

数量設定超ゲームにおいて市場占有率一定の暗黙の協力解を遵守する最大の寡占企業数と企業の主観的割引き率の関係について*

鵜 沢 秀

1. はじめに

寡占理論においてクールノー均衡はもっとも良く知られている代表的な解概念の一つである。クールノー均衡の配分は、すべての企業が単独で達成しうる最大の利潤を与えているが、もし、すべての企業が協力 (cooperative) すれば、すべての企業の利潤を大きくする配分が可能であることは知られている。¹⁾ しかしながら、他方、寡占ゲームが一回限りのものであれば、フリードマン [1977, 1983, 1986] などが明らかにしたように、協定を裏切ることにより、協定を裏切った企業はより大きな利潤を獲得できる。

非協力 (non-cooperative) 寡占モデルの枠組の中で、無限回、同一の寡占ゲームが反復される、いわゆる超ゲーム (supergame) を考える。一回の裏切りによる利潤の増分と他企業の報復による将来の利潤の減少分の現在価値を比べることにより、暗黙の協定が成立する条件が存在することをフリードマン [1971, 1977, 1983, 1986] は明らかにした。

ラムソン (Lambson) [1984] は、クールノー寡占ゲームが反復される超ゲームにおいて、企業数 N が大きくなるにつれてゲーム理論におけるフォーク定

原稿受領日：1986年9月30日

* この小論は、昭和60年、61年度文部省特定研究「国際経済摩擦と我が国の産業政策」(主査：吉武清彦小樽商科大学商学部教授)による経費補助を受けて行なった研究成果の一部である。記して感謝する。

1) フリードマン [1971, 1977, 1983, 1986] を見よ。

理²⁾が成立するかどうかを検討した。彼は、需要の増加率が企業数の伸び率と同じで、かつ、クールノー価格の点列が十分大なる企業数 N' よりも大きな企業数 N ($> N'$) に対して、限界費用の上限よりも厳密に高いときに、協力解が非協力均衡として実現されることを証明した。

ここでは、鶴沢 [1986] と異なり、製品差別のない寡占企業モデルを考察する。寡占企業の市場占有率を一定とする共同利潤最大化の解が、超ゲームの枠組の中で、非協力均衡として可能かどうか、また、協定を遵守する最大の企業数は、企業の主観的割引率に依存するかどうかを検討する。以下、第2節で、モデルを提示し、クールノー均衡と市場占有率一定の共同利潤最大の解を求める。第3節で、両者を比較する。第4節で最適裏切り戦略を導出し、第5節で、引きがね戦略 (trigger strategy) 均衡を考察し、市場占有率一定の共同利潤最大の解が引きがね戦略均衡であることを示す。さらに、協定を遵守する最大の企業数が寡占企業の主観的割引率の非増加関数であることが明らかにされる。第6節は、簡単な要約と今後の課題にあてられる。

2. 費用関数、需要関数の特定化とモデル

同一の生産物を生産する n 社の寡占企業を考える。企業 i の費用関数 $C_i(x_i)$ を

$$C_i(x_i) = m_i x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (1)$$

とする。ここで、 x_i は、企業 i の生産量を示し、 m_i は、企業 i の平均 (= 限界) 費用を表わす。また、市場の逆需要関数を

$$p = a - b \left(\sum_{i=1}^n x_i \right) \quad (2)$$

2) フォーク定理の「フォーク」は、「民間伝承」の意味である。1 期間のクールノー・ナッシュ均衡よりもすべての経済主体にとって良い配分が、割引きのない、あるいは、割引きを伴う反復ゲーム (repeated games) の非協力均衡によって実現されるというのがフォーク定理の内容である。この定理は作者不詳であるが、コア (core) 配分が非協力均衡によって実現できることを証明したのはオーマン [1959] である。フリードマン [1986; p. 103] を参照せよ。

とする。ここで、 p は、市場価格を示し、 a 、 b は、ともに正のパラメータである。

$$a - m_i + \sum_{j=1}^n (m_j - m_i) > 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (3)$$

を仮定する。³⁾

企業 i の利潤 $\pi_i(x)$ は、従って、

$$\begin{aligned} \pi_i(x) &\equiv \pi_i(x_i, x_{[i]}) \\ &= px_i - C_i(x_i) \\ &= (a - m_i - b \sum_{j=1}^n x_j) x_i \\ &= (a - m_i - bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j) x_i \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (4) \end{aligned}$$

となる。ここで、 $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ 、 $x_{[i]} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ とする。

企業 i の利潤は、他企業 j の生産量 x_j ($j \neq i$) にも依存していることから明らかなように、どのような行動様式を想定するかによって決定される。ここでは寡占理論において著名なクールノー均衡をまず検討し、次に、企業 i の市場占有率 s_i を一定にした共同利潤最大化の解を検討する。

2. 1 クールノー均衡

寡占企業 i が生産量 x_i を決定するとき、企業 i 以外のすべての企業 j の生産量の組 $x_{[i]} \equiv (x_1, x_2, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n)$ を与件として行動するとき、この寡占企業 i はクールノー的行動様式あるいは、クールノー・ナッシュ戦略を用いるという。すべての企業がクールノー・ナッシュ戦略をもちいるときを考えよう。

定義1 任意の企業 i について、他の企業が x_j^C ($j \neq i$) を生産している場

3) この条件は、クールノー均衡の生産量および利潤がともに正となることを保証する。
(8)および(10)を見よ。

合、企業 i が単独に x_i^C 以外の生産量を生産しても利潤を増加させることができないとき、生産量の組 $x^C \equiv (x_1^C, x_2^C, \dots, x_i^C, \dots, x_n^C)$, 価格 p^C , 利潤の組 $\pi^C \equiv (\pi_1^C, \pi_2^C, \dots, \pi_i^C, \dots, \pi_n^C)$ をクールノー均衡という。

定義 1 を書き換えると,

$$\pi_i(x_i^C, x_{[i]}^C) \geq \pi_i(x_i, x_{[i]}^C) \quad \text{for all } x_i \neq x_i^C \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

が成り立つとき、 x^C は、クールノー均衡の生産量となる。従って、すべての企業 i について、

$$\pi_i(x_i, x_{[i]}) = (a - m_i - bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j) x_i$$

を x_i について最大化することによりクールノー均衡を求めることができる。⁴⁾

$$\frac{\partial \pi_i(x_i, x_{[i]})}{\partial x_i} = a - m_i - 2bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (5)$$

$\sum_{j=1}^n x_j \equiv Q$ とおくと、(5)より

$$x_i + Q = \frac{1}{b}(a - m_i) \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^n x_j + nQ = \frac{1}{b} \sum_{j=1}^n (a - m_j)$$

よって、

$$Q^C = \frac{1}{b(n+1)} \left\{ \sum_{j=1}^n (a - m_j) \right\} \quad (7)$$

(7)を(6)に代入して

$$\begin{aligned} x_i^C &= \frac{1}{b} \left[(a - m_i) - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n (a - m_j) \right] \\ &= \frac{1}{b(n+1)} \left[a - m_i + \sum_{j=1}^n (m_j - m_i) \right] \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (8) \end{aligned}$$

4) 利潤 $\pi_i(x_i, x_{[i]})$ は、生産量 x_i について凹関数であるから、(5)を満たす x^C が、利潤を最大にする。

従って、クールノー均衡の価格 p^C は、(2), (7)より

$$\begin{aligned} p^C &= a - b \sum_{j=1}^n x_j^C \\ &= a - \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^n (a - m_j) \\ &= \frac{1}{n+1} (a + \sum_{j=1}^n m_j) \end{aligned} \quad (9)$$

また、クールノー均衡の利潤 π_i^C は、(4), (8), (9)より

$$\begin{aligned} \pi_i^C(x^C) &= (p^C - m_i) x_i^C \\ &= b(x_i^C)^2 \\ &= \frac{1}{b(n+1)^2} (a - m_i + \sum_{j=1}^n (m_j - m_i))^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \end{aligned} \quad (10)$$

2. 1a すべての企業の費用関数が同一のとき ($m_i = m$ for all i) のクールノー均衡

このとき、クールノー均衡の生産量、価格、利潤は、(8), (9), (10)より、それぞれ、

$$x_i^C = \frac{a - m}{b(n+1)} \quad (8 \text{ a})$$

$$p^C = \frac{a + mn}{n+1} \quad (9 \text{ a})$$

$$\pi_i^C = \frac{1}{b} \left[\frac{a - m}{n+1} \right]^2 \quad (10 \text{ a})$$

となる。

2. 2 企業 i の市場占有率 s_i を一定にした共同利潤最大化の解

定義2 企業 i の市場占有率 s_i が一定のもとで、共同利潤

$$\pi \equiv \sum_{i=1}^n \pi_i(x)$$

を最大にする生産量の組 $x^{JM} \equiv (x_1^{JM}, x_2^{JM}, \dots, x_i^{JM}, \dots, x_n^{JM})$, 価格 p^{JM} , 利潤の組 $\pi^{JM} \equiv (\pi_1^{JM}, \pi_2^{JM}, \dots, \pi_i^{JM}, \dots, \pi_n^{JM})$ を市場占有率一定の共同利潤最大化の解とよぶ。

産業の生産量を Q とすると, 企業 i の市場占有率が s_i であるので,

$$x_i = s_i Q \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (11)$$

となる。さて, 共同利潤 π は, (4), (11)を用いると,

$$\begin{aligned} \pi &\equiv \sum_{i=1}^n \pi_i(x) \\ &= \sum_{i=1}^n [(a - m_i - b \sum_{j=1}^n x_j) x_i] \\ &= \sum_{i=1}^n [s_i(a - m_i) Q - b s_i Q^2] \end{aligned} \quad (12)$$

となる。利潤最大化の一階条件は,⁵⁾

$$\frac{d\pi}{dQ} = \sum_{i=1}^n [s_i(a - m_i) - 2b s_i Q] = 0 \quad (13)$$

$\sum_{i=1}^n s_i = 1$ だから, 産業全体の生産量は,

$$Q^{JM} = \frac{1}{2b} [a - \sum_{i=1}^n s_i m_i] \quad (14)$$

と求まる。従って, 企業 i の生産量は,

$$\begin{aligned} x_i^{JM} &= s_i Q^{JM} \\ &= \frac{s_i}{2b} [a - \sum_{j=1}^n s_j m_j] \end{aligned} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (15)$$

(2), (14)より価格は,

$$\begin{aligned} p^{JM} &= a - b Q^{JM} \\ &= \frac{1}{2} \{a + \sum_{j=1}^n s_j m_j\} \end{aligned} \quad (16)$$

5) (2) より利潤 π は, Q について凹関数であるから (13) を満たす Q^{JM} が利潤最大にする。

よって、(4), (15), (16)より企業 i の利潤は、

$$\begin{aligned}\pi_i^{JM} &= (p^{JM} - m_i) x_i^{JM} \\ &= \left[\frac{1}{2} \left\{ a + \sum_{j=1}^n s_j m_j \right\} - m_i \right] \frac{s_i}{2b} \left(a - \sum_{j=1}^n s_j m_j \right) \\ &= \frac{s_i}{4b} \left(a - 2m_i + \sum_{j=1}^n s_j m_j \right) \left(a - \sum_{j=1}^n s_j m_j \right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (17)\end{aligned}$$

産業全体の利潤は、(17)より ($\sum_{i=1}^n s_i = 1$ を考慮すると)、

$$\begin{aligned}\pi^{JM} &= \sum_{i=1}^n \pi_i^{JM} \\ &= \frac{1}{4b} \left(a - \sum_{j=1}^n s_j m_j \right)^2\end{aligned} \quad (18)$$

である。

2. 2a すべての企業の費用関数が同一のとき ($m_i = m$ for all i) の市場占有率一定の共同利潤最大化の解

このとき、市場占有率一定の共同利潤最大化の解は、(15), (16), (17)より、それぞれ、

$$x_i^{JM} = \frac{s_i}{2b} (a - m) \quad (15 a)$$

$$p^{JM} = \frac{1}{2} (a + m) \quad (16 a)$$

$$\pi_i^{JM} = \frac{s_i}{4b} (a - m)^2 \quad (17 a)$$

$$(i = 1, 2, \dots, n)$$

となる。

3. クールノー均衡と市場占有率一定の 共同利潤最大化の解の比較

技術的に達成可能な利潤の組み合わせの中で効率的なものが利潤可能性フロンティアと呼ばれている。利潤可能性フロンティアは、次のようにして求める

ことができる。

いま、企業 i 以外の寡占企業の利潤の組み合わせ $\pi_{[i]} \equiv (\pi_1, \pi_2, \dots, \pi_{i-1}, \pi_{i+1}, \dots, \pi_n)$ を与えておき、そこで、企業 i の利潤 π_i を最大にするように生産量の組 $x \equiv (x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$ を求める。おのおの指定した $\pi_{[i]}$ に対応して π_i が求まる。 $(\pi_i, \pi_{[i]})$ は、利潤可能性フロンティア上の点になる。

形式的には、次の制約条件つき最大化問題

$$\begin{aligned} \text{Max}_{x_i} \quad & \pi_i(x) \\ \text{subject to} \quad & \pi_j(x) \geq pai_j \quad (j \neq i) \\ & x \geq 0 \end{aligned}$$

の解より求まる利潤の組み合わせが利潤可能性フロンティアを形成する。ただし pai_j はあらかじめ指定した企業 j の利潤の大きさである。

利潤可能性フロンティアを求める別の方法もある。いま、非負のウエイトを α_i ($i = 1, 2, \dots, n$) とおく。ただし、 $\sum_{i=1}^n \alpha_i = 1$ となるように基準化する。

$$\pi = \sum_{i=1}^n \alpha_i \pi_i(x) \quad (19)$$

を最大にする利潤の組み合わせは、ウエイトをかえることにより、利潤可能性フロンティアを表わすことが知られている。

いま、寡占企業の数 n が 2 のときについて後者の方法で利潤可能性フロンティア上の利潤の組み合わせを求めてみよう。(4), (19) より $n = 2$ に注意して利潤最大化の一階条件を求めてみると、

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_1} = \alpha_1(a - m_1 - 2bx_1 - bx_2) - \alpha_2 bx_2 = 0 \quad (20)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial x_2} = \alpha_2(a - m_2 - 2bx_2 - bx_1) - \alpha_1 bx_1 = 0 \quad (21)$$

π は x_1, x_2 に関して凹関数であるから、2階条件は満たされている。

$$\begin{pmatrix} 2\alpha_1 & \alpha_1 + \alpha_2 \\ \alpha_1 + \alpha_2 & 2\alpha_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \frac{1}{b} \begin{pmatrix} \alpha_1(a - m_1) \\ \alpha_2(a - m_2) \end{pmatrix} \quad (22)$$

$\alpha_1 \neq \alpha_2$ のとき、(22)の左辺の行列の逆行列は存在するので、

$$\begin{pmatrix} x_1^F \\ x_2^F \end{pmatrix} = \frac{1}{-(\alpha_1 - \alpha_2)^2 b} \begin{pmatrix} 2\alpha_2 & -(\alpha_1 + \alpha_2) \\ -(\alpha_1 + \alpha_2) & 2\alpha_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1(a - m_1) \\ \alpha_2(a - m_2) \end{pmatrix} \quad (23)$$

が利潤可能性フロンティアをもたらす生産量の組み合わせである。 $x^F \equiv (x_1^F, x_2^F)$ を (4) に代入すれば、 α の関数として利潤の組み合わせ $\pi^F \equiv (\pi_1(x^F), \pi_2(x^F))$ が得られる。

x^F は (23) から明らかになるように、パラメータ α_i, a, b, m_i ($i=1, 2$) に依存している。 x_1^F, x_2^F の市場占有率 s_i^F を計算してみると、

$$s_i^F \equiv \frac{x_i^F}{x_1^F + x_2^F} \quad (23a)$$

(23)を考慮すると、 (α_1, α_2) と市場占有率 (s_1^F, s_2^F) は、(23a) を通じて implicit に関係していることがわかる。

良く知られているように、クールノー均衡は、パレート効率的配分ではない。⁶⁾すなわち、実行可能な配分で、クールノー均衡における利潤よりも大なる利潤をすべての寡占企業にもたらすような配分が技術的に存在する。別の言い方をすれば、クールノー均衡の利潤の組、 $\pi^C \equiv (\pi_1^C, \pi_2^C, \dots, \pi_i^C, \dots, \pi_n^C)$ は、利潤可能性フロンティアの上にはではなく、その内部にある (図1を参照せよ)。

もし、すべての寡占企業が協力的に行動するならば、市場占有率一定の共同利潤最大化の解を実現することができる。しかしながら、次節で示すように、もし、寡占ゲームが一回限りのものであると、すべての寡占企業にとって、他

6) たとえば、フリードマン [1977, pp. 25-26.] [1986, pp. 86-87.] を見よ。

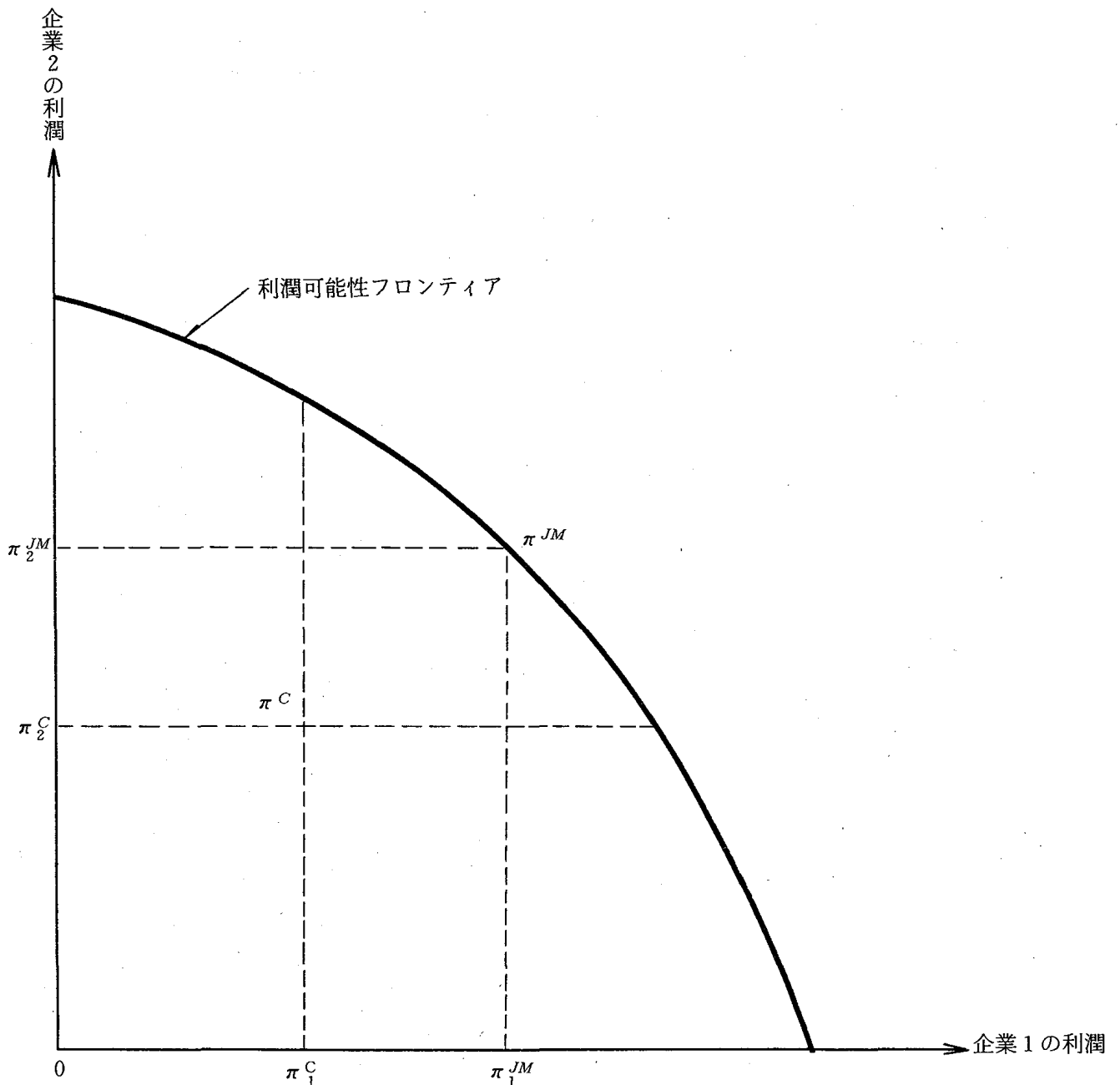


図1 クールノー均衡と市場占有率一定の
共同利潤最大化の解

の企業が協定を遵守するとき協定を裏切ることが利潤増加につながることをわかる。ところが、すべての寡占企業が協定を裏切って非協力的 (non-cooperative) に行動するとき、クールノー均衡が実現される。

協力的 (cooperative) に行動すれば、非協力的に行動するよりも、より多くの利潤を手に入れることができるが、常に裏切ることの誘因が存在している。

クールノー均衡の利潤は、(10)より

$$\pi_i^C(x^C) = \frac{1}{b(n+1)^2} [a - m_i + \sum_{j=1}^n (m_j - m_i)]^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24)$$

また、市場占有率一定の共同利潤最大化の解の利潤は、(17)より

$$\pi_i^{JM} = \frac{s_i}{4b} (a - 2m_i + \sum_{j=1}^n s_j m_j) (a - \sum_{j=1}^n s_j m_j) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (25)$$

従って、協力解成立の条件は、

$$\pi_i^{JM} \geq \pi_i^C(x^C) \quad \text{for all } i \quad (26)$$

(26)を満たす市場占有率 s_i は、(24)、(25)より明らかのように

$$1 > s_i > 0 \quad \text{for all } i \quad (27)$$

となる。

3a 費用関数が同一のときのクールノー均衡と市場占有率一定の共同利潤 最大化の解の比較

(10 a) と (17 a) より

$$\pi_i^C = \frac{1}{b} \left[\frac{a - m}{n + 1} \right]^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (24 a)$$

$$\pi_i^{JM} = \frac{s_i}{4b} (a - m)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (25 a)$$

従って、協力解成立の条件は、

$$\pi_i^{JM} \geq \pi_i^C \quad (26 a)$$

より、

$$\frac{s_i}{4b} (a - m)^2 \geq \frac{1}{b} \left[\frac{a - m}{n + 1} \right]^2$$

従って,⁷⁾

$$s_i \geq \left(\frac{2}{n+1} \right)^2 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (27a)$$

$$\sum_{i=1}^n s_i = 1$$

明らかなように右辺は、費用関数、逆需要関数のパラメータ m , a , b の水準に依存していないことに注意しよう。

例えば、 $n = 2$ のとき

$$s_1 \geq \frac{4}{9}, \quad s_2 \geq \frac{4}{9} \quad (28)$$

$$\sum_{i=1}^2 s_i = 1 \text{ より } \frac{4}{9} \leq s_1 \leq \frac{5}{9}, \quad s_2 = 1 - s_1$$

図2の太線部分が協力解成立のための市場占有率の組み合わせ $s = (s_1, s_2)$ を示す。

$n = 3$ のときは、同様に、(27a) より

$$s_1 \geq \frac{1}{4}, \quad s_2 \geq \frac{1}{4}, \quad s_3 \geq \frac{1}{4}, \quad \sum_{i=1}^3 s_i = 1 \quad (29)$$

を満たす市場占有率の組み合わせ $s = (s_1, s_2, s_3)$ に対して協力解が成立する(図3の斜線部分)。

$n = 2$ および $n = 3$ の場合からも明らかなように、(27a) を満たす、協力解が成立する市場占有率の組み合わせは、一意には決定されないことを指摘しておく。

4. 最適裏切り戦略

前節で指摘したように、もしすべての企業が協力して市場占有率一定の共同

7) (27a) より $\sum_{i=1}^n s_i \geq n \left(\frac{2}{n+1} \right)^2$ 。 $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ だから、 $1 \geq 4n / (n+1)^2$ 。

$(n+1)^2 - 4n = (n-1)^2 \geq 0$ だから、(27a) を満たす市場占有率の組み合わせ $s = (s_1, s_2, \dots, s_i, \dots, s_n)$ は必ず存在する。例えば、均等市場占有率 $s_i = 1/n$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を考えればよい。

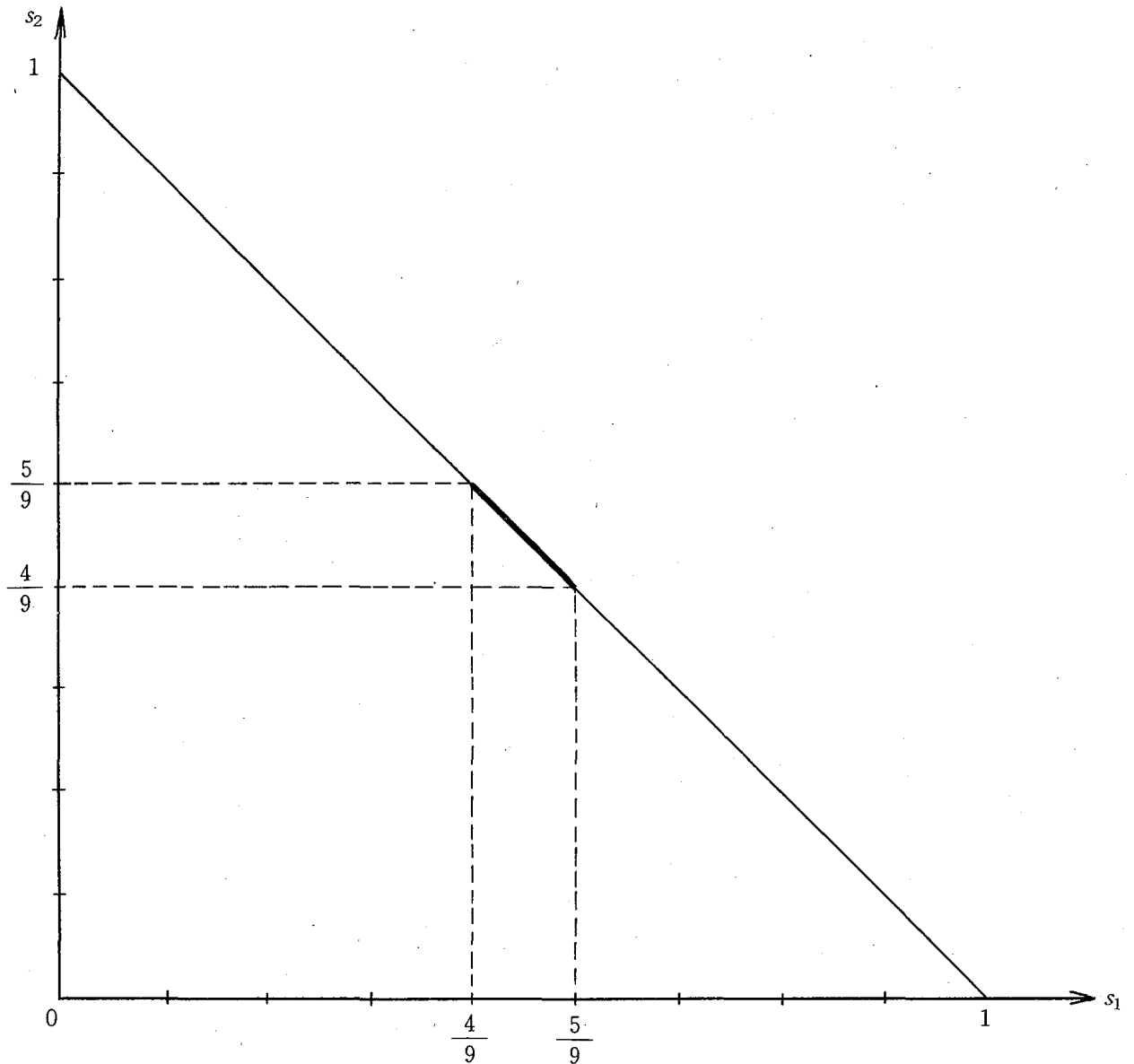


図2 協力解成立のための市場占有率の
組み合わせ $s = (s_1, s_2)$ (太線部分)

利潤最大化の解を実現すれば、そのときの利潤は、クールノー均衡の利潤よりも大きい。しかしながら、企業 i 以外の他の企業 j が x_j^{JM} ($j \neq i$) を生産して市場占有率一定の共同利潤最大化の解を遵守するとき、企業 i は、 x_i^{JM} を生産しないで、裏切って、 $x_i^D \neq x_i^{JM}$ を生産すると利潤を π_i^{JM} より大きくすることができる。⁸⁾

$$\pi_i^D(x_i, x_{[i]}^{JM}) = [a - m_i - bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j^{JM}] x_i \quad (30)$$

より

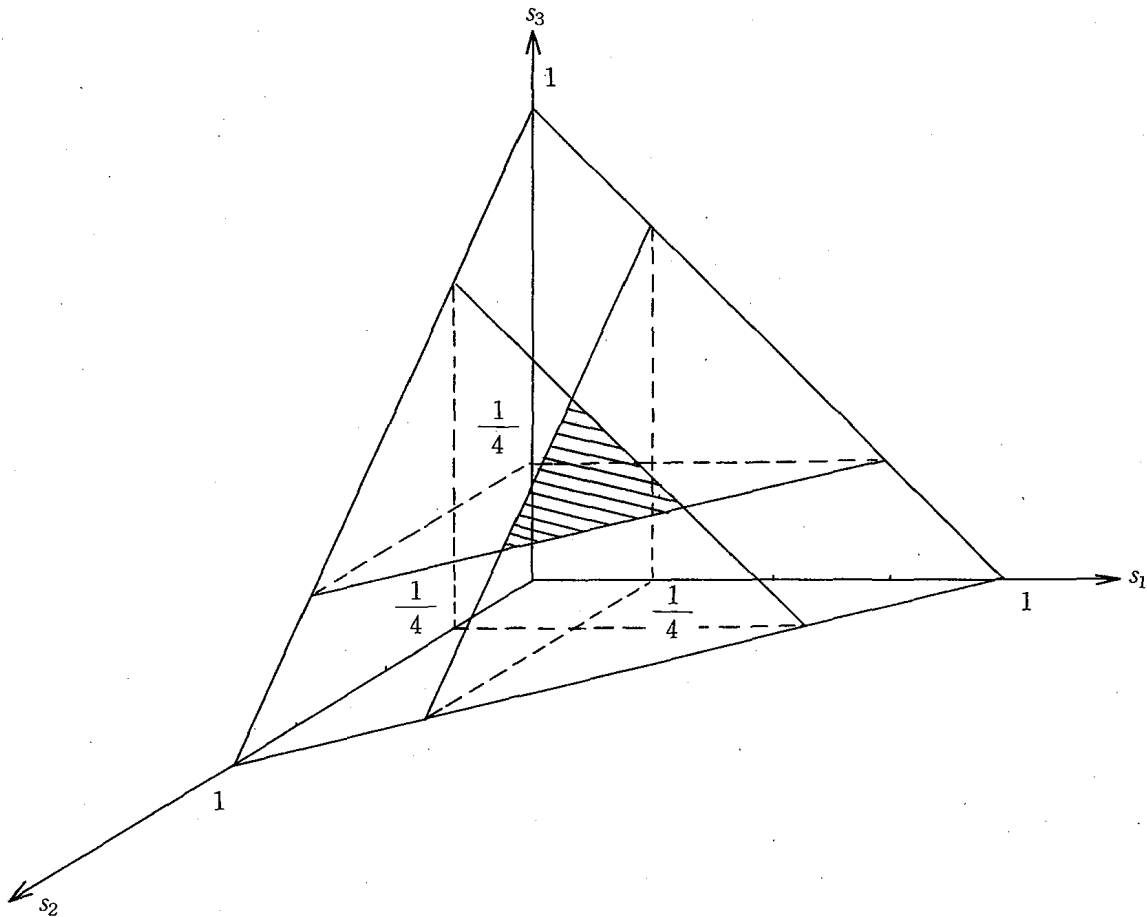


図3 協力解成立のための市場占有率の組み合わせ $s = (s_1, s_2, s_3)$ (斜線部分)

8) 生産量 x_i^D で $\pi_i(x_i, x_{[i]}^{JM})$ は最大になっていて, $\pi_i^{JM}(x_i^{JM}, x_{[i]}^{JM})$ より大きいことの証明.

共同利潤は(12)より

$$\pi = \sum_{i=1}^n (a - m_i - bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j) x_i$$

π の最大化の条件は次のようにも表現できる。

$$\partial \pi / \partial x_i = (a - m_i - 2bx_i^{JM} - b \sum_{j \neq i} x_j^{JM}) - \sum_{j \neq i} (-bx_j^{JM}) = 0 \tag{1}$$

さて, 上式①と(30)より,

$$\partial \pi_i^D(x_i^D, x_{[i]}^{JM}) / \partial x_i = (a - m_i - 2bx_i^D - 2b \sum_{j \neq i} x_j^{JM}) + b \sum_{j \neq i} x_j^{JM} > 0$$

よって, π_i^D は, x_i^{JM} ではなく, x_i^D において最大になっている。また, 上式①と(31)から

$$2b(x_i^D - x_i^{JM}) = b \sum_{j \neq i} x_j^{JM} > 0$$

よって,

$$x_i^D > x_i^{JM}$$

(証明終)

$$\frac{\partial \pi_i^D(x_i, x_{[i]}^{JM})}{\partial x_i} = a - m_i - 2bx_i - b \sum_{j \neq i} x_j^{JM} = 0 \quad (31)$$

従って、最適裏切り生産量 x_i^D は、(31)より

$$x_i^D = \frac{1}{2b} \{a - m_i - b \sum_{j \neq i} x_j^{JM}\} \quad (32)$$

(15)より

$$x_j^{JM} = \frac{s_j}{2b} \left\{ a - \sum_{i=1}^n s_i m_i \right\}$$

だから、 $\sum_{j \neq i} s_j = 1 - s_i$ に注意すると、

$$\begin{aligned} x_i^D &= \frac{1}{2b} \left\{ a - m_i - b \sum_{j \neq i} \left[\frac{s_j}{2b} \left(a - \sum_{i=1}^n s_i m_i \right) \right] \right\} \\ &= \frac{1}{2b} \left\{ a - m_i - \frac{1}{2} \left(a - \sum_{i=1}^n s_i m_i \right) \sum_{j \neq i} s_j \right\} \\ &= \frac{1}{4b} \left\{ 2(a - m_i) - (1 - s_i) \left(a - \sum_{i=1}^n s_i m_i \right) \right\} \end{aligned} \quad (33)$$

従って

$$\begin{aligned} \pi_i^D &\equiv \pi_i^D(x_i^D, x_{[i]}^{JM}) \\ &= (a - m_i - bx_i^D - b \sum_{j \neq i} x_j^{JM}) x_i^D \end{aligned}$$

(31)より

$$a - m_i - bx_i^D - b \sum_{j \neq i} x_j^{JM} = bx_i^D$$

だから、

$$\begin{aligned} \pi_i^D &= b(x_i^D)^2 \\ &= \frac{1}{16b} \left\{ 2(a - m_i) - (1 - s_i) \left(a - \sum_{j=1}^n s_j m_j \right) \right\}^2 \end{aligned} \quad (34)$$

4a 費用関数が同一の場合の最適裏切り戦略

(33), (34)より、 $m_i = m$ ($i = 1, 2, \dots, n$) を考慮すると、

$$x_i^D = \frac{(1+s_i)}{4b}(a-m) > \frac{s_i}{2b}(a-m) = x_i^{JM} \quad (33a)$$

$$\pi_i^D = \frac{(1+s_i)^2}{16b}(a-m)^2 \quad (34a)$$

(17a) より

$$\pi_i^{JM} = \frac{s_i}{4b}(a-m)^2$$

従って,

$$\pi_i^D - \pi_i^{JM} = \frac{1}{16b}(1-s_i)^2(a-m)^2 \quad (35)$$

ところが、協力解成立のための条件 (27a) より

$$s_i \geq \left(\frac{2}{n+1}\right)^2, \quad \sum_{i=1}^n s_i = 1$$

であるから,

$$\pi_i^D > \pi_i^{JM} \quad (n \geq 2, \quad i = 1, 2, \dots, n) \quad (36)$$

が確認できる。

5. 超ゲームにおける引きがね戦略均衡

前節までの議論を振り返ってみると、一回限りの寡占ゲームにおいては、クールノー均衡だけが非協力ゲームの解となる。もし、拘束的な協力（共謀）が成立すれば、すべての寡占企業にとってクールノー均衡の利潤よりも大なる利潤を手に入れることができるが、一回限りの寡占ゲームにおいては、4節で示したように最適裏切り戦略が存在する。したがって、市場占有率一定の共同利潤最大化の解を実現する戦略（企業*i*が x_i^{JM} を生産する（ $i=1, 2, \dots, n$ ））は、各寡占企業の立場からは遵守（enforce）する誘因がなくなる。しかしながら、すべての企業が裏切りを繰り返すと、クールノー均衡に甘んじなければならないことも各寡占企業は知っている。非協力（non-cooperative）よりも協力（cooperative）の結果を得るには、どのような経済的環境が必要となるのか。

5. 1 超ゲーム (supergame)⁹⁾ と引きがね戦略均衡 (trigger strategy equilibrium)

一回限りの寡占ゲームを繰り返し (ここでは, 無限回) 行なうことを考えよう。これは, フリードマンがその性質を明らかにした超ゲームの一種である。

各寡占企業は, 次のことを知っている。

- (1) 各期間における不変の逆需要関数
- (2) すべての企業の不変の費用関数
- (3) 不変の寡占企業の数
- (4) 不変のすべての企業の共通の主観的割引率
- (5) 1 回限りの (one-shot or one period) 寡占ゲームが, 無限回反復される。

このような経済的環境のもとでは, 1 回限りの寡占ゲームでは実現できなかった利潤可能性フロンティア上の点が非協力ゲームの解として得られることが知られている。¹⁰⁾

以下では, フリードマン [1977], [1983], [1986] に従って, 引きがね戦略均衡の性質を, 上述の寡占モデルから引き出す。

定義 3 戦略 $\{x(t)\}_{t=0}^{\infty}$ は,

$$x_i(0) = x_i^{JM}$$

$$x_i(t) = x_i^{JM} \text{ if } x_j(T) = x_j^{JM}, \quad j \neq i, \quad T = 0, 1, \dots, t-1;$$

$$t = 1, 2, \dots$$

$$x_i(t) = x_i^C \text{ otherwise}$$

のとき, 引きがね戦略という。ここで, $x(t) \equiv (x_1(t), x_2(t), \dots, x_i(t), \dots, x_n(t))$, $x_i(t)$ は, t 期における企業 i の生産量である。また, x_i^{JM} は, 市場占有率一定の共同利潤最大化の解の企業 i の生産量, x_i^C は, クールノー均衡のときの企業 i の生産量を示す。

9) “Supergame” という言葉は, Luce, R. D. and H. Raiffa, *Games and Decisions*, Wiley, New York, 1957. による。オーマン [1959, p. 287] を参照。

10) 注 2 を参照。

すなわち、引きがね戦略とは、次のことを意味する。第0期には寡占企業 i は x_i^{JM} を生産し、他の企業が協定を裏切らないかぎり、 x_i^{JM} を生産しつづける。しかしながら、もし、ある企業（例えば、企業 j ）が裏切って、 x_j^D を生産すると、次期間以降、 x_i^C をずっと生産しつづける。

すべての企業は、他の企業が引きがね戦略をとることを知っているとして仮定する。

いま、企業 i 以外のすべての企業 j ($j \neq i$) が引きがね戦略をとっているとき、企業 i の立場から、協力解の生産量を遵守 (enforce) するほうが得か、裏切ったほうが得かを考えてみよう。

すべての企業に共通な主観的割引率を r とする。¹¹⁾

市場占有率一定の共同利潤最大化の解を遵守するときの利潤の割引き現在価値 V_i^E は、

$$V_i^E \equiv \sum_{t=0}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \pi_i^{JM} = \frac{1+r}{r} \pi_i^{JM} \quad (37)$$

となる。これに対して、すべての企業が $(t-1)$ 期まで協力解を遵守し (x_i^{JM} ($i=1, 2, \dots, n$) を生産する)、 t 期に企業 i がはじめて協定を裏切り、 x_i^D ($\neq x_i^{JM}$) を生産すると、 $(t+1)$ 期以降、企業 i 以外のすべての企業は、 x_i^C ($j \neq i$) を生産する。従って、このとき $(t+1)$ 期以降の企業 i にとっての最善な選択は、 x_i^C となる。この場合の利潤の割引き現在価値 V_i^D は、

$$\begin{aligned} V_i^D &= \sum_{\tau=0}^{t-1} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{\tau} \pi_i^{JM} + \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \pi_i^D + \sum_{\tau=t+1}^{\infty} \left(\frac{1}{1+r} \right)^{\tau} \pi_i^C \\ &= \left(\frac{1+r}{r} \right) \left[1 - \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \right] \pi_i^{JM} + \left(\frac{1}{1+r} \right)^t \pi_i^D + \left(\frac{1+r}{r} \right) \left(\frac{1}{1+r} \right)^{t+1} \pi_i^C \quad (38) \end{aligned}$$

となる。

$$V_i^E > V_i^D \quad (39)$$

のとき、企業 i にとって協力解を裏切らない方が得である。すべての企業 i について

11) 簡単化のために、すべての寡占企業に共通の主観的割引率を用いる。企業ごとに異なった主観的割引率を考えることは容易にできる。

$$V_i^E > V_i^D \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (40)$$

のとき、市場占有率一定の共同利潤最大の解は、暗黙の協力均衡となる。即ち、各企業は協力解を遵守する。

(37), (38)を用いて(40)を書き換えると、

$$\pi_i^{JM} > \frac{r}{1+r} \pi_i^D + \frac{1}{1+r} \pi_i^C \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (41)$$

(41)式は、最適裏切り利潤とクールノー均衡の利潤を割引き要素 ($= \frac{1}{1+r}$) で加重平均 (一次結合) したもののよりも、協力解の利潤の方が大きければ、裏切らないで、協定を遵守したほうが得であることを示している。

(40)を r について書き換えると ($\pi_i^D > \pi_i^{JM}$, $\pi_i^{JM} > \pi_i^C$ に注意),

$$r < \frac{\pi_i^{JM} - \pi_i^C}{\pi_i^D - \pi_i^{JM}} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (42)$$

(42)の右辺を ρ_i とおき, (10), (17), (34)を用いると、

$$\begin{aligned} \rho_i &\equiv \frac{\pi_i^{JM} - \pi_i^C}{\pi_i^D - \pi_i^{JM}} \\ &= \frac{\frac{s_i}{4b} \{a - 2m_i + \sum_{j=1}^n s_j m_j\} (a - \sum_{j=1}^n s_j m_j) - \frac{1}{b(n+1)^2} \{a - m_i + \sum_{j=1}^n (m_j - m_i)\}^2}{\frac{1}{16b} \{2(a - m_i) - (1 - s_i)(a - \sum_{j=1}^n s_j m_j)\}^2 - \frac{s_i}{4b} \{a - 2m_i + \sum_{j=1}^n s_j m_j\} (a - \sum_{j=1}^n s_j m_j)} \\ &= \frac{4s_i(n+1)^2 \{a - 2m_i + \sum_{j=1}^n s_j m_j\} (a - \sum_{j=1}^n s_j m_j) - 16 \{a - m_i + \sum_{j=1}^n (m_j - m_i)\}^2}{(n+1)^2 \{2(a - m_i) - (1 - s_i)(a - \sum_{j=1}^n s_j m_j)\}^2 - 4s_i \{a - 2m_i + \sum_{j=1}^n s_j m_j\} (a - \sum_{j=1}^n s_j m_j)} \\ &\quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (43) \end{aligned}$$

以上の分析から次の命題1が成立する。¹²⁾

命題1 すべての i について

$$r < \rho_i$$

ならば、市場占有率一定の共同利潤最大化の解は、引きがね戦略均衡である。

12) ラムソン [1984] の定理2は、より一般的な需要関数を想定するが、費用関数はすべての寡占企業にとって同一であるケースを扱っている。従って、我々の結果は、費用関数を特定化するが、寡占企業間の費用格差を考慮している点に特徴がある。

5. 1a 費用関数が同一の場合の超ゲームと引きがね戦略均衡
 $m_i = m$ ($i = 1, 2, \dots, n$) のとき, (43)は簡単に表現できる。

$$\rho_i = \frac{4s_i(n+1)^2(a-m)^2 - 16(a-m)^2}{(n+1)^2\{[2(a-m) - (1-s_i)(a-m)]^2 - 4s_i(a-m)^2\}}$$

$a \neq m$ だから,

$$\rho_i = \frac{4s_i(n+1)^2 - 16}{(n+1)^2(1-s_i)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (43a)$$

協力解成立条件 (27a) より

$$s_i \geq \left(\frac{2}{n+1}\right)^2, \quad \sum_{i=1}^n s_i = 1 \quad (27a)$$

従って,

$$\rho_i \geq 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (44)$$

(43a) より, ρ_i は, 線形の費用関数, 需要関数のパラメーターに依存しないことに注意せよ。

(43a) の右辺を $\phi_i(s_i)$ とおくと,

$$\begin{aligned} \phi_i'(s_i) &= \frac{4(n+1)^2(1-s_i)^2 - \{4s_i(n+1)^2 - 16\} \{-2(1-s_i)\}}{(n+1)^2(1-s_i)^4} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2(1-s_i)^3} \{4(n+1)^2(1-s_i) + 8[s_i(n+1)^2 - 4]\} > 0 \end{aligned} \quad (45)$$

(45)を簡単にすると,

$$\phi_i'(s_i) = \frac{4(n+1)^2(1+s_i) - 32}{(n+1)^2(1-s_i)^3} > 0 \quad (46)$$

従って,

$$\begin{aligned} \phi_i''(s_i) &= \frac{4(n+1)^2(1-s_i)^3 - [4(n+1)^2(1+s_i) - 32] \{-3(1-s_i)^2\}}{(n+1)^2(1-s_i)^6} \\ &= \frac{4(n+1)^2(1-s_i) + 3[4(n+1)^2(1+s_i) - 32]}{(n+1)^2(1-s_i)^4} > 0 \end{aligned} \quad (47)$$

よって, $\phi_i(s_i)$ は, 凸で単調増加な関数である。(27a) より, s_i のとりうる範囲は, 最大限

$$\left(\frac{2}{n+1}\right)^2 \leq s_i \leq 1 - (n-1) \left(\frac{2}{n+1}\right)^2 = \frac{(n-1)^2 + 4}{(n+1)^2} \quad (48)$$

である。(46), (47)から, $\rho_i = \phi_i(s_i)$ のグラフは, 点 $\left(\left(\frac{2}{n+1}\right)^2, 0\right)$ から出発する下に凸の右上がりの曲線である (図4参照)。

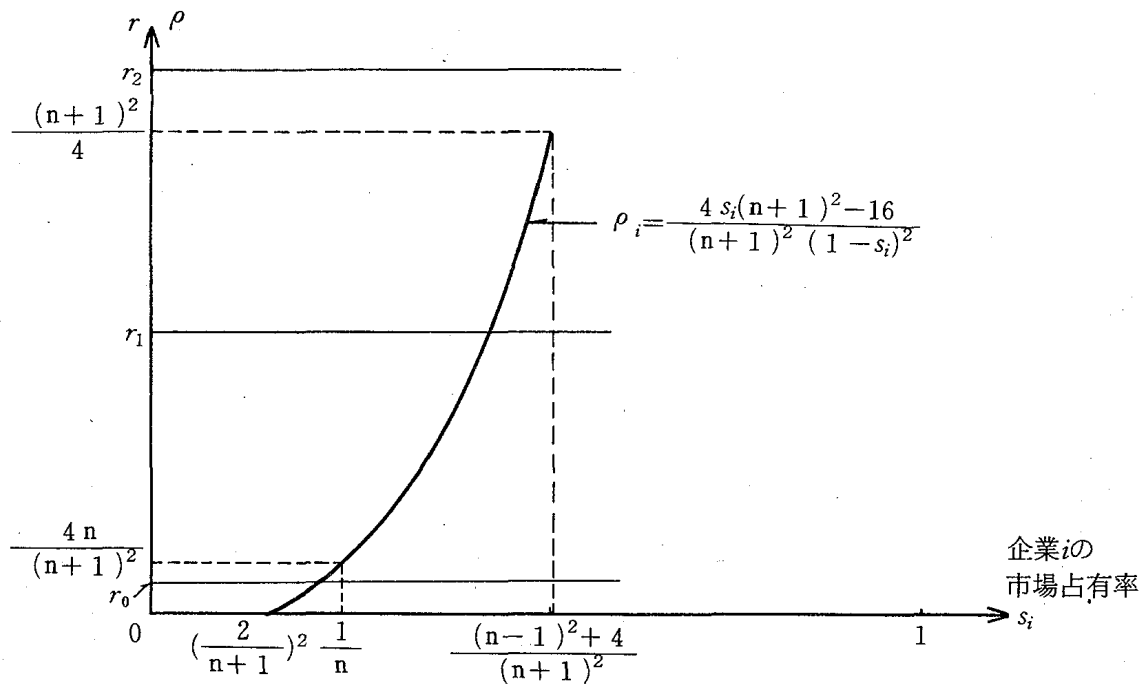


図4 企業の主観的割引率と市場占有率

$$\begin{aligned} \phi_i\left(\frac{1}{n}\right) &= \frac{\frac{4}{n}(n+1)^2 - 16}{(n+1)^2\left(1 - \frac{1}{n}\right)^2} \\ &= \frac{4n}{(n+1)^2} \end{aligned} \quad (49)$$

企業の主観的割引率 r に対して, 協力解を遵守することが有利な市場占有率の範囲を表わす集合 $E_i(r)$ を求めると,

$$E_i(r) = \left\{ s_i \mid \phi_i^{-1}(r) < s_i \leq \frac{(n-1)^2 + 4}{(n+1)^2} \right\}$$

となる。

次の命題が成立する。

命題2 もし、企業の主観的割引率 r が、

$$r < 4n/(n+1)^2 \quad (50)$$

を満たせば、暗黙の協力により、市場占有率一定の共同利潤最大化の解は遵守される。

証明 図4において、 $r < 4n/(n+1)^2$ を満たす r_0 を考えてみよう。

$$r_0 < \phi_i\left(\frac{1}{n}\right) = 4n/(n+1)^2 \quad (51)$$

だから、

$$\phi_i^{-1}(r_0) < \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (52)$$

したがって、 $\sum_{i=1}^n s_i = 1$ かつ $s_i \in E_i(r_0)$ となるように s_i を定めることができる。例えば、

$$s_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (53)$$

なる均等市場占有率は、明らかに条件を満たす。¹³⁾ (証明終)

命題3 企業の主観的割引率 r が高くなればなるほど、暗黙の協力解が遵守される範囲は狭くなっていく。特に、

$$\frac{4n}{(n+1)^2} < r \leq \frac{(n+1)^2}{4} \quad (54)$$

ならば、均等市場占有率一定の共同利潤最大化の解は遵守されない。

また、

$$r > \frac{(n+1)^2}{4} \quad (55)$$

のときは、協力解は遵守されない。

13) 均等市場占有率でない場合ももちろん存在するので、協力解は一意ではない。

証明 図4において、(54)を満たす r_1 を考える。均等市場占有率のとき

$$r_1 > \phi_i\left(\frac{1}{n}\right) \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (56)$$

であるから、明らかに協力解は遵守されない。

(55)を満たす r_2 を考えると、すべての s_i に対して

$$r_2 > \phi_i(s_i)$$

従って、協力解は遵守されない。

(証明終)

命題2および命題3より、市場占有率一定の共同利潤最大化の解が遵守されるためには、企業の主観的割引率 r は、 $4n/(n+1)^2$ を越えてはならない。企業の主観的割引率 r が $4n/(n+1)^2$ より小さいときは、すべての企業の市場占有率は必ず $1/n$ とならなくてもよいという意味での不決定性が存在していることに注意しよう。しかしながら、企業の主観的割引率 r が $4n/(n+1)^2$ に下から近づくとつれて、不決定の割合は減じ、

$$r = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad (57)$$

のとき、協力解が遵守されるのは、均等市場占有率の場合に限られる。

5. 2a 暗黙の協力解を遵守する最大の企業数と企業の主観的割引率
均等市場占有率の場合に議論を限定しよう。

$$s_i = \frac{1}{n} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

のとき、(49)より

$$\rho_i = \frac{4n}{(n+1)^2} \quad (i = 1, 2, \dots, n) \quad (58)$$

すでに指摘したように、(58)の右辺は、線形の費用関数、市場逆需要関数のパラメータに依存せず、企業数 n にのみ依存している。

与えられた企業の主観的割引率 r に対して、

$$r < \frac{4n}{(n+1)^2} \quad (59)$$

のとき協力解が遵守される。従って、次の命題が得られる。

命題4 与えられた企業の主観的割引率 r に対して、均等市場占有率一定の共同利潤最大化の解を遵守する最大の企業数（これを $n_{max}(r)$ とする）が存在する。

$n_{max}(r)$ は、 r に関して非増加関数である。

証明 (59)より

$$n^2 - 2\left(\frac{2}{r} - 1\right)n + 1 < 0 \quad (60)$$

従って、 $r \leq 1$ なる r に対して、

$$n_{max}(r) = \text{int} \left\{ \frac{2 - r + 2\sqrt{1-r}}{r} \right\} \quad (61)$$

ただし、 $\text{int}(z)$ は、 z を越えない最大の整数を表わす。

(61)より $f(r) = \frac{1}{r} \{2 - r + 2\sqrt{1-r}\}$ とおくと

$$\begin{aligned} \frac{df(r)}{dr} &= \frac{1}{r^2} \left\{ \left[-1 + \left(-\frac{1}{2}\right) \times \frac{2}{\sqrt{1-r}} \right] r - (2 - r + 2\sqrt{1-r}) \right\} \\ &= \frac{1}{r^2} \left\{ -2 - \frac{2-r}{\sqrt{1-r}} \right\} \end{aligned}$$

したがって、 $0 < r < \frac{4n}{(n+1)^2} < 1$ に対して

$$\frac{df(r)}{dr} < 0 \quad (62)$$

故に、

$n_{max}(r)$ は、 r について非増加関数となる（図5および表1を参照せよ）。

（証明終）

寡占企業の主観的割引率が10% (0.1) のとき協力解を遵守する最大の企

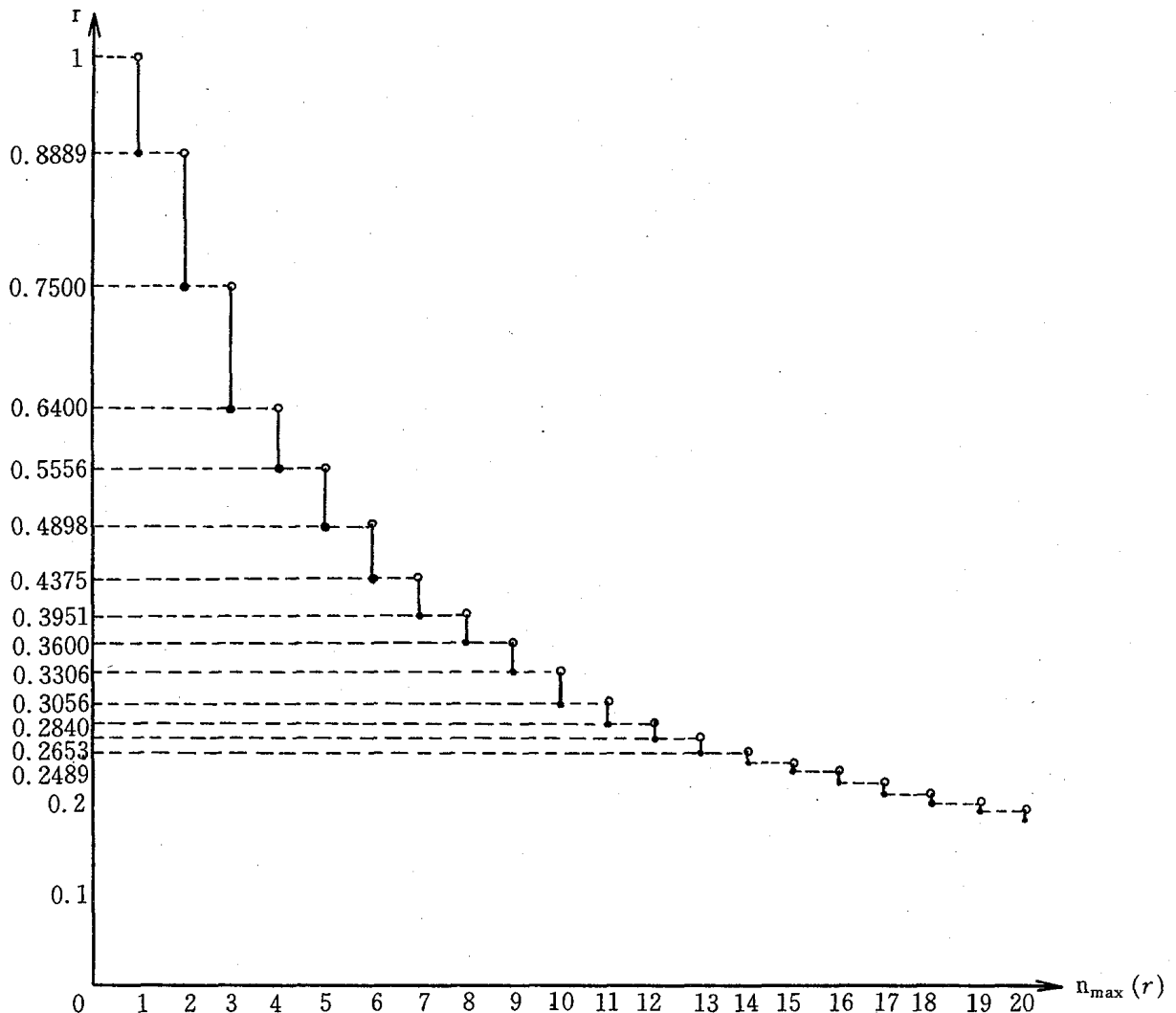


図5 寡占企業の主観的割引率 r と市場占有率一定の共同利潤最大化の解を遵守する最大の寡占企業数 $n_{\max}(r)$

業数は37である。同様に表1および図5より、企業の主観的割引率が、15%、20%、29%、40%に対して協力解を遵守する最大の企業数は、それぞれ、24、17、11、7と減少する。

6. 要約と展望

一回限りの寡占ゲームでは非協力均衡とはなりえない、市場占有率一定の共同利潤最大化の解が、一回限りの寡占ゲームを無限回反復する、いわゆる超ゲームにおいては、引きがね戦略による非協力均衡となりうる条件を明らかにした(命題1, 2および3を参照)。すなわち、市場占有率一定の共同利潤最大化

表1 与えられた寡占企業の主観的割引率 r のもとで均等市場占有率一定の共同利潤最大化の解を遵守する最大の寡占企業数 $n_{\max}(r)$ および ρ

r	$n_{\max}(r)$	$\rho = \frac{4n}{(n+1)^2}$	r	$n_{\max}(r)$	$\rho = \frac{4n}{(n+1)^2}$
0.01	397	0.0100	0.15	24	0.1536
0.02	197	0.0201	0.2	17	0.2099
0.03	131	0.0301	0.25	13	0.2653
0.04	97	0.0404	0.29	11	0.3056
0.05	77	0.0506	0.34	9	0.3600
0.06	64	0.0606	0.4	7	0.4375
0.07	55	0.0702	0.49	5	0.5556
0.08	47	0.0816	0.56	4	0.6400
0.09	42	0.0909	0.65	3	0.7500
0.1	37	0.1025	0.76	2	0.8889

の解がすべての寡占企業によって暗黙的に遵守されるためには、企業の主観的割引率 r は $4n/(n+1)^2$ を越えてはならない。もし r が $4n/(n+1)^2$ より小さいときは、すべての企業の費用関数が同じであるにもかかわらず、おのおのの寡占企業の市場占有率は必ずしも均等市場占有率 ($1/n$) に等しくなくてもよいという意味での不決定性が存在している。

均等市場占有率の場合に議論を限定することにより、与えられた企業の主観的割引率に対して、協力解を暗黙的に遵守する最大の企業数を求めることができた (命題4)。寡占企業の主観的割引率が大きくなるにつれて、協力解を遵守する最大の企業数は減少していく¹⁴⁾ことが表1および図5からわかる。

今後の課題は、ここで取り扱ったような特殊な需要構造や費用構造に依存しないで、非対称となる寡占企業の均衡分析を超ゲームの枠組の中で考察することである。また、おのおのの寡占企業が他の寡占企業の情報について、どれだけ知っているか、情報交換の可能性などについて検討したい。

現実の寡占企業の行動を実証的に分析し、理論モデルの現実妥当性を吟味す

14) 厳密に言えば、非増加である。

ることは、寡占企業分析に大きく貢献することとなろう。

References

- Aumann, R. J., "Acceptable Points in General Cooperative n-Person Games," in A. W. Tucker and R. D. Luce, eds., *Contributions to the Theory of Games IV*, Princeton University Press, Princeton, 1959, pp. 287-324.
- Benoit, J. -P. and V. Krishna, "Finitely Repeated Games," *Econometrica*, Vol. 53, No. 4 (July, 1985), pp. 905-922.
- Cheng, L., "Comparing Bertrand and Cournot Equilibria : A Geometric Approach," *Rand Journal of Economics*, Vol. 16, No. 1 (Spring, 1985), pp. 146-152.
- Cournot, A. A., *Researches into the Mathematical Principles of the Theory of Wealth*, translated by N. T. Bacon (with an essay on Cournot and mathematical economics and a bibliography of mathematical economics by I. Fisher). Macmillan, New York, 1927. Original edition was published in French in 1838.
- Deneckere, R., "Duopoly Supergames with Product Differentiation," *Economics Letters*, Vol. 11, Nos. 1-2 (1983), pp. 37-42.
- Dixit, A., "A Model of Duopoly Suggesting a Theory of Entry Barriers," *Bell Journal of Economics*, Vol. 10, No. 1 (Spring, 1979), pp. 20-32.
- , "Recent Developments in Oligopoly Theory," *American Economic Review*, Vol. 72, No. 2 (May, 1982), pp. 12-17.
- Donsimoni, M. -P., N. S. Economides and H. M. Polemarchakis, "Stable Cartels," *International Economic Review*, Vol. 27, No. 2 (June, 1986), pp. 317-327.
- Friedman, J. W., "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames," *Review of Economic Studies*, Vol. 38 (January, 1971), pp. 1-12.
- , "A Non-cooperative Equilibrium for Supergames : A Correction," *Review of Economic Studies*, Vol. 40 (July, 1973), p. 435.
- , *Oligopoly and the Theory of Games*, North-Holland, Amsterdam, 1977.
- , *Oligopoly Theory*, Cambridge University Press, London, 1983.
- , "Cooperative Equilibria in Finite Horizon Noncooperative Supergames," *Journal of Economic Theory*, Vol. 35, No. 2 (April, 1985), pp. 390-398.
- , *Game Theory with Applications to Economics*, Oxford University Press, New York, 1986.
- Fudenberg, D. and E. Maskin, "The Folk Theorem in Repeated Games with Discounting or with Incomplete Information," *Econometrica*, Vol. 54, No. 3 (May, 1986), pp. 533-554.
- Green, E. J., "Noncooperative Price Taking in Large Dynamic Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 22, No. 2 (April, 1980), pp. 155-182.
- Lambson, V. E., "Self-Enforcing Collusion in Large Dynamic Markets," *Journal of Economic Theory*, Vol. 34, No. 2 (December, 1984), pp. 282-291.
- Porter, R. H., "Optimal Cartel Trigger Price Strategies," *Journal of Economic Theory*, Vol. 29, No. 2 (April, 1983), pp. 313-338.
- Radner, R., "Collusive Behavior in Noncooperative Epsilon-Equilibria of Oligopolies

with Long but Finite Lives, *Journal of Economic Theory*, Vol. 22, No. 2 (April, 1980), pp. 136–154.

Singh, N. and X. Vives, "Price and Quantity Competition in a Differentiated Duopoly," *Rand Journal of Economics*, Vol. 15, No. 4 (Winter, 1984), pp. 546–554.

Vives, X., "Duopoly Information Equilibrium: Cournot and Bertrand," *Journal of Economic Theory*, Vol. 34, No. 1 (October, 1984), pp. 71–94.

鶴沢 秀, 「企業間の費用格差と製品差別のある複占超ゲームの解」, 『商学討究』(小樽商科大学), 第36巻第3号(1986年3月), pp. 125–150.