大規模システムの
資源配分型統合法について

奥　田　和　重

1. 緒　　　　言

大規模システムを最適化するための方法として，双対理論にもとづく価格による協調と呼ばれる統合方法と，部分問題を結合する制約式（結合制約式）右辺の値を資源とみなして，これを配分する資源配分による協調と呼ばれる統合方法がある。前者は，統合変数が部分問題の目的関数内に存在するために Goal Coordination とも呼ばれ，最適解に達するまでの過程に得られる解は，実行可能性を保持していない。後者は，統合変数が制約条件式内に存在するので Model Coordination とも呼ばれ，イテレーション中の解は常に実行可能性を保持している。これら以外の方法としては，価格付けと資源配分の両方を行なう Mixed Approach [1] や目標値設定による方法 [2] などが提案されている。

前述したように，資源配分による統合方法は，最適解を得るためのイテレーションを途中で打ち切っても，そのときの解が実行可能性を持つので近似最適解を得ることができるという利点がある。このような資源配分型統合問題に対して，現在までに種々の手法が提案されており，これらの手法を以下に概括する。

2. 資源配分型統合問題

本論で対象とする大規模システムの数理モデルとして，次のような分割可能

原稿受領日　1984年8月31日

な問題を考える。

$$\text{Max.} \sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{1a}$$

$$\text{Sub. to } \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{1b}$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i,\ i=1,\ldots,m \tag{1c}$$

ここで，$X_i=\{\boldsymbol{x}_i|\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq\boldsymbol{d}_i,\ \boldsymbol{x}_i\geqq\boldsymbol{0}\}$，$\boldsymbol{x}_i=(x_{i1},\ldots,x_{in_i})^T$，$\boldsymbol{b}_0=(b_{01},\ldots,b_{0l})^T$，$\boldsymbol{d}_i=(d_{i1},\ldots,d_{ip_i})^T$，$\boldsymbol{g}_i=(g_{i1},\ldots,g_{il})^T$，$\boldsymbol{h}_i=(h_{i1},\ldots,h_{ip_i})^T$ である。また f_i は実数値関数，$\boldsymbol{g}_i$，$\boldsymbol{h}_i$ はベクトル値関数であるとする。

この問題に対して次の仮定が成り立つものとする [3]。

(A 1) X_i は空でないコンパクト凸集合である。

(A 2) f_i は X_i 上で微分可能な凹関数である。

(A 3) $\boldsymbol{g}_i$ は X_i 上で微分可能な凸関数である。

(A 4) 原問題（1）は実行可能解を持つ。

$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i\leqq\boldsymbol{b}_0$ が成り立つような任意の $\boldsymbol{b}_i$ に対して，原問題を m 個の部分問題に分割すると，各部分問題は次のようになる。

$$\text{Max. } f_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{2a}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq\boldsymbol{b}_i \tag{2b}$$

$$\boldsymbol{x}_i\in X_i \tag{2c}$$

ここで，$\boldsymbol{b}_i=(b_{i1},\ldots,b_{il})^T$ である。この問題は，$\boldsymbol{b}_i$ が与えられれば容易に解くことができるが，その解は必ずしも原問題を最適にしない。システム全体の最適解を得るためには，部分問題の解が原問題の最適解となるように $\boldsymbol{b}_i$ を適切に決定しなければならない。これを行うために，次のような主問題を考える。

$$\text{Max. } \sum_{i=1}^{m} z_i(\boldsymbol{b}_i) \tag{3a}$$

$$\text{Sub. to } \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{3b}$$

$$\boldsymbol{b}_i\in Y_i,\ i=1,\ldots,m \tag{3c}$$

ここで，

$$z_i(\boldsymbol{b}_i)=\text{Sup.}_{x_i}\{f_i(\boldsymbol{x}_i)\ \text{Sub. to}\ \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq\boldsymbol{b}_i,\ \boldsymbol{x}_i\in X_i\} \tag{4}$$

$$Y_i=\{\boldsymbol{b}_i\in R^l\,|\,\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq\boldsymbol{b}_i,\ \text{for some}\ \boldsymbol{x}_i\in X_i\} \tag{5}$$

である。この主問題は，部分問題の制約領域を満すような $\boldsymbol{b}_i$ の範囲 □ と

(3b) のもとに目的関数 (1a) を最大にするような資源の配分を決定する。この主問題の特徴として，次のようなものが知られている [3, 4]。

(C 1)　f_i, $\boldsymbol{g}_i$ はそれぞれ凹関数と凸関数であるので，z_i は Y_i 上で凹かついたるところで微分不可能な関数である。

(C 2)　Y_i は $\boldsymbol{g}_i$ と X_i の凸性から空でない凸集合である。

(C 3)　原問題が実行可能であることから，主問題も実行可能である。

(C 4)　f_i, $\boldsymbol{g}_i$ が連続，X_i がコンパクトであることより，部分問題が実行可能であれば，いつでも最適解を持つ。

このように，主問題 (3) と部分問題 (2) で表わされる資源配分型統合問題は，前章で指摘したように，イテレーション過程で実行可能解が常に得られているという利点があるが，他方 z_i や Y_i を陽的に得ることが困難であり，また z_i がいたるところで微分不可能であるという難点を持つ。次章以下でこのような資源配分型統合問題の解法を概括する。まず次章では，システムが線形の場合について，2 レベル法と直接資源配分法，および Piecewise 法を取りあげる。4 章では，非線型のシステムに対して，Piecewise 法，許容方向法，および接線近似法について述べる。

3.　線形資源配分型統合問題の解法

3.1　2 レベル法 [5]

原問題 (1) の代りに次のような分割可能な線形計画問題を考える。

$$\text{Max. } \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i \tag{6a}$$

$$\text{Sub. to } \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i \leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{6b}$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqq \boldsymbol{0},\ i=1,\dots,m \tag{6c}$$

ここで，$\boldsymbol{c}_i=(c_{i1},\dots,c_{in_i})^T$，$\boldsymbol{A}_i$: $l\times n_i$ 行列である。(6b) に関する双対変数 $\boldsymbol{y}=(y_1,\dots,y_l)^T$ を用いて次のような双対問題を導入する。

$$\text{Max. } \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{b}_0 \tag{7a}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{y}^T \boldsymbol{A}_i \geqq \boldsymbol{c}_i,\ i=1,\dots,m \tag{7b}$$

$$\boldsymbol{y} \geqq \boldsymbol{0} \tag{7c}$$

他方，(6) の部分問題とその双対問題は，(3b) を満す任意の$\boldsymbol{b}_i$ に対して次のようになる。

$$\text{Max. } \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i \quad (8a) \qquad \text{Min. } \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{b}_i \quad (9a)$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i \leqq \boldsymbol{b}_i \quad (8b) \qquad \text{Sub. to } \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{A}_i \geqq \boldsymbol{c}_i \quad (9b)$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqq \boldsymbol{0} \quad (8c) \qquad \boldsymbol{y}_i \geqq \boldsymbol{0} \quad (9c)$$

(6) と (7) の実行可能解と最適解の非空の集合をそれぞれ X, X^* および Y, Y^* とする。部分問題 (8), (9) についても同様に $X_i(\boldsymbol{b}_i)$, $X_i^*(\boldsymbol{b}_i)$, Y_i, Y_i^* とする。

m 個の部分問題が実行可能解を持つような任意の $\boldsymbol{b}_i$ の集合と，そのときの解の集合を以下のように定義する。

$$U=\{\boldsymbol{b} \mid \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{b}_i \geqq \min_{\boldsymbol{y}_i} \max_{\boldsymbol{x}_i} \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i,\ \textstyle\sum_{i=1}^m \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0$$
$$\boldsymbol{x}_i \in X_i(\boldsymbol{b}_i),\ \boldsymbol{y}_i \in Y_i,\ i=1,\ldots, m\}$$

$$X(\boldsymbol{b})=X_1(\boldsymbol{b}_1)\times\ldots\times X_m(\boldsymbol{b}_m)$$

ここで，$\boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1^T,\ldots, \boldsymbol{b}_m^T)^T$ である。これらのことから次式が成り立つ。

$$X=\cup_{\boldsymbol{b}\in U} X(\boldsymbol{b}) \qquad (10)$$

さて，任意の $\boldsymbol{b}\in U$ に対して，

$$z_i(\boldsymbol{b}_i)=\max_{\boldsymbol{x}_i\in X_i(\boldsymbol{b}_i)} \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i=\min_{\boldsymbol{y}_i\in Y_i} \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{b}_i,\ i=1,\ldots, m \qquad (11)$$

および

$$Z(\boldsymbol{b})=\textstyle\sum_{i=1}^m z_i(\boldsymbol{b}_i) \qquad (12)$$

とおく。このとき原問題 (6) は，以下のような 2 レベル問題に書き換えることができる。

センター問題: $\text{Max. } Z(\boldsymbol{b}) \text{ Sub. to } \boldsymbol{b}\in U$ (13)

セクター問題: $\text{Max. } \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i \text{ Sub. to } \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i \leqq \boldsymbol{b}_i^*,\ \boldsymbol{x}_i \geqq \boldsymbol{0}$ (14)

あるいは,

$$\text{Min. } \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{b}_i^* \text{ Sub. to } \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{A}_i \geqq \boldsymbol{c}_i,\ \boldsymbol{y}_i \geqq \boldsymbol{0} \qquad (14)$$

ここで，$\bar{\boldsymbol{b}}^*\in U^*$, $U^*=\{\boldsymbol{b}^* \mid Z(\boldsymbol{b}^*)=\max_{\boldsymbol{b}\in U} Z(\boldsymbol{b})\}$ である。

原問題とこの 2 レベル問題の間には，次の定理が成立する。

定理 1 $U\neq\phi$ かつ $X=\cup_{\boldsymbol{b}\in U} X(\boldsymbol{b})$ であれば,

$$\max_{\boldsymbol{b}\in U} Z(\boldsymbol{b}) = \max_{\boldsymbol{x}_i\in X_i} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i = Z^* \tag{15}$$

である。

次のような実行可能な $\boldsymbol{y}_i$ の集合を考える。

$$V \triangleq \{\boldsymbol{v} = (\boldsymbol{y}_1^T, \ldots, \boldsymbol{y}_m^T)^T \mid \boldsymbol{y}_i \in Y_i,\ i=1, \ldots, m\} \tag{16}$$

これを用いて (12) を次のように書き換える。

$$Z(\boldsymbol{b}) = \sum_{i=1}^{m} z_i(\boldsymbol{b}_i) = \min_{\boldsymbol{y}_i\in Y_i} \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{b}_i = \min_{\boldsymbol{v}\in V} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{b} \tag{17}$$

したがって，定理1と (17) から原問題 (6) は次のようになる。

$$Z^* = \max_{\boldsymbol{b}\in U} \min_{\boldsymbol{v}\in V} \boldsymbol{v}^T \boldsymbol{b} \tag{18}$$

上式において U はセンターの方略の集合，V はセクターの方略の集合，$\boldsymbol{v}^T\boldsymbol{b}$ を利得関数と考えると，(18) は次のような多面体ゲームとして解釈できる。すなわち，センターは資源の配分によって得られる利益を最大にするような方略を決定し，セクターは配分された資源に支払う費用を最小にするような方略を決定する。Kornai らは，この多面体ゲームをさらに行列ゲームに置き換えているが，その行列ゲームとゲームの利得関数を陽的に表わすことが困難であるために，Brown-Robinson の模擬プレイを適用している。この模擬プレイの適用は，初めにセンターが任意の方略 $\boldsymbol{b}\in U$ を選んで各セクターに示すことから始まる。各セクターは，提示されたセンターの方略を用いてセクターの方略 $\boldsymbol{v}$ を決定し，これをセンターに示す。センターは，この $\boldsymbol{v}$ を用いて新しい $\boldsymbol{b}$ を決定する。このような手続きを繰り返すことによって，最終的に収束点である方略に達することができる。しかしながら，解の収束は無限回のイテレーションにおいて保証されている。そこで有限回のイテレーションで解を得るために，小さな正数 ε を用いた ε 最適解を提案している。これは新たに得られた解と以前の解との差が ε 以下であれば，そのときの解を最適解とするものである。

3.2 直接資源配分法 [6]

前節の2レベル法は，解の収束性の保証に Brown-Robinson の定理を用いているが，それだけでは不十分であることが指摘されている [7]。ten Kate は，模擬プレイによる収束性をそのまま用いているが，有限回のイテレーションで収束しないことと収束性が遅いことを指摘し，有限回のイテレーションで

収束する方法を提案している。

ten Kate は原問題 (6) を次のように変形し，配分資源 $\boldsymbol{b}_i$ を変数として取り入れている。

$$\text{Max. } \textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i \tag{19a}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i - \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{0},\ i=1,\dots,m \tag{19b}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{19c}$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqq \boldsymbol{0},\ i=1,\dots,m \tag{19d}$$

この問題の双対問題は次のようになる。

$$\text{Min. } \boldsymbol{y}_0^T \boldsymbol{b}_0 \tag{20a}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{y}_i^T \boldsymbol{A}_i \geqq \boldsymbol{c}_i,\ i=1,\dots,m \tag{20b}$$

$$\boldsymbol{y}_i^T - \boldsymbol{y}_0 = \boldsymbol{0},\ i=1,\dots,m \tag{20c}$$

$$\boldsymbol{y}_i \geqq \boldsymbol{0},\ i=1,\dots,m \tag{20d}$$

これに Dantzig-Wolfe の分解原理を適用するために，制約条件 (20b) と (20d) を実行可能な基底解の凸結合で表わすことを考える。実行可能基底解の端点を $\boldsymbol{y}_{ij}$ $(j=1,\ 2,\dots)$ とすると，

$$\boldsymbol{y}_i = \textstyle\sum_j \delta_{ij} \boldsymbol{y}_{ij},\quad \sum_j \delta_{ij} = 1,\quad \delta_{ij} \geqq 0 \tag{21}$$

となる。これを用いて双対問題 (20) を書き換えると次のようになる。

$$\text{Min. } \boldsymbol{y}_0^T \boldsymbol{b}_0 \tag{22a}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{y}_0^T - \textstyle\sum_j \delta_{ij} \boldsymbol{y}_{ij} = \boldsymbol{0},\ i=1,\dots,m \tag{22b}$$

$$\textstyle\sum_j \delta_{ij} = 1,\ i=1,\dots,m \tag{22c}$$

$$\delta_{ij} \geqq 0,\ i=1,\dots,m,\ j=1,\ 2,\dots \tag{22d}$$

この問題の双対問題は次のようになる。

$$\text{Max. } \textstyle\sum_{i=1}^{m} \eta_i \tag{23a}$$

$$\text{Sub. to } \boldsymbol{y}_{ij}^T \boldsymbol{b}_i \geqq \eta_i,\ i=1,\dots,m \tag{23b}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{23c}$$

ここで，$\boldsymbol{y}_{ij} \in S_i$，$S_i$ は実行可能基底解の端点の集合である。η_i は $\boldsymbol{y}_{ij}^T \boldsymbol{b}_i$ よりも大きくなることがないので，(23) は次のように書ける。

$$\text{Max. } \textstyle\sum_{i=1}^{m} (\min_{\boldsymbol{y}_{ij} \in S_i} \boldsymbol{y}_{ij}^T \boldsymbol{b}_i),\ \text{Sub. to } \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{b}_i \geqq \boldsymbol{0} \tag{24}$$

これが資源配分を行う主問題となる。一方，m 個の部分問題は，双対変数 $\boldsymbol{y}_i$ を求めて S_i の要素 □ を決定するので (9) と同様の形になる。

主問題 (24) を解くために，これの双対問題である (22) を用いると，これは等号制約を含むために，等号制約に対して人為変数を導入し，線形計画法の 2 段階法を用いて解いている。

3.3 Piecewise 法 [8]

ここで取りあげる手法は，配分資源をパラメータと考えて，部分問題にマルチパラメトリック線形計画法 [9] を適用し，主問題の目的関数と Y_i を $\boldsymbol{b}_i$ について陽的に表わすことを試みている。その結果，部分問題の目的関数は$\boldsymbol{b}_i$に関して区間線形関数となり，$\boldsymbol{b}_i$の定義域上のいたるところで微分不可能な凹関数となる。これに微分不可能な場合について拡張したKuhn-Tuckerの必要条件 [10] を適用し，最適な $\boldsymbol{b}_i$ を求めている。本節で対象とする問題は次のようなものである。

$$\text{Max.}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i \tag{25a}$$

$$\text{Sub. to}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{A}_i \boldsymbol{x}_i \leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{25b}$$

$$\boldsymbol{x}_i \in X_i = \{\boldsymbol{x}_i \mid \boldsymbol{H}_i \boldsymbol{x}_i \leqq \boldsymbol{d}_i,\ \boldsymbol{x}_i \geqq \boldsymbol{0}\},\ i=1,\dots,m \tag{25c}$$

次のようなベクトルと行列を定義する。

$$\boldsymbol{G}_i = (\boldsymbol{A}_i,\ \boldsymbol{H}_i)^T_,\quad \bar{\boldsymbol{d}}_i = (\boldsymbol{0}^T,\ \boldsymbol{d}_i^T)^T_,\quad \boldsymbol{D}_i = (\boldsymbol{I},\ \boldsymbol{0})^T$$

$\sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0$ を満す任意の $\boldsymbol{b}_i$ が与えられたとき，m 個の部分問題は次のようになる。

$$\text{Max.}\quad \boldsymbol{c}_i^T \boldsymbol{x}_i \tag{26a}$$

$$\text{Sub. to}\quad \boldsymbol{G}_i \boldsymbol{x}_i \leqq \bar{\boldsymbol{d}}_i + \boldsymbol{D}_i \boldsymbol{b}_i \tag{26b}$$

$$\boldsymbol{x}_i \geqq \boldsymbol{0} \tag{26c}$$

これは，制約式右辺にベクトル・パラメータを含むマルチパラメトリック線形計画問題であるので，これをベクトル・パラメータ $\boldsymbol{b}_i$ について解くと，$\boldsymbol{b}_i$ に関する最適解と目的関数の最適値，および $\boldsymbol{b}_i$ の実行可能領域を得ることができる。$\boldsymbol{b}_i$ をその定義域上で変化させると，$\boldsymbol{b}_i$ の実行可能領域ごとに最適基底解が存在する。それらが K_i 組存在するものとし，各組を k_i で表わすことに

する。第 k_i 番目の最適解と最適値，および実行可能領域を以下のように表わすことにする。

$$x_i^{(ki)}(b_i)=B_i^{(ki)^{-1}}(\bar{d}_i+D_ib_i)=d_i^{(ki)}+D_i^{(ki)}b_i \tag{27}$$

$$z_i^{(ki)}(b_i)=c_{B_i}^T B_i^{(ki)^{-1}}(\bar{d}_i+D_ib_i)=z_{\max i}^{(ki)}+c_i^{(ki)T}b_i \tag{28}$$

$$Y_i^{(ki)}=\{b_i \mid d_i^{(ki)}+D_i^{(ki)}b_i\geqq 0\} \tag{29}$$

ここで，B_i は G_i の最適基底行列，c_{B_i} は B_i に対応する c_i の部分ベクトル，$d_i^{(ki)}=B_i^{(ki)^{-1}}\bar{d}_i$, $D_i^{(ki)}=B_i^{(ki)^{-1}}D_i$, $z_{\max i}^{(ki)}=c_{B_i}^T B_i^{(ki)^{-1}}\bar{d}_i$, $c_i^{(ki)T}=c_{B_i}^T B_i^{(ki)^{-1}}D_i$, $k_i=1,\dots,K_i$ である。

パラメトリック部分問題 (26) が最適解を持つ b_i の全領域は次のようである。

$$M_i=\cup_{k_i=1}^{K_i}Y_i^{(ki)} \tag{30}$$

この M_i 上で定義される z_i を z_i^0 で表わすことにすれば，これは次のようになる。

$$z_i^0(b_i)=\begin{cases} z_i^{(1i)}(b_i)=z_{\max i}^{(1i)}+c_i^{(1i)}b_i, & b_i\in Y_i^{(1i)} \\ z_i^{(2i)}(b_i)=z_{\max i}^{(2i)}+c_i^{(2i)}b_i, & b_i\in Y_i^{(2i)} \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots & \quad \vdots \\ z_i^{(Ki)}(b_i)=z_{\max i}^{(Ki)}+c_i^{(Ki)}b_i, & b_i\in Y_i^{(Ki)} \end{cases} \tag{31}$$

定義により $Y_i^{(ki)}$ は閉凸多面体集合である。したがって M_i も閉凸多面体集合になる。さらに $z_i^{(ki)}$ は $Y_i^{(ki)}$ 上で線形関数であり，z_i^0 は M_i 上で連続な凹関数である。$Y_i^{(1i)}$ と $Y_i^{(2i)}$ が超平面で接していれば，それぞれを隣接領域と呼び，それぞれに対応する最適基底行列を隣り合った基底と呼ぶことにする。隣り合った基底は互いに1回の双対ピボット操作で得ることができる。

(3a), (3b), (30), (31) から主問題は次のようになる。

$$\text{Max. } \textstyle\sum_{i=1}^m z_i^0(b_i), \text{ Sub. to } \sum_{i=1}^m b_i\leqq b_0,\ b_i\in M_i,\ i=1,\dots,m \tag{32}$$

目的関数を $Z^0(b)(=\sum_{i=1}^m z_i^0(b_i))$ とし，制約条件を次のように定義する。

$$\Omega\triangleq\{b_i \mid \textstyle\sum_{i=1}^m b_i\leqq b_0,\ b_i\in M_i,\ i=1,\dots,m\} \tag{33}$$

このとき，Ω は閉凸多面体集合，Z^0 は連続な凹関数となる。

各部分問題の実行可能領域の中から $\cap_{i=1}^m Y_i^{(ki)}\neq\phi$ となるような任意の実行

可能領域を選び，それを $Y_i^{(\hat{k}i)}$ とする。$\sum_{i=1}^m \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0$, $\boldsymbol{b}_i \geqq \boldsymbol{0}$ を満すようなすべての実行可能領域の組み合せが J 組存在するものとする。その各組を ω_ζ, $\zeta=1,\ldots,J$, $(1\leqq J\leqq \prod_{i=1}^m K_i)$ で表わし，ω_ζ を構成する $Y_i^{(\hat{k}i)}$ の添字集合を Γ_ζ とする。すなわち，

$$\omega_\zeta=\cap_{i=1}^m Y_i^{(\hat{k}i)} \cap \{\boldsymbol{b}_i \mid \sum_{i=1}^m \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0,\ \boldsymbol{b}_i \geqq \boldsymbol{0}\},\ \hat{k}_i \in \Gamma_\zeta \tag{34}$$

明らかに $\cup_{\zeta=1}^J \omega_\zeta=\Omega$ である。ω_ζ 上で定義される主問題の目的関数を $Z_\zeta(\boldsymbol{b})$ とすれば，これは次のようになる。

$$Z_\zeta(\boldsymbol{b})=\sum_{i=1}^m z_i^{(\hat{k}i)}(\boldsymbol{b}_i)=Z_{\max}^{(\zeta)}+\boldsymbol{C}^{(\zeta)}\boldsymbol{b},\ \hat{k}_i \in \Gamma_\zeta \tag{35}$$

ここで，

$$Z_{\max}^{(\zeta)}=\sum_{i=1}^m z_{\max i}^{(\hat{k}i)},\ \boldsymbol{C}^{(\zeta)}=(\boldsymbol{c}_1^{(\hat{k}1)T},\ldots,\boldsymbol{c}_m^{(\hat{k}m)T})^T,\ \boldsymbol{b}=(\boldsymbol{b}_1^T,\ldots,\boldsymbol{b}_m^T)^T$$

である。ω_ζ は閉凸多面体集合，Z_ζ は ω_ζ 上で線形である。

Ω 上で定義される Z_ζ を Z^0 とすれば，これは次のような Ω 上のいたるところで微分不可能な関数である。

$$Z^0(\boldsymbol{b})=\begin{cases} Z_1(\boldsymbol{b})= Z_{\max}^{(1)}+\boldsymbol{C}^{(1)}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\in\omega_1 \\ Z_2(\boldsymbol{b})= Z_{\max}^{(2)}+\boldsymbol{C}^{(2)}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\in\omega_2 \\ \quad\vdots \qquad\qquad \vdots \qquad\qquad \vdots \\ Z_J(\boldsymbol{b})= Z_{\max}^{(J)}+\boldsymbol{C}^{(J)}\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{b}\in\omega_J \end{cases} \tag{36}$$

また，$Y_i^{(ki_1)}$, $k_{i_1}\in\Gamma_{\zeta 1}$ と $Y_i^{(ki_2)}$, $k_{i_2}\in\Gamma_{\zeta 2}$ が隣接領域であれば，$\omega_{\zeta 1}$ と $\omega_{\zeta 2}$ も隣接領域と呼ぶことにする。

そこで主問題 (32) を (33), (36) を用いて次のように書き換える。

$$\text{Max. } Z^0(\boldsymbol{b}),\ \text{Sub. to } \boldsymbol{b}\in\Omega \tag{37}$$

いま Z^0 と z_i^0 をそれぞれ，

$$Z^0(\boldsymbol{b})=-\infty,\ \text{if } \boldsymbol{b}\notin\Omega, \qquad z_i^0(\boldsymbol{b}_i)=-\infty,\ \text{if } \boldsymbol{b}_i\notin M_i$$

とおいて，目的関数の定義域を R^l 全体に広げる。すなわち，dom $Z^0(\boldsymbol{b})=\Omega$, dom $z_i^0(\boldsymbol{b}_i)=M_i$ とする。これより Z^0 は (36) を考慮して次のような min関数に置き換えることができる。

$$Z^+(\boldsymbol{b})=\min{}_\zeta Z_\zeta(\boldsymbol{b}) \tag{38}$$

これを用いて (37) を次のように書き換える。

$$\text{Max.}\ \ Z^{+}(\boldsymbol{b})=\min{}_{\zeta}Z_{\zeta}(\boldsymbol{b}) \tag{39a}$$

$$\text{Sub. to}\ \ \textstyle\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{39b}$$

$$\boldsymbol{b}_i\geqq\boldsymbol{0},\ i=1,\ldots,m \tag{39c}$$

この問題を最適にする $\boldsymbol{b}_i$ を求めるために，次のような Lagrange 関数を定義する。

$$L_0(\boldsymbol{b},\ \boldsymbol{u}_0)\triangleq Z^{+}(\boldsymbol{b})+\boldsymbol{u}_0^T(\textstyle\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_0) \tag{40}$$

ここで，$\boldsymbol{u}_0=(u_{01},\ldots,u_{0l})^T$ である。最適性の必要条件は，微分可能関数に対する Kuhn-Tucker条件に対応する次の定理によって与えられる。

定理 2 [10]　Slater の制約想定を満す $\boldsymbol{b}_i$ が存在すると仮定する。そのとき，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ が主問題 (39) の大域的最適解であるための必要条件は，

$$\partial L_0(\bar{\boldsymbol{b}},\ \bar{\boldsymbol{u}}_0)=\partial Z^{+}(\bar{\boldsymbol{b}})+\boldsymbol{E}^T\bar{\boldsymbol{u}}_0\ni\boldsymbol{0} \tag{41a}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_0\geqq\boldsymbol{0} \tag{41b}$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{m}\bar{\boldsymbol{b}}_i\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{41c}$$

$$\bar{\boldsymbol{u}}_0^T(\textstyle\sum_{i=1}^{m}\bar{\boldsymbol{b}}_i-\boldsymbol{b}_0)=\boldsymbol{0} \tag{41d}$$

を満す Lagrange 乗数 $\bar{\boldsymbol{u}}_0\in R^l$ が存在することである。ここで，∂L_0, ∂Z^{+} は劣微分，$\boldsymbol{E}$ は (39b) の $\sum$ に対応する行列である。

min 関数の劣微分に関して次の定理が成り立つ。

定理 3 [10]　(38) で定義される凹関数について，int. dom $Z^{+}(\boldsymbol{b})\neq\phi$ とすれば $\boldsymbol{b}_i\in$int. dom. $Z^{+}(\boldsymbol{b})$ に対して，

$$\partial Z^{+}(\boldsymbol{b})=\text{Co.}\ \{\partial Z_{\zeta}(\boldsymbol{b})|\zeta\in I(\boldsymbol{b})\} \tag{42}$$

が成り立つ。ここで，$I(\boldsymbol{b})=\{\zeta|Z^{+}(\boldsymbol{b})=Z_{\zeta}(\boldsymbol{b}),\ \zeta=1,\ldots,J\}$ である。

したがって，(35) より

$$\partial Z_{\zeta}(\boldsymbol{b})=\text{Co.}\ \{\partial z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i),\ \hat{k}_i\in\Gamma_{\zeta}\} \tag{43}$$

であるので，$\boldsymbol{b}_i\in\omega_{\zeta}$ に関する $z_i^{(\hat{k}_i)}$ の劣微分がわかれば，∂Z^{+} を得ることができる。そのために $z_i^{(\hat{k}_i)}$ の劣勾配を求めることにする。

点 $\boldsymbol{b}_i^1\in\omega_{\zeta}$ における $z_i^{(\hat{k}_i)}$ の劣勾配は，任意の点 $\boldsymbol{b}_i^2\in\omega_{\zeta}$ に対して，

$$z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i^2)-z_i^{(\hat{k}_i)}(\boldsymbol{b}_i^1)\leqq\xi_i(\boldsymbol{b}_i^2-\boldsymbol{b}_i^1) \tag{44}$$

を満す ξ_i である。点 $\boldsymbol{b}_i^1$ において上式を満す ξ_i 全体の集合が $z_i^{(\hat{k}_i)}$ の劣微

分 $\partial z_i^{(\hat{k}_i)}$ である。この劣勾配 ξ_i と部分問題 (26) の双対変数 $\boldsymbol{u}_i$ との間には次のような関係が存在する。

定理 4　部分問題 (26) の Lagrange 関数を

$$L_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i)=\boldsymbol{c}_i^T\boldsymbol{x}_i+\boldsymbol{u}_i^T(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}_i-(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i)) \tag{45}$$

とする。$\boldsymbol{x}_i^*$ を部分問題の解とすると，$-\boldsymbol{u}_i^{*T}\boldsymbol{D}_i$ が $\boldsymbol{b}_i$ における劣勾配となる。すなわち，$-\boldsymbol{u}_i^{*T}\boldsymbol{D}_i\in\partial z_i^{(\hat{k}_i)}$ であるための必要十分条件は，$(\boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{u}_i^*)$ が L_i の鞍点になっていることである。

$\bar{\boldsymbol{b}}_i\in\mathrm{bdY}_i^{(\hat{k}_i)}$, $\hat{k}_i\in\Gamma_\zeta$ に対して，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ でアクティブになる制約式の添字集合を

$$S_i^{(\hat{k}_i)}=\{j\,|\,d_{ij}^{(\hat{k}_i)}+\textstyle\sum_{q=1}^{l}D_{ijq}^{(\hat{k}_i)}\bar{b}_{iq}=0,\ \ j=1,\ldots,\ l+p_i\} \tag{46}$$

とすると，$-\sum_{q=1}^{l}D_{ijq}^{(\hat{k}_i)}\bar{b}_{iq}=d_{ij}^{(\hat{k}_i)}$, $j\in S_i^{(\hat{k}_i)}$ を境界とするすべての隣接領域に関する符号を逆にした双対変数で構成される凸多面体が $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ における劣勾配の集合，すなわち劣微分となる。

以上のことから，主問題 (32) を最適にするためには，部分問題 (26) の双対変数を求めればよいことがわかった。部分問題の双対変数 $\boldsymbol{u}_i$ と $\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{D}_i$ は，部分問題を解く際に用いるシンプレックス・タブロー内にシンプレックス乗数として現われる。もし主問題 (32) の解 $\bar{\boldsymbol{b}}_i$ が制約の内点であれば，$\bar{\boldsymbol{u}}_0=\boldsymbol{0}$ で最適条件 (41a) は $\partial Z^+(\bar{\boldsymbol{b}})\ni\boldsymbol{0}$ となり，$\bar{\boldsymbol{b}}_i$ がこの条件を満せば最適解である。これはシンプレックス・タブロー内のパラメータ $\boldsymbol{b}_i$ に関するシンプレックス乗数 $\boldsymbol{c}_{B_i}^T\boldsymbol{B}_i^{(\hat{k}_i)^{-1}}\boldsymbol{D}_i$ が零に等しくなったとき満される。

4.　非線形資源配分型統合問題の解法

4.1　2 次計画問題の解法

次のような 2 次計画問題を考える。

$$\text{Max.}\ \textstyle\sum_{i=1}^{m}f_i(\boldsymbol{x}_i)=\sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{p}_i^T\boldsymbol{x}_i-1/2\,\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_i) \tag{47a}$$

$$\text{Sub. to}\ \textstyle\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{A}_i\boldsymbol{x}_i\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{47b}$$

$$\boldsymbol{x}_i\in X_i,\ \ i=1,\ldots,\ m \tag{47c}$$

ここで，$\boldsymbol{p}_i=(p_{i1},\ldots,\ p_{in_i})^T$, $\boldsymbol{C}_i$ は非負定値対称行列である。

3.3 節で定義したベクトル $\bar{\boldsymbol{d}}_i$ と行列 $\boldsymbol{G}_i$, $\boldsymbol{D}_i$ を用いて，$\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i\leqq\boldsymbol{b}_0$ なる

任意の $\boldsymbol{b}_i$ に関して (47) を m 個の部分問題に分割すると次のようになる。

$$\text{Max.}\ \ f_i(\boldsymbol{x}_i)=\boldsymbol{p}_i^T\boldsymbol{x}_i-1/2\,\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_i \tag{48a}$$

$$\text{Sub. to}\ \ \boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}_i\leqq\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i \tag{48b}$$

$$\boldsymbol{x}_i\geqq\boldsymbol{0} \tag{48c}$$

これの Lagrange 関数を次のように定義する。

$$L_i(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{u}_i)\triangleq\boldsymbol{p}_i^T\boldsymbol{x}_i-1/2\,\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{u}_i^T(\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}_i-(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i)) \tag{49}$$

Kuhn-Tucker の条件において,

$$\partial L_i/\partial\boldsymbol{x}_i=\boldsymbol{p}_i-\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_i-\boldsymbol{G}_i^T\boldsymbol{u}_i=-\mu_i$$

とおくと，最適条件は次のようになる。

$$\boldsymbol{x}_i\geqq\boldsymbol{0},\ \boldsymbol{u}_i\geqq\boldsymbol{0} \tag{50a}$$

$$\boldsymbol{G}_i\boldsymbol{x}_i-\bar{\boldsymbol{d}}_i-\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{0} \tag{50b}$$

$$\boldsymbol{C}_i\boldsymbol{x}_i-\mu_i+\boldsymbol{G}_i^T\boldsymbol{u}_i=\boldsymbol{p}_i \tag{50c}$$

$$\boldsymbol{x}_i^T\boldsymbol{u}_i=0 \tag{50d}$$

ここで，$\mu_i=(\mu_{i1},\ldots,\mu_{in_i})^T$ である。

条件 (50) が成り立つような $\bar{\boldsymbol{x}}_i$ と $\bar{\boldsymbol{u}}_i$ が存在するものと仮定する。$\bar{\boldsymbol{x}}_i$ の基底変数を $\bar{\boldsymbol{x}}_{B_i}$，非基底変数を $\bar{\boldsymbol{x}}_{N_i}$ とする。μ_i，$\boldsymbol{p}_i$，$\boldsymbol{G}_i$，$\boldsymbol{C}_i$ についても同様に $(\mu_{B_i}^T,\mu_{N_i}^T)^T$，$(\boldsymbol{p}_{B_i}^T,\boldsymbol{p}_{N_i}^T)^T$，$\boldsymbol{G}_i=(\boldsymbol{B}_i,\boldsymbol{N}_i)$，$\boldsymbol{C}_i=((\boldsymbol{C}_{i11},\boldsymbol{C}_{i12})^T,(\boldsymbol{C}_{i12},\boldsymbol{C}_{i22})^T)$ とする。これらを用いて (50) を書き換えると次のようになる。

$$\boldsymbol{C}_{i11}\bar{\boldsymbol{x}}_{B_i}+\boldsymbol{C}_{i12}\bar{\boldsymbol{x}}_{N_i}-\mu_{B_i}+\boldsymbol{B}_i^T\bar{\boldsymbol{u}}_i=\boldsymbol{p}_{B_i} \tag{51a}$$

$$\boldsymbol{C}_{i21}\bar{\boldsymbol{x}}_{B_i}+\boldsymbol{C}_{i22}\bar{\boldsymbol{x}}_{N_i}-\mu_{N_i}+\boldsymbol{N}_i^T\bar{\boldsymbol{u}}_i=\boldsymbol{p}_{N_i} \tag{51b}$$

$$\boldsymbol{B}_i\bar{\boldsymbol{x}}_{B_i}+\boldsymbol{N}_i\bar{\boldsymbol{x}}_{N_i}=\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i \tag{51c}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{B_i}\mu_{B_i}+\bar{\boldsymbol{x}}_{N_i}\mu_{N_i}=0 \tag{51d}$$

$$\bar{\boldsymbol{x}}_i\geqq\boldsymbol{0},\ \bar{\boldsymbol{u}}_i\geqq\boldsymbol{0} \tag{51e}$$

相補条件 (51d) より，$\bar{\boldsymbol{x}}_{B_i}\geqq\boldsymbol{0}$，$\bar{\boldsymbol{x}}_{N_i}=\boldsymbol{0}$，$\mu_{B_i}=\boldsymbol{0}$，$\mu_{N_i}\geqq\boldsymbol{0}$ であるので，(51 a) より

$$\bar{\boldsymbol{x}}_{B_i}=\boldsymbol{C}_{i11}^{-1}(\boldsymbol{p}_{B_i}-\boldsymbol{B}_i^T\bar{\boldsymbol{u}}_i)\geqq\boldsymbol{0}$$

これと (51c) から

$$\bar{\boldsymbol{u}}_i=\boldsymbol{B}_i^{T^{-1}}(\boldsymbol{p}_{B_i}-\boldsymbol{C}_{i11}\boldsymbol{B}_i^{-1}(\bar{\boldsymbol{d}}_i+\boldsymbol{D}_i\boldsymbol{b}_i)) \tag{52}$$

したがって，

$$\bar{x}_{B_i}=B_i^{-1}(\bar{d}_i+D_i b_i) \tag{53}$$

他方，(51b) と (52)，(53) より

$$C_{i21}\{B_i^{-1}(\bar{d}_i+D_i b_i)\}-\mu_{N_i}+N_i^T\{B_i^{T^{-1}}(p_{B_i}-C_{i11}B_i^{-1}(\bar{d}_i+D_i b_i)\}=p_{N_i}$$

ゆえに，

$$\bar{\mu}_{N_i}=-p_{N_i}+N_i^T B_i^{T^{-1}}p_{B_i}+(C_{i21}-N_i^T B_i^{T^{-1}}C_{i11})B_i^{-1}(\bar{d}_i+D_i b_i) \tag{54}$$

いま，$B_i^{-1}(\bar{d}_i+D_i b_i)=\hat{d}_i+\hat{D}_i b_i$, $\hat{d}_i=B_i^{-1}\bar{d}_i$, $\hat{D}_i=B_i^{-1}D_i$ とおくと，

$$\bar{u}_i=B_i^{T^{-1}}p_{B_i}-B_i^{T^{-1}}C_{i11}\hat{d}_i-B_i^{T^{-1}}\hat{D}_i b_i=\hat{p}_i+\hat{P}_i b_i$$

$$\mu_{N_i}=-p_{N_i}+N_i^T B_i^{T^{-1}}p_{B_i}+(C_{i21}-N_i^T B_i^{T^{-1}}C_{i11})\bar{d}_i$$
$$+(C_{i21}-N_i^T B_i^{T^{-1}}C_{i11})\hat{D}_i b_i=q_i+Q_i b_i$$

ここで，　$\hat{p}_i=B_i^{T^{-1}}(p_{B_i}-C_{i11}\hat{d}_i)$, $\hat{P}_i=-B_i^{T^{-1}}D_i$, $q_i=-p_{N_i}+N_i^T B_i^{T^{-1}}p_{B_i}+(C_{i21}-N_i^T B_i^{T^{-1}}C_{i11})\hat{d}_i$, $Q_i=(C_{i21}-N_i^T B_i^{T^{-1}}C_{i11})\hat{D}_i$ である。

以上の結果を用いて，目的関数 (48a) を書き換えると次のようになる。

$$f_i(x_i(b_i))=f_i(b_i)=p_{B_i}^T\hat{d}_i-1/2\,\hat{d}_i^T C_{i11}\hat{d}_i+p_{B_i}^T\hat{D}_i b_i$$
$$-1/2\,\hat{d}_i^T C_{i11}\hat{D}_i b_i-1/2\,\hat{d}_i^T C_{i11}\hat{D}_i b_i-1/2\,b_i^T\hat{D}_i^T C_{i11}\hat{D}_i b_i$$
$$=F_{\max i}-F_{1i}b_i-1/2\,b_i^T F_{2i}b_i \tag{55}$$

ここで，

$$F_{\max i}=p_{B_i}^T\hat{d}_i-1/2\,\hat{d}_i^T C_{i11}\hat{d}_i,\ F_{1i}=-p_{B_i}^T\hat{D}_i+\hat{d}_i^T C_{i11}\hat{D}_i,\ F_{2i}=\hat{D}_i^T C_{i11}\hat{D}_i$$

である。C_{i11} は非負定値対称行列であるので，F_{2i} も非負定値対称行列となる。したがって，$f_i(b_i)$ も凹関数となる。

パラメータ b_i を変化させたとき，$\hat{d}_i+\hat{D}_i b_i\geq 0$ の不等号が成り立たないような要素が生じれば，μ_{B_i} の中で対応する要素と基底変換される。他方，$q_i+Q_i b_i\geq 0$ の不等号が成り立たない場合であれば，$\bar{x}_{N_i}$ の中で対応する要素と基底変換される。このように b_i を変化させれば，前節の線形の場合と同様にいくつかの b_i の領域とそれに対応する最適基底解を得ることができる。したがって，前節と同様の展開によって2次計画問題である場合の資源配分型統合問題を解くことができる

4.2 許容方向法

この節以後では，問題 (1) で表わされる非線形の場合を対象とする。本節で取りあげる許容方向法は，ある実行可能性の制約条件のもとで，$\sum_{i=1}^{m} z_i$ の方向導関数を最大にする配分資源 $\boldsymbol{b}_i$ の方向 $\boldsymbol{s}_i$ を発見する方法である。z_i の方向導関数 $z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \boldsymbol{s}_i)$ を次式で定義する。

$$z_i'(\boldsymbol{b}_i; \boldsymbol{s}_i) \triangleq \lim_{t\downarrow 0}\{z_i(\boldsymbol{b}_i+t\boldsymbol{s}_i)-z_i(\boldsymbol{b}_i)\}/t \tag{56}$$

z_i は有限であると仮定する。以下に Geoffrion と Silverman がそれぞれ提案した方法を述べる。

a)　Geoffrion の方法 [3]　　原問題 (1) の実行可能解 $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ が存在すると仮定する。z_i と $Z(\boldsymbol{b})(=\sum_{i=1}^{m} z_i(\boldsymbol{b}_i))$ の定義域をそれぞれ ω_i, Ω とし，$\boldsymbol{s}=(\boldsymbol{s}_1^T,\ldots, \boldsymbol{s}_m^T)^T$ とする。もし，

$$\hat{\boldsymbol{b}}+\alpha\boldsymbol{s}\in\Omega,\ \text{for all}\ 0<\alpha\leqq\varepsilon \tag{57}$$

が成り立つような ε が存在すれば，方向 $\boldsymbol{s}$ は $\hat{\boldsymbol{b}}\in\Omega$ で実行可能である。この方向が

$$Z(\hat{\boldsymbol{b}}+\alpha\boldsymbol{s})>Z(\hat{\boldsymbol{b}}),\ \text{for all}\ 0<\alpha\leqq\varepsilon \tag{58}$$

であれば，$\hat{\boldsymbol{b}}\in\Omega$ において $Z(\hat{\boldsymbol{b}})$ に対して使用可能である。$\boldsymbol{s}$ が任意の $\alpha>0$ に対して実行可能であるためには，

$$\hat{\boldsymbol{b}}_i+\alpha\boldsymbol{s}_i\in\omega_i,\ i=1,\ldots, m\ \ \text{かつ}\ \ \sum_{i=1}^{m}(\hat{\boldsymbol{b}}_i+\alpha\boldsymbol{s}_i)\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{59}$$

が成り立つ必要がある。式の後半より

$$\alpha\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{s}_i\leqq\boldsymbol{b}_0-\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i \tag{60}$$

を得る。上式右辺が零となるような成分が存在すれば，そのような成分に対応する制約式は，任意の $\boldsymbol{s}_i$ に対して成り立たなくなる。したがって，そのような方向に $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ を増加させることはできない。このような $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ が境界上に存在する制約式の集合を $T=\{j\,|\,b_{0j}-\sum_{i=1}^{m}\hat{b}_{ij}=0\}$ とする。$\boldsymbol{s}$ が実行可能であるためには，$\sum_{i=1}^{m}s_{ij}\leqq 0,\ j\in T$ でなければならない。したがって，方向発見問題は次のようになる。

$$\text{Max.}\ \sum_{i=1}^{m} z_i'(\hat{\boldsymbol{b}}_i;\ \boldsymbol{s}_i) \tag{61a}$$

$$\text{Sub. to}\ \sum_{i=1}^{m}s_{ij}\leqq 0,\ j\in T \tag{61b}$$

$$-1 \leqq s_{ij} \leqq 1, \text{ for all } i, j \tag{61c}$$

(61a) を陽的に表わすことを考える。原問題 (1) の Lagrange 関数は次のようである。

$$L_i(\boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{u}_i, \boldsymbol{v}_i) = f_i(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{u}_i^T(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) - \hat{\boldsymbol{b}}_i) + \boldsymbol{v}_i^T(\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{d}_i)$$

ここで，$\boldsymbol{u}_i = (u_{i1}, \ldots, u_{il})^T$, $\boldsymbol{v}_i = (v_{i1}, \ldots, v_{ip_i})^T$ である。すべての最適 Lagrange 乗数 $\boldsymbol{u}_i^*$ の集合を Λ_i とする。Λ_i は非空であり，かつ，

$$z_i'(\hat{\boldsymbol{b}}_i; \boldsymbol{s}_i) = \min_{\boldsymbol{u}_i \in \Lambda_i}(-\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_i), \text{ for all } \boldsymbol{s}_i \in E^l \tag{62}$$

が成り立つ。また Λ_i は次の線形計画問題の最適解の $\boldsymbol{u}_i$ に関する部分集合と等価である。

$$\text{Max.} \quad \boldsymbol{u}_i^T(\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) - \hat{\boldsymbol{b}}_i) + \boldsymbol{v}_i^T(\boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{d}_i) \tag{63a}$$

$$\text{Sub. to} \quad \nabla \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)^T \boldsymbol{u}_i + \nabla \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)^T \boldsymbol{v}_i = -\nabla f_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{63b}$$

$$\boldsymbol{u}_i \geqq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v}_i \geqq \boldsymbol{0} \tag{63c}$$

以上のことから方向導関数は次の問題の最適値に等しい。

$$\text{Min.} \quad -\boldsymbol{u}_i^T \boldsymbol{s}_i \tag{64a}$$

$$\text{Sub. to} \quad \nabla \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)^T \boldsymbol{u}_i + \nabla \boldsymbol{h}_i(\boldsymbol{x}_i)^T \boldsymbol{v}_i = -\nabla f_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{64b}$$

$$\boldsymbol{u}_i \geqq \boldsymbol{0}, \quad \boldsymbol{v}_i \geqq \boldsymbol{0} \tag{64c}$$

$\boldsymbol{s}_i$ を任意の値に固定した (64) の双対問題は次のようになる。

$$\text{Max.} \quad -\nabla f_i(\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{w}_i \tag{65a}$$

$$\text{Sub. to} \quad \nabla g_{ij}(\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{w}_i \geqq -s_{ij}, \quad j \in \{j \mid g_{ij}(\boldsymbol{x}_i) - \hat{b}_{ij} = 0\} \tag{65b}$$

$$\nabla h_{ij}(\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{w}_i \geqq 0, \quad j \in \{j \mid h_{ij}(\boldsymbol{x}_i) - d_{ij} = 0\} \tag{65c}$$

したがって，固定された $\boldsymbol{s}_i$ に対して方向導関数は次のようになる。

$$\textstyle\sum_{i=1}^m z_i'(\hat{\boldsymbol{b}}_i; \boldsymbol{s}_i) = \sum_{i=1}^m \max\{-\nabla f_i(\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{w}_i, \text{ Sub. to}(65\text{b}), (65\text{c})\} \tag{66}$$

この式を用いて方向発見問題 (61) を書き換えると次のようになる。

$$\text{Max.} \quad -\textstyle\sum_{i=1}^m \nabla f_i(\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{w}_i \tag{67a}$$

$$\text{Sub. to} \quad \textstyle\sum_{i=1}^m s_{ij} \leqq 0, \quad j \in T \tag{67b}$$

$$\nabla g_{ij}(\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{w}_i \geqq -s_{ij}, \quad j \in \{j \mid g_{ij}(\boldsymbol{x}_i) - \hat{b}_{ij} = 0\} \tag{67c}$$

$$\nabla h_{ij}(\boldsymbol{x}_i) \boldsymbol{w}_i \geqq 0, \quad j \in \{j \mid h_{ij}(\boldsymbol{x}_i) - d_{ij} = 0\} \tag{67d}$$

$$-1 \leqq s_{ij} \leqq 1, \quad \text{for all } i, j \tag{67e}$$

このようにして方向 $\boldsymbol{s}$ が定まると，次にステップ巾 α を決定しなければならない。これは次の凸1次計画問題を解くことによって得ることができる。

$$\text{Max.}\quad Z(\boldsymbol{b}+\alpha\boldsymbol{s}) \tag{68a}$$

$$\text{Sub. to}\quad \sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{b}_i+\alpha\boldsymbol{s}_i)\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{68b}$$

$$\boldsymbol{b}_i+\alpha\boldsymbol{s}_i\in\omega_i,\ i=1,\dots,m \tag{68c}$$

もし方向発見問題 (67) の最適解が零であれば，そのときの $\boldsymbol{b}_i$ は主問題 (3) の解である。

b) Silverman の方法 [4]　Geoffrion の許容方向法では，z_i の性質が明確にされていず，また ω_i を求めていない。Silverman はこれらを明らかにし，z_i と ω_i を利用した許容方向法を提案している。

Λ_i は Lagrange 乗数 $\boldsymbol{u}_i$ の集合で非空の凸多面体である。Λ_i の端点を $\boldsymbol{u}_i^\sigma$, $\sigma=1,\dots,\kappa$ で表わせば，$\omega_{i\sigma}$ は (62) より次のようになる。

$$\omega_{i\sigma}=\{\boldsymbol{s}_i\in E^l\,|\,\max_{\boldsymbol{u}_i\in\Lambda_i}(-\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{s}_i)=-\boldsymbol{u}_i^{\sigma T}\boldsymbol{s}_i\} \tag{69}$$

方向導関数 z_i' は $\omega_{i\sigma}$ 上で $\boldsymbol{s}_i$ について傾きが $-\boldsymbol{u}_i^\sigma$ の線形関数である。$\boldsymbol{s}_i\in\omega_{i\sigma}$ であるための必要十分条件は，

$$-\boldsymbol{u}_i^{\sigma T}\boldsymbol{s}_i\leqq-\boldsymbol{u}_i^T\boldsymbol{s}_i,\quad \text{for all}\quad \boldsymbol{u}_i\in\{\boldsymbol{u}_i^\sigma\} \tag{70}$$

これより，

$$\boldsymbol{H}_{i\sigma}\boldsymbol{s}_i\geqq\boldsymbol{0} \tag{71}$$

を得る。ここで，$\boldsymbol{H}_{i\sigma}=((\boldsymbol{u}_i^\sigma-\boldsymbol{u}_i^1)^T,\dots,(\boldsymbol{u}_i^\sigma-\boldsymbol{u}_i^\kappa)^T)^T$ である。したがって，

$$\omega_{i\sigma}=\{\boldsymbol{s}_i\,|\,\boldsymbol{H}_{i\sigma}\boldsymbol{s}_i\geqq\boldsymbol{0}\} \tag{72}$$

と書くことができる。$\omega_{i\sigma}$ は有限個の半空間の共通部分であり，かつ凸多面錐である。この凸多面錐を形成するベクトルの有限集合 $\{\gamma_{i\xi}^\sigma\}_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}$ が存在する。このベクトルを用いると，

$$\omega_{i\sigma}=\{\boldsymbol{s}_i\,|\,\boldsymbol{s}_i=\sum_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}\beta_{i\xi}\gamma_{i\xi}^\sigma,\ \beta_{i\xi}\geqq0\} \tag{73}$$

と書くことができる。さらに $\boldsymbol{s}_i\in\omega_{i\sigma}$ に対して，

$$z_i'(\boldsymbol{b}_i;\,\boldsymbol{s}_i)=-\boldsymbol{u}_i^{\sigma T}\boldsymbol{s}_i=-\sum_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}\beta_{i\xi}z_i'(\boldsymbol{b}_i;\,\gamma_{i\xi}^\sigma) \tag{74}$$

を得る。このようなベクトルは“基本提案 (basic proposal)”と呼ばれている。

ところで，Silverman が定式化した方向発見問題は次のようである。

$$\text{Max.}\ \sum_{i=1}^{m} z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \boldsymbol{s}_i) \tag{75a}$$

$$\text{Sub. to}\ \sum_{i=1}^{m}(\boldsymbol{b}_i+\boldsymbol{s}_i)\leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{75b}$$

$$\boldsymbol{s}_i\leqq \boldsymbol{a},\quad i=1,\dots,m \tag{75c}$$

基本提案を用いてこの問題を書き換えると次のようになる。

$$\text{Max.}\ \sum_{i=1}^{m} z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \sum_{\sigma\xi}\beta_{i\xi}\gamma_{i\xi}^{\sigma}) \tag{76a}$$

$$\text{Sub. to}\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{\kappa}\sum_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}\beta_{i\xi}\gamma_{i\xi}^{\sigma}\leqq \boldsymbol{b}_0-\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i \tag{76b}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\kappa}\sum_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}\beta_{i\xi}\gamma_{i\xi}^{\sigma}\leqq \boldsymbol{a},\quad i=1,\dots,m \tag{76c}$$

$$\beta_{i\xi}\geqq 0 \tag{76d}$$

z_i' は $\omega_{i\sigma}$ 上で線形であったので，$\beta_{i\xi}$ が次の許容内挿制約 (Admissible Interpolation Constraint: AIC) を満しており，かつそのときのみ

$$z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \sum_{\sigma\xi}\beta_{i\xi}\gamma_{i\xi}^{\sigma})=\sum_{\sigma\xi}\beta_{i\xi}z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \gamma_{i\xi}^{\sigma}) \tag{77}$$

が成り立つ。

(AIC)：任意の $i,\ \xi_1,\ \xi_2$ に対して，

$\beta_{i\xi_1}\cdot\beta_{i\xi_2}>0\longrightarrow \gamma_{i\xi_1}^{\sigma}\in\omega_{i\sigma}$ かつ $\gamma_{i\xi_2}^{\sigma}\in\omega_{i\sigma}$

であるような σ が存在し，かつそのときのみ非負の $\beta_{i\xi}$ は AIC を満すという。

これは，$\gamma_{i\xi_1}^{\sigma}$ と $\gamma_{i\xi_2}^{\sigma}$ が同一錐に属していれば，非負の線形結合 $\beta_{i\xi_1}z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \gamma_{i\xi_1}^{\sigma})+\beta_{i\xi_2}z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \gamma_{i\xi_2}^{\sigma})$ が $z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \beta_{i\xi_1}\gamma_{i\xi_1}^{\sigma}+\beta_{i\xi_2}\gamma_{i\xi_2}^{\sigma})$ に等しいことを意味している。

ところで，$z_i'(\boldsymbol{b}_i;\ \gamma_{i\xi}^{\sigma})=c_{i\xi}^{\sigma}$ とおくと，(76) は次の問題と等価になる。

$$\text{Max.}\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{\kappa}\sum_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}c_{i\xi}^{\sigma}\beta_{i\xi} \tag{78a}$$

$$\text{Sub. to}\ \sum_{i=1}^{m}\sum_{\sigma=1}^{\kappa}\sum_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}\beta_{i\xi}\gamma_{i\xi}^{\sigma}\leqq \boldsymbol{b}_0-\sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i \tag{78b}$$

$$\sum_{\sigma=1}^{\kappa}\sum_{\xi=1}^{J_{i\sigma}}\beta_{i\xi}\gamma_{i\xi}^{\sigma}\leqq \boldsymbol{a},\quad i=1,\dots,m \tag{78c}$$

$$\beta_{i\xi}\geqq 0 \tag{78d}$$

これを再配分問題と呼ぶことにする。

定理 5　$\boldsymbol{b}_i^*$ が主問題 (3) の実行可能解であれば，再配分問題 (78) は有限な最適解 $\beta_{i\xi}^*$ をもち，かつ

(1)　再配分問題の任意の解は AIC を満す。

(2)　$\sum_{i\sigma\xi} c^{\sigma}_{i\xi}\beta_{i\xi}=0$ であれば，$\boldsymbol{b}^*_i$ は (78) を最適にし，$\boldsymbol{x}^*_i$ は原問題 (1) を解く。

以上のことから，z_i は $c^{\sigma}_{i\xi}$ と基本提案 $\boldsymbol{s}_i$ の非負の線形結合によって表わされる方向導関数で近似できる。また最適解は z'_i が零に等しくなったときに得られる。

4.3　接線近似法 [3]

接線近似法は，任意の $\boldsymbol{b}_i$ に対する z_i の線形支持関数を用いて z_i を近似する方法である。部分問題 (2) が実行可能解を持つという仮定のもとに次の定理が成り立つ。

定理 6　部分問題 (2) が最適解 $\boldsymbol{x}^*_i$ と最適な Lagrange 乗数 $\boldsymbol{u}^*_i$ を持つような $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ が存在するとする。そのとき，

$$f_i(\boldsymbol{x}^*_i)-\boldsymbol{u}^{*T}_i(\boldsymbol{b}_i-\hat{\boldsymbol{b}}_i) \tag{79}$$

は，すべての $\boldsymbol{b}_i$ に対して $z_i(\hat{\boldsymbol{b}}_i)\geqq f_i(\boldsymbol{x}^*_i)-\boldsymbol{u}^{*T}_i(\boldsymbol{b}_i-\hat{\boldsymbol{b}}_i)$ であるような $\hat{\boldsymbol{b}}_i$ における z_i の線形支持関数である。

次の仮定をおく。

(A5)　$f_i(\boldsymbol{x}^*_i)$, $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}^*_i)$ は上半連続関数である。

(A6)　すべての $\boldsymbol{b}_i\in Y_i$ に対して，部分問題 (2) は $\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\leqq\boldsymbol{b}_i$ に関する Lagrange 乗数をもつ。

この仮定のもとに，次の系が成立する。

系 7　A5, A6 が保証されているならば，そのときすべての $\boldsymbol{b}_i\in Y_i$ に対して，

$$z_i(\boldsymbol{b}_i)=\max_{\boldsymbol{b}_i\in Y_i}\{z_i(\hat{\boldsymbol{b}}_i)-\boldsymbol{u}^T_i(\boldsymbol{b}_i-\hat{\boldsymbol{b}}_i)\} \tag{80}$$

である。

最適 Lagrange 乗数 $\boldsymbol{u}^*_i$ が Y_i におけるいくつかの点 $\boldsymbol{b}^{\sigma}_i$, $\sigma=1,\ldots,\nu$ に対して存在すれば，z_i に対する近似関数は次のような区間線形関数となる。

$$z^{\nu}_i=\min_{0\leqq\sigma\leqq\nu}\{z_i(\boldsymbol{b}^{\sigma}_i)-\boldsymbol{u}^{\sigma T}_i(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}^{\sigma}_i)\} \tag{81}$$

これを用いた主問題 (3) は，次の問題と等価である。

$$\text{Max.}\quad \sum_{i=1}^{m}\rho_i \tag{82a}$$

$$\text{Sub. to}\quad \sum_{i=1}^{m}\boldsymbol{b}_i\leqq\boldsymbol{b}_0 \tag{82b}$$

$$\boldsymbol{b}_i \in Y_i,\ i=1,\dots,m \tag{82c}$$

$$\rho_i \geqq z_i(\boldsymbol{b}_i^\sigma)-\boldsymbol{u}_i^{\sigma T}(\boldsymbol{b}_i-\boldsymbol{b}_i^\sigma),\ \sigma=1,\dots,\nu,\ i=1,\dots,m \tag{82d}$$

計算は，部分問題を解いてその解を用いて (82) を解き，その結果を用いて部分問題を解くという繰り返し計算を行い最適解ないし近似最適解を得る。繰り返しの停止基準は次のようである。

$$\textstyle\sum_{i=1}^m z_i^\nu(\boldsymbol{b}_i^{\nu+1})-\max_{0\leq\sigma\leq\nu}\{\sum_{i=1}^m z_i(\boldsymbol{b}_i^{\nu+1})\}\leqq\varepsilon,\ 1\gg\varepsilon>0 \tag{83}$$

(82) で (82c) 以外は線形であるので，問題は Y_i の取り扱いである。それには，Y_i を陽的に表わす場合と，外側あるいは内側の線形化近似がある。

a) Y_i を陽的に表わす。1次元の場合は，X_i 上の $\boldsymbol{b}_i \geqq \max \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ と $\boldsymbol{b}_i \in Y_i$ が等価である。2次元の場合は，A5 のもとに $\boldsymbol{g}_i$ の端点であるような $\boldsymbol{x}_i \in X_i$ に対して，$\boldsymbol{b}_i \in Y_i$ でありかつそのときのみ $\boldsymbol{b}_i \geq \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ である。ここで，$\boldsymbol{g}_i$ の端点とは不等式 $\boldsymbol{g}_i(\hat{\boldsymbol{x}}_i) \geq \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ が成り立つような点 $\hat{\boldsymbol{x}}_i \in X_i$ が存在しない点 $\boldsymbol{x}_i \in X_i$ である。3次元の場合，X_i が凸多面体，$\boldsymbol{g}_i$ が線形であれば，(82) は結合制約式 (82b) を持つ角構造線形計画問題となる。

b) 外側線形化　　この方法は，任意の $\boldsymbol{b}_i \in Y_i$ に関する支持半空間を考えることによって Y_i を近似する。Y_i の支持半空間について次の定理が成り立つ。

定理 8　$\boldsymbol{b}_i$ が線形制約

$$\lambda_i^T \boldsymbol{b}_i \leqq \max_{\boldsymbol{x}_i\in X_i} \lambda_i^T \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i),\ \text{for all}\ \lambda_i \tag{84}$$

を満し，かつそのときのみ $\boldsymbol{b}_i \in Y_i$ である。ここで，$\lambda_i \in \{\lambda_i \in R^l \mid \sum_{i=1}^m \lambda_i = \mathbf{1},\ \lambda_i \geqq \mathbf{0}\}$ である。さらに (84) のすべての制約式は Y_i の支持半空間を与える。

(84) によって形成される支持半空間

$$R_i(\lambda_i)=\{\boldsymbol{b}_i \mid \lambda_i^T \boldsymbol{b}_i \leqq \max_{\boldsymbol{x}_i\in X_i} \lambda_i^T \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)\} \tag{85}$$

は Y_i を含み，点 $\boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i(\lambda_i)) \in Y_i$ において Y_i と接している。ここで，$\boldsymbol{x}_i(\lambda_i)=\max_{\boldsymbol{x}_i\in X_i} \lambda_i^T \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ である。

c) 内側線形化　　$\{\boldsymbol{b}_i^1,\ \boldsymbol{b}_i^2,\dots\}$ を Y_i 内の既知の点であるとする。凸多面体 $I_i(\boldsymbol{b}_i)=\{\boldsymbol{b}_i \in R^l \mid \boldsymbol{b}_i \leqq \sum_j \alpha_{ij} \boldsymbol{b}_i^j,\ \text{for some}\ \alpha_{ij} \geqq 0,\ \sum_j \alpha_{ij}=1\}$ は Y_i

に含まれる。これを用いて主問題 (3) を書き改めると次のようになる。

$$\text{Max.}\ \sum_{i=1}^{m} z_i^{\nu}(\boldsymbol{b}_i) \tag{86a}$$

$$\text{Sub. to}\ \sum_{i=1}^{m} \boldsymbol{b}_i \leqq \boldsymbol{b}_0 \tag{86b}$$

$$\boldsymbol{b}_i \leqq \sum_j \alpha_{ij} \boldsymbol{b}_i^j,\ i=1,\ldots,m \tag{86c}$$

$$\sum_j \alpha_{ij}=1,\ \alpha_{ij} \geqq 0,\ i=1,\ldots,m \tag{86d}$$

もし z_i^{ν} を (82a), (82d) のように扱うことができれば，これは結合制約式をもつ角構造線形計画問題となる。そこで Y_i の内側線形化近似に関して次の定理が成り立つ。

定理 9 $\{(\boldsymbol{b}_1^0,\ldots,\boldsymbol{b}_m^0),(\alpha_1^0,\ldots,\alpha_m^0),(\rho_1^0,\ldots,\rho_m^0)\}$ は z_i^{ν} を (82a), (82d) で置き換えた (86) の解で，$\pi_i^0,\ i=1,\ldots,m$ を (86) の最適な双対変数とする。このとき，$\boldsymbol{b}_i^0,\ i=1,\ldots,m$ は $I_i(\boldsymbol{b}_i^0)$ の境界上に存在し，π_i^0 は $I_i(\boldsymbol{b}_i^0)$ の $\boldsymbol{b}_i^0$ を含む支持超平面の法線ベクトルである。

この定理の結果から，π_i^0 を Y_i の支持超平面の法線ベクトルにとり，支持超平面と Y_i の接点を集合 $\{\boldsymbol{b}_i^j\}$ に加える。このようにして形成される $I_i(\boldsymbol{b}_i)$ を用いて Y_i を形成する。新しい $\boldsymbol{b}_i^{j'}$ を得るために，(85) から法線ベクトル π_i^0 をもつ Y_i の支持超平面を線形方程式

$$\pi_i^0 \boldsymbol{b}_i = \max_{x_i \in X_i} \pi_i^0 \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{87}$$

で与える。$\boldsymbol{x}_i^0$ を得るために，凸計画問題 $\text{Max.}_{x_i \in X_i} \pi_i^0 \boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i)$ を解き，$\boldsymbol{b}_i^{j'}=\boldsymbol{g}_i(\boldsymbol{x}_i^0)$ と置くことによって求めることができる。

仮定 A6 が成り立たない場合，境界上の任意のベクトルを内点へ摂動すればよい。すなわち，境界上の $\boldsymbol{b}_i$ を少し内側に摂動すれば $(\boldsymbol{b}_i+\varepsilon \in \text{int}\, Y_i)$ となり，必ず最適 Lagrange 乗数が存在する。もし ε を零に近づけることができれば，その極限値として境界上の最適値を得ることができる。

5. 結 言

以上に概括した資源配分型統合問題は，2 章でも指摘したように z_i や Y_i を陽的に表わすことが困難で，さらに z_i がいたるところで微分不可能であるという問題を持っている。これを解決するために，任意の $\boldsymbol{b}_i$ に対する z_i と

Y_i のみを対象としたり，近似的に求めたりしている。しかしながら，3.3節や4.1節で述べたように $\boldsymbol{b}_i$ をパラメータとしたマルチパラメトリック問題を解くことができれば，□ や Y_i を比較的容易に求めることができる。モデルが線形の場合には3.3節のように解くことができ，非線形の場合でも限定された2次計画であれば4.1節のように解くことができる。一般の非線形の場合には，パラメータが単一の場合のパラメトリック法 [11, 12] が提案されているが，それ以外についてはまだない。

ここで取りあげた方法以外では，Ruefli [13], Freeland-Baker [14], Davis-Talavage [15] などの目標計画法による方法が提案されている。さらに Whitford-Davis [16], Wolsey [17] などの報告がある。

参考文献

[1] M. G. Singh and A. Titli: *Systems: Decomposition, optimisation and control,* Pergamon Press, pp. 127–198, (1978).

[2] 松田，中野：多階層システムにおける3つの統制パターン，経営科学，15巻，2号，pp. 94–105, (1971).

[3] A. M. Geoffrion: Primal Resource-Directive Approaches for Optimizing Nonlinear Decomposable Systems, *Operations Research,* Vol. 18, No. 3, pp. 375–403, (1970).

[4] G. J. Silverman: Primal Decomposition of Mathematical Programs by Resource Allocation: I- Basic theory and a direction-finding procedure, *Operations Research,* Vol. 20, No. 1, pp. 58–74, (1972).

[5] J. Kornai and T. Lipták: Two-Level Planning, *Econometrica,* Vol. 33, No. 1, pp. 141–169, (1965).

[6] A. ten Kate: Decomposition of Linear Programs by Direct Distribution, *Econometrica,* Vol. 40, No. 5, pp. 883–898, (1972).

[7] 鈴木：線形計画法におけるいくつかの分解原理について，オペレーションズ・リサーチ，21巻，2号，pp. 704–710, (1976).

[8] 奥田：資源配分による統合問題の解析，システムと制御（投稿中）.

[9] T. Gal: *Postoptimal Analyses, Parametric Programming, and Related Topics,* McGraw-Hill, pp. 76–171, (1979).

[10] 福島：非線形最適化の理論，産業図書，pp. 139–152, (1980).

[11] H. Mine, M. Fukushima, and Y. J. Ryang: Parametric Nonlinear Programming for General Cases and Its Application to Some Problems, *Mem. Fac. Eng. Kyoto Univ.,* Vol. 40, Part 3, pp. 198–211, (1978).

[12] A. V. Fiacco: *Introduction to Sensitivity and Stability Analysis in Nonlinear Programming*, Academic Press, (1983).

[13] T. W. Ruefli: A Generalized Goal Decomposition Model, *Management Science*, Vol. 17, No. 8, pp. B505–B518, (1971).

[14] J. R. Freeland and N. R. Baker: Goal Partitioning in a Hierarchical Organization, *OMEGA*, Vol. 3, No. 6, pp. 673–688, (1975).

[15] W. Davis and J. Talavage: Three-Level Models for Hierarchical Coordination, *OMEGA*, Vol. 5, No. 6, pp. 709–720, (1977).

[16] D. T. Whitford and W. J. Davis: A Generalized Hierarchical Model of Resource Allocation, *OMEGA*, Vol. 11, No. 3, pp. 279–291, (1983).

[17] L. A. Wolsey: A Resource Decomposition Algorithm for General Mathematical Programs, *Mathematical Programming Study*, Vol. 14, pp. 244–257, (1981).