect on Optimal Consumption of Increased Uncertainty in Labor Income in the Multiperiod Case", *Journal of Economic Theory,* 13, 154–167.

MIRRLEES, J. A. (1974), "Optimum Accumulation under Uncertainty: The Case of Stationary Returns to Investment", in DRÈZE, J. H. (Ed.) *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality,* Macmillan, 36–50.

PELZMAN, J. and ROUSSLANG, D. (1982), "A Note on Uncertain Lifetimes: A Comment", *Journal of Political Economy,* 90, 181–183.

PHELPS, E. S. (1962), "The Accumulation of Risky Capital: A Sequential Utility Analysis", *Econometrica,* 30, 729–743.

ROTHSCHILD, M. and STIGLITZ, J. E. (1970), "Increasing Risk: I. A Definition", *Journal of Economic Theory,* 2, 225–243.

ROTHSCHILD, M. and STIGLITZ, J. E. (1971), "Increasing Risk: II. Its Economic Consequences", *Journal of Ecomomic Theory,* 3, 66–84.

SAMUELSON, P. A. (1969), "Lifetime Portfolio Selection by Dynamic Stochastic Programming", *Review of Economics and Statistics,* 51, 239–246.

SANDMO, A. (1969), "Capital Risk, Consumption, and Portfolio Choice", *Econometrica,* 37, 586–599.

SANDMO, A. (1970), "The Effect of Uncertainty on Saving Decisions", *Review of Economic Studies,* 37, 353–360.

SANDMO, A. (1974), "Two-Period Models of Consumption Decisions under Uncertainty: A Survey", in DRÈZE, J. H. (Ed.), *Allocation under Uncertainty: Equilibrium and Optimality,* Macmillan, Chapter 2, 24–35.

酒井泰弘『不確実性の経済学』有斐閣，1982.

SCHECHTMAN, J. (1976), "An Income Fluctuation Problem", *Journal of Economic Theory,* 12, 218–241.

SIBLEY, D. S. (1975), "Permanent and Transitory Income Effects in a Model of Optimal Consumption with Wage Income Uncertainty", *Journal of Economic Theory,* 11, 68–82.

STIGLER, G. J. (1950), "The Development of Utility Theory", *Journal of Political Economy,* 58,: Reprinted in *Essays in the History of Economics,* The University of Chicago Press, 1965, 66–155.

YAARI, M. E. (1965), "Uncertain Lifetime, Life Insurance, and the Theory of the Consumer", *Review of Economic Studies,* 32, 137–150.

YAARI, M. E. (1976), "A Law of Large Numbers in the Theory of Consumer's Choice under Uncertainty", *Journal of Economic Theory,* 12, 202–217.