分権的システム―分割原理と非協力ゲームによるアプローチ

奥　田　和　重

1．緒　　言

あるシステムを集権的とみるかあるいは分権的とみるかは，集権と分権の概念が相対的であるためにその定義は一般的には困難である。そこで本論では，対象とする分権的システムをシステム理論の範疇で取り扱われているものとする。すなわち，システムはいくつかのサブシステムで構成され，各サブシステムは何らかの評価基準にもとづいた目的関数と何らかの制約条件式で表されるものとする。このような分権的システムの最適化に対するアプローチとして，分割原理による方法とゲームの理論における非協力ゲームによる方法がある［1］。

分割原理は大規模で複雑なシステムを小規模で複雑なサブシステムに分割し，その取扱いを容易にするものである。その際，サブシステム間の相互干渉（相互関係）を非干渉化し，各サブシステムを独立したサブシステムとみなすことによって分権的システムであるとするものである。他方，ゲームの理論ではシステムをサブシステムの集まりであるとみなし，各サブシステムは相互関係を考慮して自らの評価基準にもとづいて行動を決定するものである。特に決定権に優先権のない非協力ゲームにおけるシステムでは，その構造それ自体が分権的であるといえる。

例えば，河川流域の自治体による水資源利用計画問題を考えてみる。流量が一定のとき，河川上流の自治体の取水量が多ければ下流の自治体の取水量に影

（昭和62年7月8日受領）

響を及ぼし，下流の自治体の取水量を増すためには上流の取水量を減らさなければならない。分割原理ではこのような自治体間の相互関係を断ち切って各々独立した利用計画をたて，流量のバランスを保つために自治体間の計画を調整する上位レベルの意思決定者（コーディネータ）を設置して全体の最適化を実現させるものである。非協力ゲームでは各自治体が利用計画に関する情報を互いに交換することによって相手の利用計画を知り，それを考慮して新たな利用計画を作成するものである。分割原理によるアプローチと非協力ゲームによるそれとの主たる相違は次のようである。分割原理においてはシステム全体の目的関数が構成されるが，非協力ゲームにおいては構成されない。またサブシステム間の調整は分割原理においては上位レベルに設置したコーディネータが行い，非協ゲームではサブシステム間の情報交換によって行われる。

本論ではこのような分権的システムに対する分割原理と非協力ゲームの２通りのアプローチについて述べ比較検討する。

2．分権的システムの構成

2.1.　サブシステム

分権的システムを構成するサブシステムはN個存在するものとし，各サブシステムを添字 i で表すものとする。各サブシステム S_i は入力 $x_i \in X_i$ を変換して出力 $y_i \in Y_i$ を得る入出力システム $S_i: X_i \rightarrow Y_i$ であるとする。ここで X_i と Y_i は入力と出力の集合である。サブシステム S_i の内部構造は，入力 x_i を出力 y_i に変換するプロセス P_i とこれを制御する意思決定者 DM_i で構成される。DM_i はある評価基準 D_i にもとづいた目的関数 G_i を持ち，これを達成するために x_i と y_i を観測してプロセスを制御する。この制御するために決定される決定変数を $u_i \in U_i$ とする。U_i は決定変数の集合である。このようなシステムは目的追求システム［2］と呼ばれ，これを図示すると図１(a)のようになる。これを簡単に図１(b)のように表すことにする。このサブシステムを定式化すると次のようになる。

$$G_i: X_i \times Y_i \times U_i \to \boldsymbol{R} \quad (1)$$

$$P_i: X_i \times U_i \to Y_i \quad (2)$$

あるいは

$$D_i: G_i(x_i, y_i, u_i) \quad (1')$$

$$\text{Sub. to} \quad y_i = P_i(u_i, x_i) \quad (2')$$

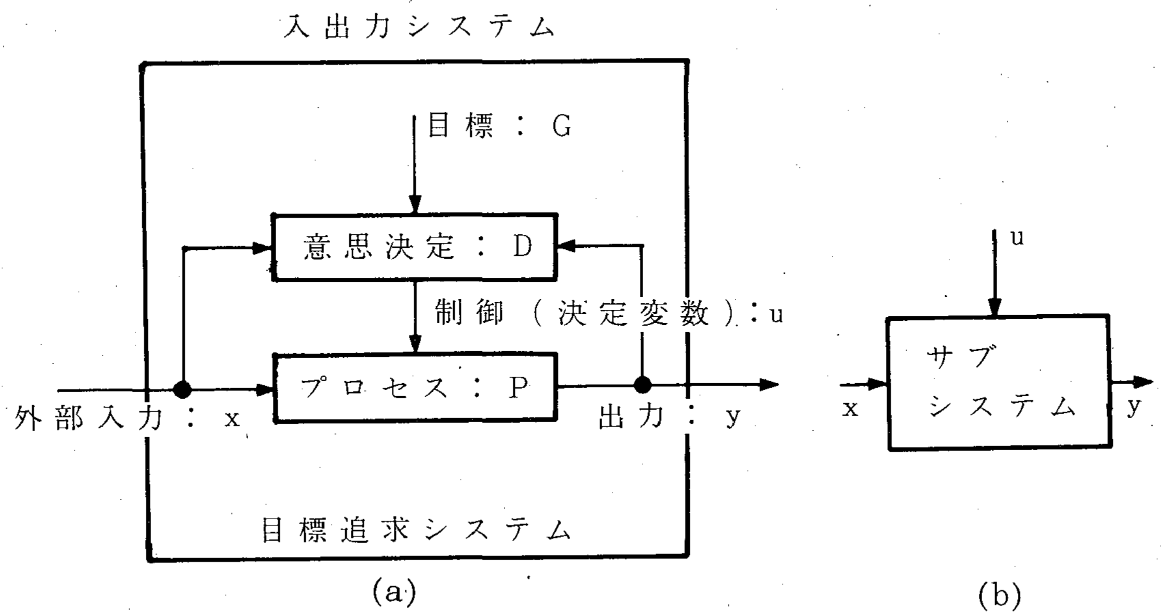

図1 サブシステム

ここで $\boldsymbol{R}$ は実数空間を表す。先の水資源利用計画問題では，入力 x_i は気象条件のような外乱，出力 y_i は流量，決定変数 u_i は取水量で，目的関数 G_i は上水道や農業灌漑用水，釣りなどのレジャーに関する効用関数である。各自治体は気象や流量を観測して効用を最大にするように取水量を決定する。

2.2 分権的システムの構造

分権的システムは，サブシステム間に何らかの相互関係が存在する複雑なシステムである。システムが分権的であることは，各サブシステムが相互関係にある他のサブシステムの決定に影響されることなく自らの決定変数の値を決めることができることである。この相互関係には，サブシステム間に共通した希少資源が存在する場合のような間接的な相互関係と，サブシステム間に入出力関係が存在する直接的な相互関係がある。前者はシステム干渉，後者はプロセ

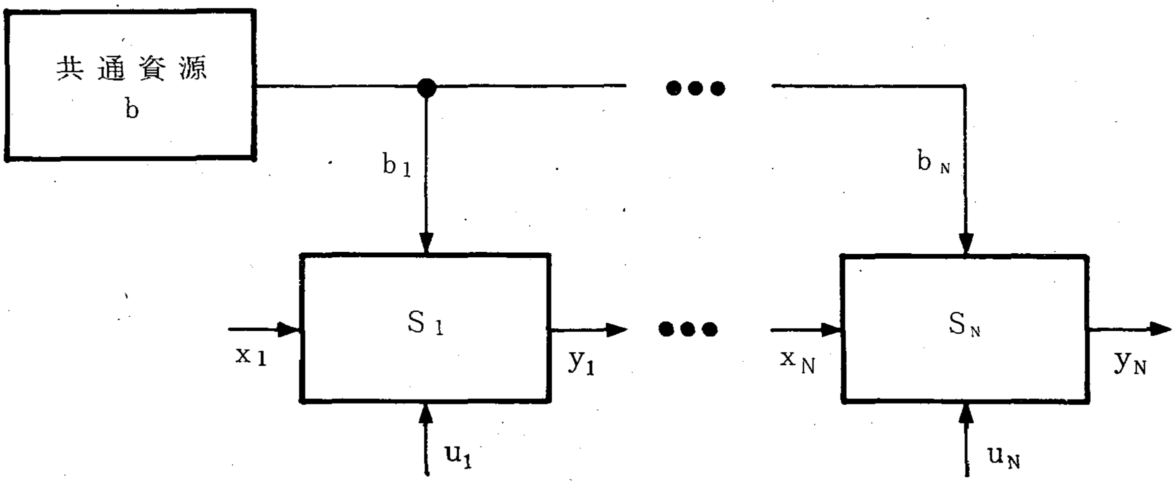

図2　システム干渉

ス干渉と呼ばれている［3］。共通資源の利用可能量を $b \in \boldsymbol{R}$, 各サブシステムに分配される共通資源の量を $b_i \in B_i \subset \boldsymbol{R}$ とする。B_i はb_iの集合である（図2）。サブシステムが使用する共通資源の量は g_i: $Y_i \times U_i \to B_i$ で定められる。したがって，システム干渉の場合のサブシステムは，次の形で表現できる。

$$
\begin{aligned}
y_i &= P_i(x_i, u_i) \\
b_i &= g_i(y_i, u_i)
\end{aligned}
\tag{3}
$$

さらに，資源制約としてすべてのサブシステムに対して，

$$\sum_{i=1}^{N} b_i \leqq b \tag{4}$$

が成り立たなければならない。他方，プロセス干渉では，相互関係を表わす変数 $z_i \in Z_i$ と相互関係の関数 K_i: $Y \times U \to Z_i$ を導入して次のように表現できる（図3）。

$$
\begin{aligned}
y_i &= P_i(u_i, x_i, z_i) \\
z_i &= K_i(y, u)
\end{aligned}
\tag{5}
$$

ここで，$y \in Y, u \in U, Y = Y_1 \times \cdots \times Y_N, U = U_1 \times \cdots \times U_N$ である。

以下の議論の展開を容易にするために，評価基準として最大化基準を用いることにし，外部入力 xを無視する。システム干渉は，資源配分型統合法として［4］ですでに詳述してあるので，本論ではサブシステム間の直接の入出力関係を表わすプロセス干渉を取り上げる。

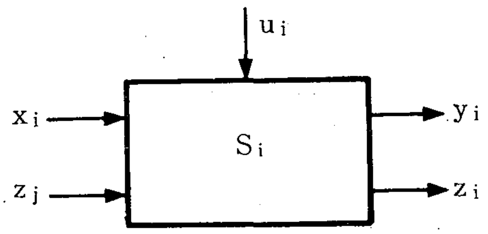

図3　プロセス干渉

3．分割原理による分権的システム

3.1　原問題の定式化

分権的システムに分割原理を適用するとき，原問題の目的関数としてサブシステムの目的関数で構成されるシステム全体の目的関数が用いられる。多くの場合，これはサブシステムの目的関数の加法和である。このような原問題は次のように定式化できる。

$$\text{Max.}\quad \sum_{i=1}^{N} G_i(y_i,\ u_i,\ z_i) \tag{6}$$

$$\text{Sub. to}\quad y_i = P_i(u_i,\ z_i),\quad i=1,\cdots,N \tag{7}$$

$$z_i = K_i(y,\ u),\quad i=1,\cdots,N \tag{8}$$

これを最適化するために Lagrange 関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} &L(y_i,\ u_i,\ z_i,\ \lambda_i,\ \mu_i) \\ &\quad \triangleq \sum_{i=1}^{N} G_i(y_i,\ u_i,\ z_i) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i^T (P_i(u_i,\ z_i) - y_i) \\ &\qquad + \sum_{i=1}^{N} \mu_i^T (z_i - K_i(y,\ u)) \end{aligned} \tag{9}$$

ここで $\lambda_i,\ \mu_i$ は Lagrange 乗数である。これより最適解は次の必要条件をみたさなければならない。

$$\frac{\partial L}{\partial y_i} = \frac{\partial G_i}{\partial y_i} - \lambda_i^* - \mu_i^{*T} \frac{\partial K_i}{\partial y_i} = 0 \tag{10}$$

$$\frac{\partial L}{\partial u_i} = \frac{\partial G_i}{\partial u_i} + \lambda_i^{*T} \frac{\partial P_i}{\partial u_i} - \mu_i^{*T} \frac{\partial K_i}{\partial u_i} = 0 \tag{11}$$

$$\frac{\partial L}{\partial z_i} = \frac{\partial G_i}{\partial z_i} + \lambda_i^{*T} \frac{\partial P_i}{\partial z_i} + \mu_i^* = 0 \tag{12}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_i}=P_i(u_i^*, z_i^*)-y_i^*=0 \tag{13}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i}=z_i^*-K_i(y^*, u^*)=0 \tag{14}$$

分割原理が有効であるのは，サブシステムの数Nや変数の次元が大きいときである。このような場合，サブシステム間の相互関係を非干渉化することによって原問題を各サブシステムに分割し，問題の規模を小さくして取り扱いやすくする。その際，非干渉化によって断ち切られた相互関係を調整するためにコーディネーターが設置される。このコーディネーターが調整するために用いる変数の種類によって，Goal coordination method (infeasible method) と Model coordination method (feasible method) がある [5]。前者は調整変数として Lagrange 乗数 μ を用い，後者は z を用いる。Goal coordination method は，サブシステムの最適化問題の目的関数の中に μ が存在するためにこのように呼ばれ，また最適解を求める過程で得られる解は，常に最適ではあるが実行可能性が保たれていないために infeasible と呼ばれている。一方，Model coordination method は，サブシステムの制約条件式の中に z が存在するためにこのように呼ばれており，最適解を得る過程の解は，常に実行可能であるが最適性が保証されていないために feasible と呼ばれている。この両者の特徴を生かした Mixed coordination method [5] などが提案されているが，本論ではこの2種類の調整法について述べることにする。

3.2 Goal Coordination Method

式（9）より

$$\begin{aligned}
&L(y_i, u_i, z_i, \lambda_i, \mu)\\
&\quad\triangleq \textstyle\sum_{i=1}^{N}\{G_i(y_i, u_i, z_i)+\lambda_i^T(P_i(u_i, z_i)-y_i)\\
&\qquad + \mu_i^T z_i - K_i'(\mu, y_i, u_i)\}\\
&\quad= \textstyle\sum_{i=1}^{N} L_i(y_i, u_i, z_i, \lambda_i, \mu)
\end{aligned}$$

ここで，$\mu=(\mu_1,\cdots,\mu_N)^T$ である。

これより第 i 番目のサブシステムの最適化問題は次のようになる。

$$\text{Max.}\quad G_i(y_i, u_i, z_i)+\mu_i^T z_i-K_i'(\mu, y_i, u_i) \tag{15}$$

$$\text{Sub. to}\quad y_i=P_i(u_i, z_i) \tag{16}$$

この最適化問題では，サブシステムはコーディネータより μ の値が与えられたならば，他のサブシステムの決定に影響されることなく自らの決定変数の値を決めることができる。ところが μ の値を適切に決めなければ，サブシステム間の入出力関係が成り立たない。いま，各サブシステムが与えられた μ のもとに式 (15), (16) を最適化すると，必要条件内の式 (10) ～ (13) が等号で成り立つ。したがって，コーディネータは式 (14) が成り立つように μ の値を決定する。これに Newton 法を適用すると次のようになる。

$$\mu^{l+1}=\mu^l+\varepsilon\cdot\partial L/\partial\mu \tag{17}$$

ここで l はイテレーションの回数，ε はステップ巾である。サブシステム間の入出力が均衡したシステム全体の最適解を得るためには，初めに任意の μ^1 に対して各サブシステムが最適化問題（式 (15), (16)）を解き，そのときの y_i^1, u_i^1, z_i^1 をコーディネータに送る。コーディネータは各サブシステムから送られてきたこれらの値を用いて式 (17) により新しい μ^2 を計算し，これを各サブシステムに提示する。各サブシステムはこの μ^2 を用いて再び式 (15), (16) を解く。これを解が収束するまで繰り返す。イテレーションの停止条件はある正の微小量 δ に対して，

$$|z_i^l-K_i'(\mu^l, y_i^l, u_i^l)|<\delta \tag{18}$$

が成り立つことである。この過程を図で示すと図4のようになる。

いま図5のような水資源利用計画問題を考える。ある河川の i 番目の流域を含む自治体 i があり，u_i だけ取水するとする。流域 i における上流の流量を z_i ，下流の流量を y_i とする。各自治体の効用関数 G_i が y_i と u_i に関する2次関数で表わされるものと仮定すれば，$N=3$ のとき全体の最適化問題は次のようになる。

$$\text{Max.}\quad \textstyle\sum_{i=1}^{3} 1/2\,(a_i y_i^2+b_i u_i^2)$$

$$\text{Sub. to}\quad y_i=z_i-u_i,\qquad i=1, 2, 3$$

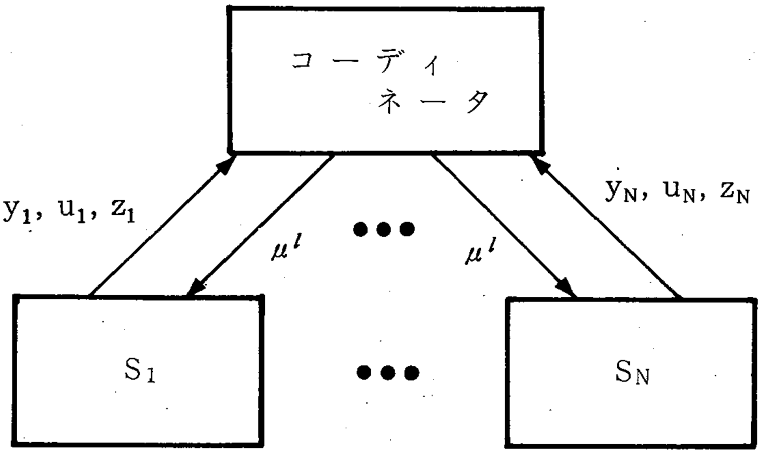

図4　Goal Coordination Method

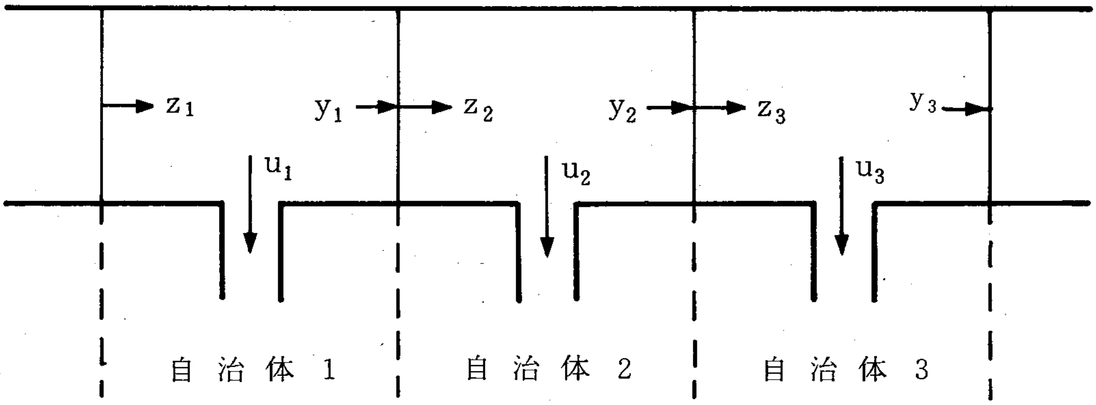

図5　水資源利用計画問題（例題）

$$z_i = y_{i-1}, \qquad i = 2, 3$$

$$z_1 = 一定$$

この問題の Lagrage 関数は,

$$L(y_i, u_i, z_i, \lambda_i, \mu_i)$$

$$\triangleq \sum_{i=1}^{3} 1/2(a_i y_i^2 + b_i u_i^2) + \sum_{i=1}^{3} \lambda_i (z_i - u_i - y_i) + \sum_{i=2}^{3} \mu_i (z_i - y_{i-1})$$

となる。これを各 i について分割すると次のようになる。

自治体1 : Max. $1/2(a_1 y_1^2 + b_1 u_1^2) - \mu_2 y_1$

Sub. to $y_1 = z_1 - u_1$

自治体2 : Max. $1/2(a_2 y_2^2 + b_2 u_2^2) + \mu_2 z_2 - \mu_3 y_2$

Sub. to $y_2 = z_2 - u_2$

自治体3 : Max. $1/2(a_3 y_3^2 + b_3 u_3^2) + \mu_3 z_3$

Sub. to $y_3 = z_3 - u_3$

各自治体について解くと最適解は次のようになる。

$$y^*=\begin{bmatrix}\dfrac{\mu_2+b_1z_1}{a_1+b_1}\\[2ex] \dfrac{\mu_3-\mu_2}{a_2}\\[2ex] -\dfrac{\mu_3}{a_3}\end{bmatrix}$$

$$u^*=\begin{bmatrix}\dfrac{a_1z_1-\mu_2}{a_1+b_1}\\[2ex] -\mu_2b_2\\[2ex] \dfrac{\mu_3}{b_3}\end{bmatrix}$$

$$z^*=\begin{bmatrix}z_1\\[2ex] \dfrac{b_2\mu_3+(a_2+b_2)\mu_2}{a_2b_2}\\[2ex] -\dfrac{a_3+b_3}{a_3b_3}\mu_3\end{bmatrix}$$

いまの場合，コーディネータは各自治体が決定した z_i と y_i を用いて μ_i を次のようにして決める。

$$\mu_i^{l+1}=\mu_i^l+\varepsilon\cdot(z_i^l-y_{i-1}^l),\quad i=2,3$$

これらを図示すると図6のようになる。

3.3 Model Coordination Method

この方法の場合，式（9）の Lagrange 関数は次のようになる。

$$\begin{aligned}&L(y_i,\ u_i,\ z,\ \lambda_i,\ \mu)\\ &\quad\triangleq\textstyle\sum_{i=1}^N\{G_i(y_i,\ u_i,\ z_i)+\lambda_i^T(P_i(u_i,\ z_i)-y_i)\\ &\qquad+\mu^T(z-K'(y_i,u_i))\}\\ &\quad=\textstyle\sum_{i=1}^N L_i(y_i,\ u_i,\ z,\ \lambda_i,\ \mu)\end{aligned}$$

ここで，$z=(z_1,\cdots,z_N)^T$である。各サブシステムの最適化問題は与えられた任意の $\hat{z}$ に対して，

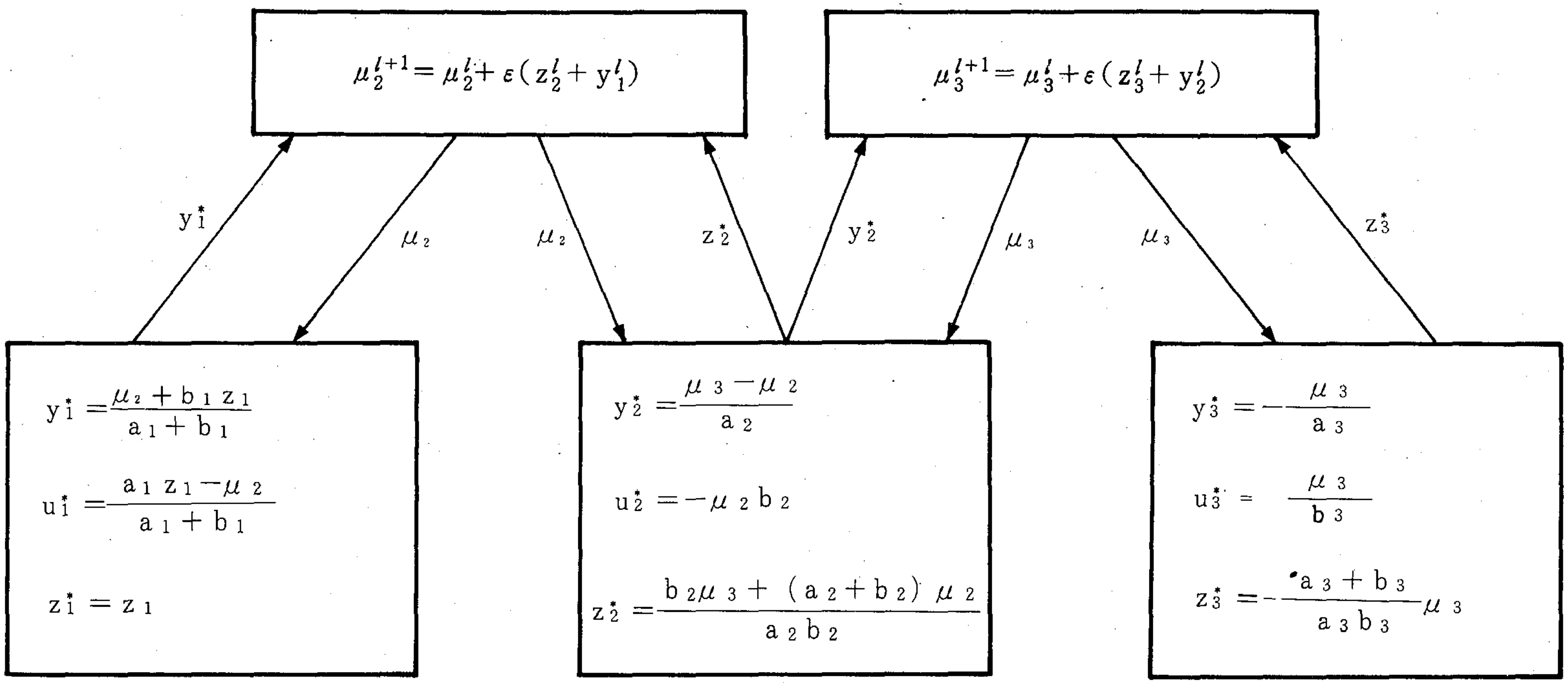

図6 Goal Coordination Method による解

$$\text{Max.} \quad G_i(y_i,\ u_i,\ \hat{z}) \tag{19}$$

$$\text{Sub. to} \quad y_i = P_i(u_i,\ \hat{z}) \tag{20}$$

$$\hat{z} = K'(y_i,\ u_i) \tag{21}$$

となる。各サブシステムがこの問題を解くことによって，必要条件内の式（10），（11)，(13)，(14）が等号で成り立つ。コーディネータは式（12）が成り立つように $\hat{z}$ の値を決定する。Goal coordination と同様にしてコーディネータは次のようにして $\hat{z}$ を決定する。

$$\hat{z}^{l+1} = \hat{z}^{l} + \varepsilon \cdot \partial L/\partial z \tag{22}$$

この場合，サブシステム間の入出力関係は常に均衡しているが，サブシステムの最適化問題（式（19）～（21)）は必ずしも最適であるとは限らない。そこでコーディネータはシステム全体を最適にするように $\hat{z}$ の値を決定する。まずコーディネータは任意の $\hat{z}^1$ を各サブシステムに提示する，各サブシステムは最適化問題を解き，そのときの $\lambda^1, \mu^1, y^1, u^1$ をコーディネータに報告する。コーディネータはこれらの値を用いて $\hat{z}^2$ を計算して各サブシステムに提示する。これを解が収束するまで繰り返すわけであるが，ある正の微小量 δ に対して，

$$|\hat{z}^{l+1} - \hat{z}^{l}| < \delta \tag{23}$$

のときイテレーションを停止する。このときの解がシステム全体を最適にする最適解である。これを図示すると図７のようになる。

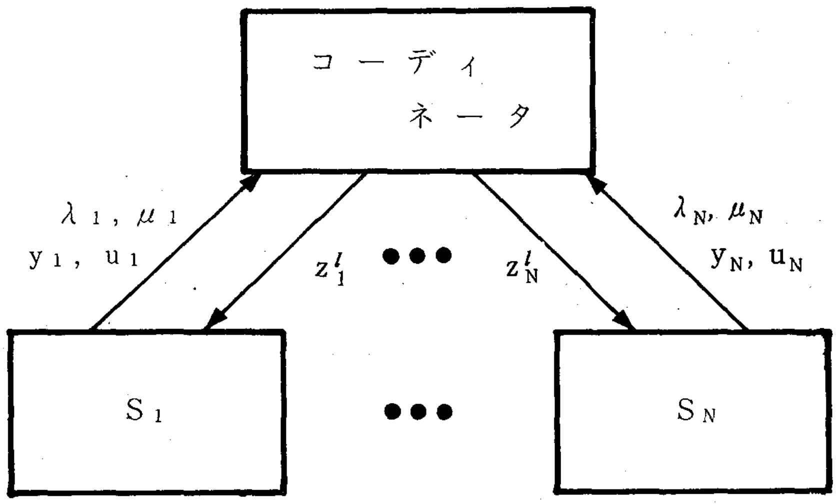

図７　Model Coordination Method

図5の水資源利用計画問題にこの Model coordination method を適用する。各自治体の最適化問題は与えられた $\hat{z}_i$, $i=2,3$ に対して,

$$\begin{array}{lll}
\text{自治体1：} & \text{Max.} & 1/2(a_1y_1^2+b_1u_1^2) \\
& \text{Sub. to} & y_1=z_1-u_1 \\
& & y_1=\hat{z}_2 \\
\text{自治体2：} & \text{Max.} & 1/2(a_2y_2^2+b_2u_2^2) \\
& \text{Sub. to} & y_2=\hat{z}_2-u_2 \\
& & y_2=\hat{z}_3 \\
\text{自治体3：} & \text{Max.} & 1/2(a_3y_3^2+b_3u_3^2) \\
& \text{Sub. to} & y_3=\hat{z}_3-u_3
\end{array}$$

各自治体について解くと最適解は次のようになる。

$$y^*=\begin{bmatrix} \hat{z}_2 \\ \hat{z}_3 \\ \dfrac{b_3}{a_3+b_3}\hat{z}_3 \end{bmatrix}$$

$$u^*=\begin{bmatrix} z_1-\hat{z}_2 \\ \hat{z}_2-\hat{z}_3 \\ \dfrac{a_3}{a_3+b_3}\hat{z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^*=\begin{bmatrix} b_1(z_1-\hat{z}_2) \\ b_2(\hat{z}_2-\hat{z}_3) \\ \dfrac{a_3b_3}{a_3+b_3}\hat{z}_3 \end{bmatrix}$$

$$\mu^*=\begin{bmatrix} -b_1z_1+(a_1+b_1)\hat{z}_2 \\ -b_2\hat{z}_2+(a_2+b_2)\hat{z}_3 \end{bmatrix}$$

これを解くことによって決定された λ_i, μ_i を用いてコーディネータは $\hat{z}_i$ を次のように計算する。

$$\hat{z}_i^{l+1}=\hat{z}_i^l+\varepsilon\cdot(\lambda_i^l+\mu_{i-1}^l),\quad i=2,3$$

これらを図示すると図8のようになる。

3.3 考　察

ここまで分割原理における Goal coordination method と Model coordination method の 解法を概観してきたが，分権的システムの立場から若干の考察を行う。

いずれの方法においてもコーディネータはサブシステム間の相互関係を調整するために設置されたもので，従来中央政府あるいは上位レベルの意思決定者などと「経済的解釈」されてきた。しかしながら企業組織などでは上位レベルの意思決定者は下位であるサブシステムの意思決定者よりも大局的で包括的な計画を作成し，その計画に基づいて統制を行い，結果の評価を行うものである。統制の中に相互関係の調整が含まれるかもしれないが，それが上位レベルの意思決定者の主たる職分ではない。最適化の過程においてもコーディネータは Goal coordination method では相互関係を表す変数zの匂配，経済的解釈によればzの潜在価格（shadow price）の計算を，Model coordination method ではzの値の計算のみ行っている。さらにさきの水資源利用計画問題においては，中央政府が自治体間の相互関係の調整を専ら行うとは考えられない。これらの場合，相互関係の調整にはサブシステム間の話し合いによって解決されると考える方がより自然である。次にサブシステムが直列に並んだ大規模システムを考える。分割原理では間接的な相互関係が存在する2つのサブシステムは，一方のサブシステムの変動を間に存在するサブシステムを介してのみ知ることができる。たとえば，図5の例では自治体1の取水量の変動は自治体2を介してのみ自治体3に伝わる。この場合，最適化の繰り返し過程で少なくとも1回の遅れが生じる。これはコーディネータが直接的な相互関係にあるサブシステム間の調整のみ行うためで，間接的な相互関係にあるサブシステム間の調整を行うことができない。図6，8のような場合，コーディネータの中に2つの調整機構が存在し，この間には何ら直接的な相互関係が存在しない。これを防ぐには，

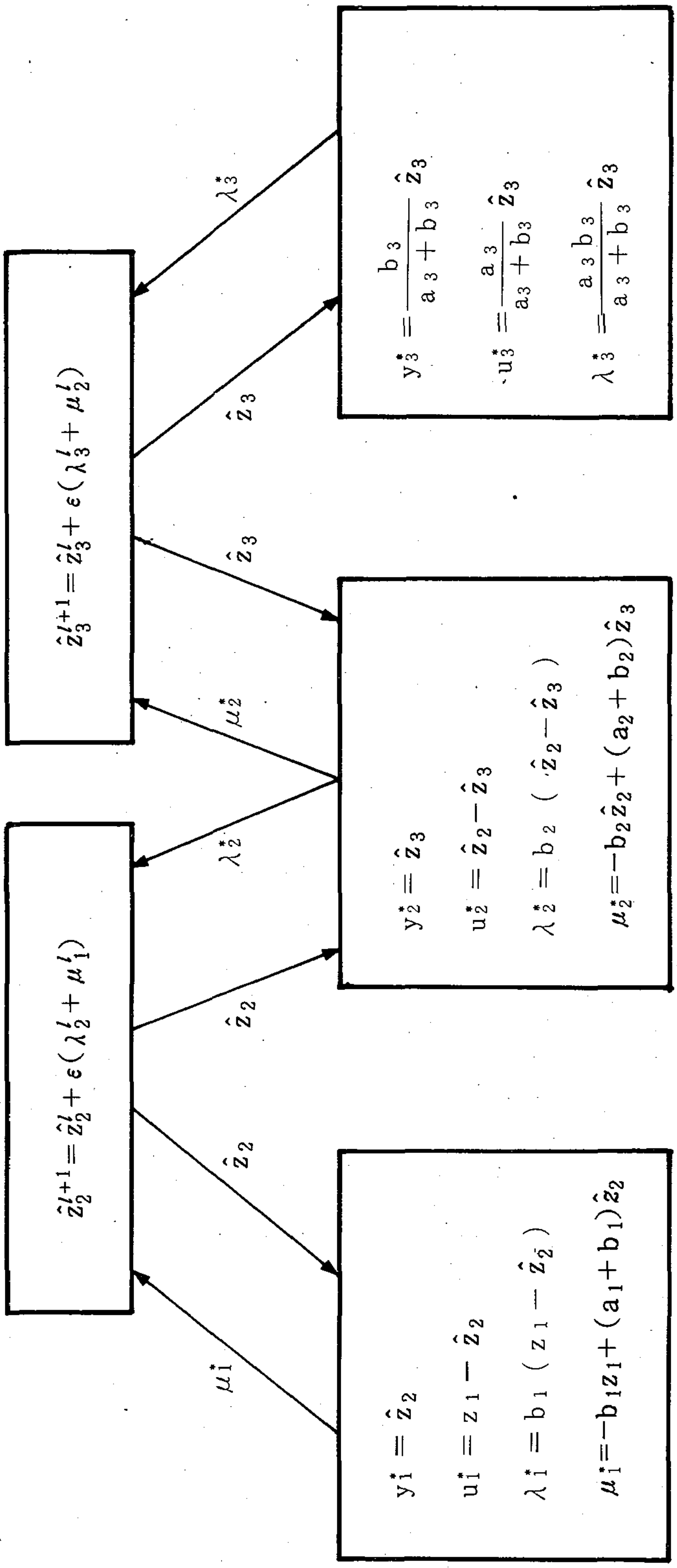

図8　Model Coordination Method による解

さらに上位レベルのコーディネータを設置し，2つの調整機構の間の間接的な相互関係を調整するようにしなければならない。これらのことより，分割原理は分権的システムを解明するには無理があるといえ，大規模システムの最適化を分権的に行うところにその意義がある。

4. 非協力ゲームによる分権的システム

4.1 情報交換

分割原理では，サブシステムは他のサブシステムの情報を直接知ることはない。これは各サブシステムの情報がコーディネータに集中しているためで，サブシステムはコーディネータがこれらの情報にもとづいて決定した調整変数を介して間接的にしかその変化を知ることができない。ところが決定に優先権のない非協力ゲームでは，サブシステム間で直接情報を交換するので，他のサブシステムの変化を直接知ることができる。このとき各サブシステムが持つ情報のすべてを交換するのか，あるいはその一部を交換するのかが問題となる。

もし各サブシステムが持つすべての情報を互いに交換すると，各サブシステムは同じ情報をもつことになる。この場合，これらの情報を用いて各サブシステムが最適化問題を作成すると，これはすべて同じ形になる。たとえば，前述した水資源利用計画問題を考える。各自治体は河川の流れを観測してその流量を知ることができるが，他の自治体を流れている部分の流量は当該自治体を通じてのみ知ることができるとする。そこで各自治体が観測した流量や効用関数，制約条件に関する情報のすべてを互いに交換すると，各自治体が作成する最適化問題は同一となる。もし効用関数の加法和が許されるさらば，3.2節の数値計算例で示した原問題と同様の最適化問題がサブシステムの数だけ存在することになる。この場合，同じ最適化問題をそれぞれ解くよりも一つの最適化問題を解けばよい。これは各サブシステムが持つ情報を一カ所に集中して，一つの最適化問題を作成し，それを解いた結果を各サブシステムに知らせるという集権的システムとなる。したがって，すべての情報を交換する場合，分権的システムよりも集権的システムの方が情報交換に要する費用や最適化問題を解く費

用が少なくてすみ効率的である。

他方，サブシステム間に情報交換が全くなされないとき，各サブシステムは他のサブシステムのとる行動を推測して自らの行動を決定しなければならない。この場合，各サブシステムのとる行動の不確実性が増すことになる。さらに各サブシステムは他のサブシステムの決定変数の値を推測し，その値にもとづいて相互関係を満たすように自らの決定変数の値を決めなければならない。このように推測にもとづいて決定される値はまた他のサブシステムによって推測されるので，サブシステム間で推測が繰り返されることになる。水資源利用計画問題では，各自治体は他の自治体の取水量を推測して効用関数の期待値を最大にする取水量を決定することになる。

つぎに各サブシステムが持つ情報の一部を交換する場合を考えてみる。各サブシステムが持つ情報には，最適化問題を解く前に既知であるものと解いた後に明らかになるものとがある。前者は目的関数や制約条件式の構造，あるいはデータとしてあらかじめ与えられる係数，過去の決定変数の値である。これらの情報は事前に情報交換することができる。後者は最適化問題を解くことによって決定される決定変数の値である。分権的システムは，各サブシステムが他のサブシステムとの相互関係を断ち切って独自に自らの決定変数の値を決定するものである。分割原理では相互関係の調整はコーディネータが行うが，非協力ゲームでは各サブシステムが持つ情報の一部を交換することによって相互関係

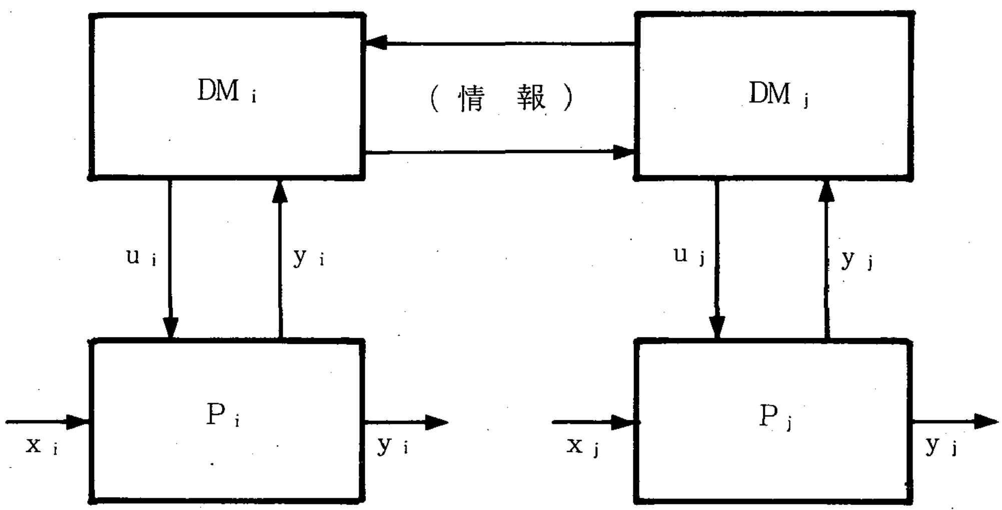

図9　情　報　交　換

の調整を行う（図９）。交換することのできる情報は先に述べた事前に知ることのできる情報である。この事前に知ることのできる情報を用いて，相互関係を満たすような各サブシステムの最適解を得る方法を次節で述べる。

4.2 非協力ゲームによる最適化

ｉ番目のサブシステムの最適化問題は次のようになる。

$$\text{Max.}\quad G_i(y_i,\ u_i,\ z_i) \tag{24}$$

$$\text{Sub. to}\quad y_i = P_i(u_i,\ z_i) \tag{25}$$

$$z_i = K_i(y,\ u) \tag{26}$$

式（26）を式（24),（25）の z_i の項に代入して整理すると，サブシステムの最適化問題はつぎのようになる。

$$\text{Max.}\quad G_i(y,\ u_1,\cdots,u_N) \tag{27}$$

$$\text{Sub. to}\quad y = P(u_1,\cdots,u_N) \tag{28}$$

式（24）～（26）の最適化問題では，相互関係はプロセスへの入力として式（26）で表されているが，式（27),（28）の最適化問題では，目的関数と状態方程式内に現れている。ｉ番目のサブシステムは，$\{u_j,\ i\neq j,\ j=1,\cdots,N\}$ が与えられているものとして，この問題を最適にするように決定変数 u_i と y_i を決定する。式（28）はシステム全体の状態方程式で，各サブシステムはシステム全体の状態方程式の構造がわかっているものとする。

いま

$$J_i(u_1,\cdots,u_N) \triangleq G_i(y,\ u_1,\cdots,u_N)$$

とする。$\forall u_i \in U_i,\ \ i=1,\cdots,N$ に対して，

$$J_i(u_1^*,\cdots,u_N^*) \geqq J_i(u_1^*,\cdots,u_{i-1}^*,\ u_i,\ u_{i+1}^*,\cdots,u_N^*) \tag{29}$$

であれば，このとき $u_i^* \in U_i$ は Nash 均衡解である［6］。 式（29）はＮコのサブシステムが相互関係を満たす最適解を得るためには，それぞれの最適化問題が同時に最適化されなければならないことを意味している。いいかえれば，他のサブシステムが Nash 均衡解を採用している限り，各サブシステムには Nash 均衡解を改良するような解が存在しないことである。この Nash 均

衡解を求めるために最適化問題（式（27），（28））に対する Lagrange 関数を次のように定義する。

$$L_i(y, u_1, \cdots, u_N, \lambda_i)$$
$$\triangleq G_i(y, u_i, \cdots, u_N) + \lambda_i^T(P(u_1, \ldots, u_N) - y)$$
$$= G_i(P(u_1, \cdots, u_N), u_1, \cdots, u_N) + \lambda_i^T(P(u_1, \cdots, u_N) - y)$$

これより最適性の必要条件は次のようになる。

$$\frac{\partial L_i}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} G_i(y^*, u_1^*, \cdots, u_N^*) - \lambda_i^* = 0 \tag{30}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial u_i} = \frac{\partial}{\partial u_i} P(u_1^*, \cdots, u_N^*)^T \frac{\partial}{\partial u_i} G_i(y^*, u_1^*, \cdots, u_N^*)$$
$$+ \lambda_i^{*T} \frac{\partial}{\partial u_i} P(u_1^*, \cdots, u_N^*) = 0 \tag{31}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i} = P(u_i^*, \cdots, u_N^*) - y^* = 0 \tag{32}$$

N コのサブシステムでこの必要条件を同時に満たす u_i^*, y^*, λ_i^* が存在するとき，解は Nash 均衡解となる。必要条件（式（30）～（32））を満たす Nash 均衡解は一般的に無限個存在する。しかし目的関数がある 2 次関数で状態方程式が線形のとき唯一存在する。この 2 次一線形モデルが次の形式で与えられているものとする。

$$\text{Max.} \quad 1/2(y^T Q_i y + \textstyle\sum_{j=1}^N u_j^T R_{ij} u_j) \tag{33}$$

$$\text{Sub. to} \quad y = z_0 + \textstyle\sum_{j=1}^N B_j u_j \tag{34}$$

ここで Q_i は対称行列，$R_{ii} > 0$，$z_0 = (z_1, z_1, z_1)^T$ であるとする。このとき Lagrange 関数は次のようになる。

$$L_i(y, u_1, \cdots, u_N, \lambda_i)$$
$$\triangleq 1/2(y^T Q_i y + \textstyle\sum_{j=1}^N u_j^T R_{ij} u_j) + \lambda_i^T(z_0 + \textstyle\sum_{j=1}^N B_j u_j - y)$$
$$= 1/2((z_0 + \textstyle\sum_{j=1}^N B_j u_j)^T Q_i (z_0 + \textstyle\sum_{j=1}^N B_j u_j)$$
$$+ \textstyle\sum_{j=1}^N u_j^T R_{ij} u_j) + \lambda_i^T(z_0 + \textstyle\sum_{j=1}^N B_j u_j - y)$$

必要条件は，式（30）～（32）より

$$\frac{\partial L_i}{\partial y} = Q_i y^* - \lambda_i^* = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial u_i} = B_i^T Q_i y^* + R_{ii} u_i^* + B_i^T \lambda_i^* = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i} = z_0 + \sum_{j=1}^{N} B_j u_j^* - y^* = 0 \tag{37}$$

となる。これより，

$$u_i^* = -2R_{ii}^{-1} B_i^T Q_i \Gamma^{-1} z_0 \tag{38}$$

$$y^* = \Gamma^{-1} z_0 \tag{39}$$

$$\lambda_i^* = Q_i \Gamma^{-1} z_0 \tag{40}$$

を得る。ここで，

$$\Gamma = (I - 2\sum_{j=1}^{N} \dot{B}_j R_{jj}^{-1} B_j^T Q_j)$$

である。この結果を見ると行列 B, R, Q と初期値 z_0 はいずれも事前に知ることができるものである。したがって，各サブシステムは他のサブシステムの最適化の結果を知ることなしに自らの決定変数の値を決めることができる。

水資源利用計画問題にこの結果を適用する。まず情報交換が全くなされていないとき，自治体 i は上流の流量 y_{i-1}^0 を与件として次の問題を解く。ただし，簡単化のために y_{i-1}^0 は確定値とする。

$$\text{Max.} \quad 1/2(a_i y_i^2 + b_i u_i^2)$$

$$\text{Sub. to} \quad y_i = y_{i-1}^0 - u_i$$

ここで $y_0^0 = z_1$ である。この問題の Lagrange 関数は次のようになる。

$$L_i(y_i, u_i, \lambda_i) \triangleq 1/2(a_i y_i^2 + b_i u_i^2) + \lambda_i (y_{i-1}^0 - u_i - y_i)$$

これより必要条件は，

$$\frac{\partial L_i}{\partial y} = a_i y_i^* - \lambda_i^* = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial u_i} = -a_i y^* + b_i u_i^* - \lambda_i^* = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i} = y_{i-1}^0 - u_i^* - y_i^* = 0, \quad i = 1, 2, 3$$

となる。これらの式より最適解は次のようになる。

$$u_i^* = \frac{2a_i}{2a_i + b_i} y_{i-1}^0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$y_i^* = \frac{b_i}{2a_i + b_i} y_{i-1}^0, \quad i = 1, 2, 3$$

$$\lambda_i^* = \frac{a_i b_i}{2a_i + b_i} y_{i-1}^0, \quad i = 1, 2, 3$$

これを図示すると図10のようになる。

情報交換を行う場合を考える。そのために行列を次のように定義する。

Q_i: i 行 i 列の要素が a_i で他の要素が 0 の 3 × 3 行列，$R_{ii} = [b_i]$，$B_1 = (1, 1, 1)^T$，$B_2 = (0, 1, 1)^T$，$B_3 = (0, 0, 1)^T$。

これらを用いて自治体 i の最適化問題を定式化すると次のようになる。

$$\text{Max.} \quad 1/2(y^T Q_i y + b_i u_i^2)$$

$$\text{Sub. to} \quad y = z_0 + \textstyle\sum_{j=1}^{3} B_j u_j$$

Q_i は対称行列，$R_{ii} = [b_i] > 0$ であるから，式（38）～（40）の結果がそのまま適用でき，次のようになる。

$$u_i^* = 2/b_i B_i^T Q_i \Gamma^{-1} z_0$$

$$y^* = \Gamma^{-1} z_0$$

$$\lambda_i^* = Q_i \Gamma^{-1} z_0$$

ここで，

$$\Gamma = (I + 2\textstyle\sum_{j=1}^{3} 1/b_j B_j B_j^T Q_j)$$

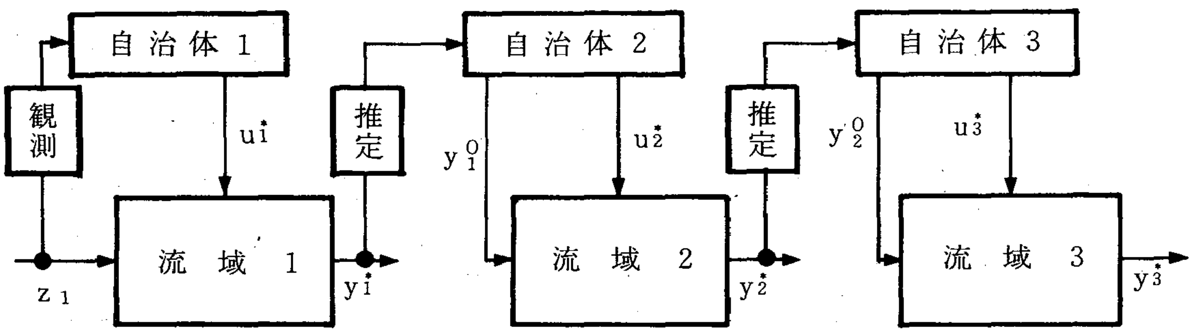

図10 情報交換のない水資源利用計画問題

である。これを計算すると次のようになる。

$$\Gamma=\begin{bmatrix} \dfrac{2a_1+b_1}{b_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{2a_1}{b_1} & \dfrac{2a_2+b_2}{b_2} & 0 \\ \dfrac{2a_1}{b_1} & \dfrac{2a_2}{b_2} & \dfrac{2a_3+b_3}{b_3} \end{bmatrix}$$

これの逆行列は存在して，

$$\Gamma^{-1}=\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{2a_1+b_1} & 0 & 0 \\ \dfrac{-b_1b_2}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)} & \dfrac{b_2}{2a_2+b_2} & 0 \\ \dfrac{-2a_1b_2b_3}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)(2a_3+b_3)} & \dfrac{-2a_2b_3}{(2a_2+b_2)(2a_3+b_3)} & \dfrac{b_3}{2a_3+b_3} \end{bmatrix}$$

これより

$$y^*=\begin{bmatrix} \dfrac{b_1}{2a_1+b_1}z_1 \\ \dfrac{b_1b_2}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)}z_1 \\ \dfrac{b_1b_2b_3}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)(2a_3+b_3)}z_1 \end{bmatrix}$$

$$u^*=\begin{bmatrix} \dfrac{2a_1}{2a_1+b_1}z_1 \\ \dfrac{2a_2b_1}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)}z_1 \\ \dfrac{2a_3b_1b_2}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)(2a_3+b_3)}z_1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^*=\begin{bmatrix} \dfrac{a_1b_1}{2a_1+b_1}z_1 \\ \dfrac{a_2b_1b_2}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)}z_1 \\ \dfrac{a_3b_1b_2b_3}{(2a_1+b_1)(2a_2+b_2)(2a_3+b_3)}z_1 \end{bmatrix}$$

となる。これより，各自治体は事前に互いの効用関数の係数を伝えておくと，流量の初期値 z_0 がわかれば，他の自治体が決定した取水量を知ることなしに自らの最適な取水量を決定することができる（図11)。

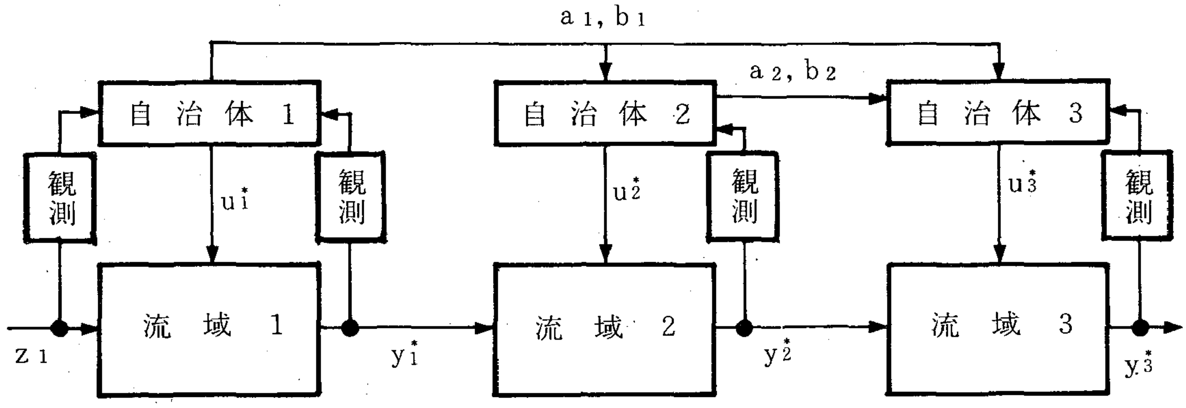

図11 情報交換がある水資源利用計画問題

4.3 考 察

非協力ゲームによる分権的システムは，優先順位がない同一レベルのサブシステムにより構成され，それぞれに独自のＤＭを有し固有の目的関数を持っているところにその特徴がある。またサブシステムは，他のサブシステムの不完全な情報と自らの制御範囲に関する情報を持つ。このような分権的システムでは，各サブシステムが固有の目的関数を持つために評価基準の異なる目的に関する多目的制御が可能となる。またあるサブシステムに不都合（たとえば故障）が生じた場合，残りのサブシステムの機能を有効に働かせることによってシステム全体の機能の低下をある程度防ぐことができる。この結果，システムの信頼性や安全性の向上が期待でき，さらにサブシステムの追加，削除が容易でシステムの柔軟性が増す。

しかしながら，分権的システムが本来有する特徴を認めることによってもたらされる制御性能の低下やシステムの煩雑さ，無計画な肥大化を招く可能性もある。さらに Nash 均衡解が唯一存在するのは，ある限られた２次一線形モデルの場合のみで，一般的には集合として解が得られる。これはサブシステム間の調整を行うコーディネータが存在しないために，サブシステム間での話し合いがつかない場合である。このようなことは実際によく見受けられる。Nash 均

衡解の集合の中から一つの解を決定する方法として Nash 均衡解の正規性 [7] が有力な概念となるかもしれない。

本論では相互関係として直接的な相互関係であるプロセス干渉の場合について述べてきた。これはサブシステム間の入出力になんらかの競合関係が存在していることを前提としている。間接的な相互関係であるシステム干渉の場合の共通資源の配分問題では，限られた資源の取得に関してサブシステム間に競合状態が存在する。非協力ゲームではコーディネータが存在しないためにサブシステムが資源の奪い合いを演じることによってシステムの制御性能を低下させるかもしれない。このような場合，サブシステムが協力することによって公正な資源配分を行う協力ゲームによるアプローチが有効であると思われる。

分割原理では Lagrange 乗数か相互関係を表す変数のいずれかを与えられたものとしてサブシステムが独自の最適化問題を解くが，非協力ゲームでは他のサブシステムの決定変数の値が与えられたものとして独自の最適化問題を解くものであった。Nash 均衡解は一般的には無限個の解の集合として得られるが，同じ問題を分割原理で解いたときに得られる解との関係，ある 2 次一線形モデルのとき唯一存在する Nash 均衡解との関係，あるいは分割原理における収束性の問題との関係などの比較検討は，先の協力ゲームによるアプローチとともに今後の課題としておく。

5. 結　言

本論では分権的システムに対する分割原理によるアプローチと非協力ゲームによるアプローチについて述べた。分割原理によるアプローチは，Goal coordination method と Model coordination method についてその最適化法と分権的システムとしての解釈を述べた。そこでは，分割原理は分権的システムを解明することには適していないこのを明らかにした。しかしこれは大規模システムに対する分割原理の有効性を必ずしも否定するものではない。実際に電力システムや道路交通の制御などに適用されて効果な結果が得られていることが報告されている [8]。しかしながら，これらは大規模システムを分権的に最適化しているだけであり，分権的システムそのものを取り扱っているわけ

ではない。

非協力ゲームによるアプローチでは，モデルが分権的システムとして構成されているのでそれを解明するには有効である。本論では，非協力ゲームによる最適化法を述べ分権的システムを取り扱うのに有効であることを明らかにした。しかしサブシステム間を調整するコーディネータが存在しないために，ある2次一線形モデル以外では Nash 均衡解は無限個の解の集合となる。集合の中から一つの Nash 均衡解を決定する有効な手段はないが，Nash 均衡解の正規性を利用することは有効であるかもしれない。

参考文献

[1] J. Bernussou and A. Titli: Interconnected Dynamical Systems: Stability, Decomposition and Decentralisation, ch. 1, pp. 3～86, 1982, North-Holand.

[2] 高原康彦：システム工学の理論, pp. 47～83, 1974, 日刊工業新聞社

[3] 同上, pp. 303～340.

[4] 奥田和重：〝大規模システムの資源配分型統合法について,〟商学討究, Vol. 35 No. 2, 3, pp. 165～186, 1985.

[5] M. G. Singh and A. Titli: Systems: Decomposition, Optimisation and Control, ch. 4, pp. 127～199, 1978, Pergamon.

[6] J. Nash: "Non-Cooperative Games," Annals of Mathematics, Vol. 54, No. 2, 1951.

[7] 志水清孝：多目的と競争の理論, pp. 157～188, 1982, 共立出版.

[8] M. G. Singh and A. Titli (eds.): Handbook of Large Scale Systems Engineering Applications, 1979, North-Holland.