先物市場と競争企業の投資決定*

板 谷 淳 一

1. はじめに

今日の債券，株式を中心とする金融先物市場や農産物や貴金属などの商品先物市場の発達は，企業や家計の不確実性下の経済行動に対して大きな影響を持つようになった。特に，先物市場の存在は経済主体に対して不確実性に対するヘッジ（hedge）のための有効な手段を提供する。

本稿では，商品（生産物）の先物市場が利用可能であるとき，不確実な生産物の販売価格に直面する企業の投資決定及び生産決定を考察する。

Lealand (1972) や Sandmo (1971) らは，先物市場が存在しない時，不確実な生産物の販売価格に直面する企業の産出量決定を分析した。彼らの結果によれば，企業が危険回避者である限り，均衡産出量は確実性下のそれより小さくなり，販売価格に関する不確実性の度合（確率関数の分散）の増加あるいは企業の絶対危険回避度の増加は均衡産出量の減少をもたらすことを証明した。

他方，Halthauzen (1979) や Feder, Just and Schmitz (1980) らは，生産物の先物市場が存在するとき，企業の生産決定，特に，産出量の決定が先物市場の価格によってのみ決まり，スポット市場で決まる価格に関する主観的確率分布や企業の危険に関する態度から独立していることを明らかにした。言いかえると，先物市場が利用可能なとき，企業の生産決定は不確実性の影響を全く被らないことを示した（これは，separation property と呼ばれている)。

* 本稿を作成するにあたり，小樽商科大学の土曜研究会の参加メンバーの方々より有益なコメントをいただいたことを感謝したい。もちろん，本稿に含まれる誤りはすべて筆者の責任である。

言うまでもなく以上の著者たちの分析は，1期間分析あるいは静学的分析である。しかし，企業が生産する財の中には長期の生産過程を必要とし，生産要素が長期にわたり企業内部に固定化されるようなものが存在する。さらに，生産要素の中にも資本のように投入水準の調整に時間と費用を要するものがある。このような場合，投資決定が企業の生産活動にとって重要な決定変数として加わってくる。同時に生産活動が長期に及ぶとき，企業が直面する不確実性は一般的に増大する傾向がある。そして，不確実性が増大するほど，企業にとって先物市場を使おうとするインセンティブが強くなると予想される。つまり，生産過程の長期化により，企業は先物市場の利用をより積極的に考慮するようになる。

以上の考察から，先物取引決定と投資決定を同時に分析することは，不確実性に直面する長期の企業モデルにおいて重要かつ現実的な研究課題と思われる。従って，本稿では，Haltohauzen らの分析を多期間に拡張して，先物市場が利用可能な時，企業の長期にわたる最適産出決定および最適投資決定に関する分析を行う。

この論文の構成と結論は以下のようにまとめられる。次節では，投資活動を行う危険回避型の競争企業モデルを構築して，最適労働投入量及び最適投資量を決める1階条件を導出する。第3節では，危険回避型の競争企業の投資水準が，先物市場が存在するとき，不確実性から独立であるかどうかを調べる。われわれの考察によれば，最適投資の水準は，先物市場が存在していても不確実性の影響を被り，特に価格不確実性の増加は今期の最適投資水準を減少させ，それが次期の資本投入量の減少を導き，さらに，このことが次期の産出量を減少させることが示される。すなわち，先物市場が存在しても，投資活動を行う危険回避型の競争企業はもはや不確実性から独立でなくなることが証明される。第5節では，若刊のコメントが与えられる。付録では，最適投資決定のための1階条件の導出が詳細に与えられる。

2. モデル

本節では，われわれは有限な計画期間にわたり生産活動を行う競争企業を想定する。計画期間の長さをT期間とする。各期間tにおいて，企業は資本投入 (K_t) 及び労働投入 (L_t) を用いて，生産物 (Y_t) を生産する。その時用いられる生産技術は次のような通時的に不変な生産関数によって書き表せる。

$$Y_t = F(K_t,\ L_t) \tag{1}$$

この関数は次のような標準的仮定を満足するものとする。2階微分可能な連続関数，凹かつ規模に関して収穫一定，各生産要素に関する限界生産性の非負性。さらに，非本質的な複雑化を避けるために，企業は在庫を持たないものとする。

企業は今期に生産された生産物を今期のスポット市場あるいは先物市場で売ることができると想定する。その時，スポット市場で決まる価格 (P_t) は確率変数であり，先物市場で決まる価格 (P^f_t) は確定的であるとする。さらに，毎期のスポット市場の価格は次のように外生的に与えられると仮定する。

$$P_t = \overline{P} + \theta_t \qquad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{2}$$

ただし，$\overline{P}$は一定な平均価格，θ_t はtに関して独立かつ同一な確率分布をもつ確率変数，$E(\theta_t) = 0$ かつ $E(\theta_t^2) = \sigma^2$ とする。企業は，また賃金率 W_t のもとで毎期，労働市場から労働を雇用するものとする。生産物市場の不確実性に焦点を合わせるために，各期の賃金率 W_t は計画期間中，非確率的かつ一定な外生変数とする。

企業はさらに投資活動を行うが，その際，I_t (≥ 0) の投資をおこなうと，$C(I_t)$ の調整費用を支出しなければならないと仮定する[(1)]。ただし，投資の調整費用関数は次のような性質を持つものとする。

$$C(0) = 0,\quad C'(I) > 0 \quad \text{for } I \geq 0,\quad C''(I) > 0. \tag{3}$$

資本は一定の率 ($0 < \delta < 1$) で減価償却するものとする。その結果，資本ス

(1) 本稿で定義されている投資の調整費用関数は，投資財の購入費用を含む。

トックの調整方程式は,

$$K_{t+1}=I_t+(1-\delta)K_t \qquad t=1,\ 2,\ \dots,\ T \tag{4}$$

K_1 : given

で与えられる。ただし, K_1 は企業が初期に保有している資本ストックを表す。さらに, T 期末の残存資本ストック量に対して次のような制約があるものとする。

$$K_{T+1}\leqq \overline{K} \tag{5}$$

われわれは企業がつぎのようなネット・キッシュ・フローの現在価値の総額に関する期待効用を最大化するように雇用及び投資計画を第1期に選択すると想定する。

$$E_1U\left(\sum_{t=1}^{T}R^t\Pi_t\right) \tag{6}$$

ただし, $\Pi_t=P_t(Y_t-h_t)+P_t^fh_t-wL_t-C(I_t)$, $(1/R)-1$ は1期間の利子率, h_t は先物市場で販売される量, E_1 は第1期で利用可能な情報量に関する条件付き期待値オペレーターを表す。われわれが対象とする企業は, 危険回避型の企業なので, 企業のリスクに対する態度は, 次のような特性をもつ効用関数によって示される。

$$U'(.)>0 \qquad U''(.)<0 \tag{7}$$

分析上の簡便化のために, 次のような短期利潤の最大値関数を定義する (Hartman (1972))[(2)] 。ただし, 内点解の存在を仮定する。

$$f^*(K_t,\ P_t)=\max_{L_t}\{P_tF(K_t,\ L_t)-wL_t\},\ t=1,\ 2,\ \dots,\ T \tag{8}$$

生産関数の一次同次性から,

$$f^*(K_t,\ P_t)=K_tf(P_t) \qquad t=1,\ 2,\ \dots,\ T \tag{9}$$

と表すことができる。ただし, $f(P_t)$ は凸関数であり, かつ $f^*(.)$ は K_t と P_t の

(2) 投資計画は計画期間の当初に生産物市場の不確実な価格が実現する前に決定される。また, 労働投入は各期の確率変数であるスポット価格が実現した後で決定される。このような投資決定を事前的決定, 労働投入決定を事後的決定とも呼ぶ。

増加関数である。

（9）式をを目的関数（6）に代入して，整理すると，次のような目的関数が得られる。

$$E_1\{U[\sum_{t=1}^{T} R^t[K_t f(P_t) - P_t h_t + P_t^f h_t - C(I_t)]]\} \tag{10}$$

従って，企業の目的は，（2），（3），（4），（5）の制約下で，(10) を最大化する投資計画及び先物市場への販売計画 $\{I_t,\ h_t\}_{t=1}^{T}$を選択することと同値になる。この問題を解くためには，確率的動的計画法(stochastic dynamic programming)を適用すればよい(詳しい解き方については付録みよ)。内点解の存在を仮定すれば，最適投資水準を決める1階条件はつぎのようになる(3)。

$$E\{U'(.)[R(f(P_{t+1}) + (1-\delta)C'(I_{t+1})) - C'(I_t)]\} = 0$$
$$t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{11}$$

他方，先物市場への最適販売量の1階条件は，

$$E\{U'(.)(P_{t+1}^f - P_{t+1})\} = 0 \qquad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{12}$$

で与えられる。

参考解として，危険中立型の企業の最適投資の1階条件を与えておく。(11) 式は次のように修正される。

$$E\{[R(f(P_{t+1}) + (1-\delta)C'(I_{t+1})) - C'(I_t)]\} = 0$$
$$t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{13}$$

もし $EP_{t+1} < P_{t+1}^f$ ならば，危険中立型の企業はその期に生産された全ての生産物を先物市場で販売する。その結果，(13) 式の中の P_{t+1} を P_{t+1}^f に入れ換えて，(13) 式は生産物市場の不確実性より完全に独立になる。もし $EP_{t+1} > P_{t+1}^f$

(3) 利潤最大化の2階条件が満足されていることを確認するために，次のような関数を定義する。

$$g(I_t) = E\{U'(.)[R(f(P_{t+1}) + (1-\delta)C'(I_{t+1})) - C'(I_t)]\}.$$

$g(I_t)$ を I_t で微分すると，

$$g'(I_t) = E\{U''(.)[R(f(P_{t+1}) + (1-\delta)C'(I_{t+1})) - C(I_t)]^2 + R[-C''(I_t)]\} < 0$$

をえる。

ならば，(13) 式そのものが最適投資を決める。このとき，投資決定は先物市場が存在していても，生産物市場の不確実性の影響を被ることになる。危険中立型の企業の投資決定に関する詳しい議論は，Hartman (1972) に譲り，われわれは次節において先物市場が存在する時，危険回避型の企業の投資決定を考察する。

3．危険回避型企業の産出決定及び投資決定

(12) 式を (11) 式に代入すると，われわれは次のような結果を得る。

$$E\{f(P_{t+1})+(1-\delta)C'(I_{t+1})-(C'(I_t)/R)\}$$
$$=-\mathrm{cov}[U'(\,.\,),f(P_{t+1})]/(REU'(\,.\,))$$
$$=\frac{-\mathrm{cov}[U'(\,.\,),f(P_{t+1})](P^f_{t+1}-EP_{t+1})}{R\mathrm{cov}[U'(\,.\,),P_{t+1}]} \tag{14}$$

(14) 式を観察することによりわれわれは次のことが容易にわかる。先物市場が存在するにも関わらず，企業の投資決定は明らかに生産物価格の不確実性から独立ではない。さらに，投資の最適水準が不確実性の影響を被るため，ストック調整式 (4) 式を通じて，次期の資本ストック (K_{t+1}) の水準も影響されることになる。この結果，次期の産出量水準も不確実性の影響を受けることになる。したがって，Haltohauzen らによって確立された生産決定と先物取引決定の間の分離性 (separation property) は，投資決定を含む企業の動学モデルでは成立しなくなると言える。

Honda (1983) や Haruna (1986) のモデルでは，生産物価格の不確実性に加えて，生産技術に不確実性を導入して，separation property の不成立を示した。他方，Katz (1984) は先物市場に不完全競争の仮定を導入して，同様に，separation property の不成立を主張した。しかし，われわれのモデルではそのような付加的な不確実性や市場の不完全性をわざわざ導入しなくとも，Haltohauzenの設定により近い競争企業モデルで separation property の不成立が示されたと言える。

さらに，(14) 式の共分散項の符号が危険回避型企業の最適投資水準と危険中

立型企業の最適投資水準との大小関係を決める上で重要な役割を果たす。$EU' > 0$（あるいは $(P^f_{t+1} - EP_{t+1})/\mathrm{cov}[U'(.), P_{t+1}] > 0$）[4]なので，(14)式は次の関係式を意味する。

$$E[f(P_{t+1})] \gtreqless (C'(I_t)/R) - (1-\delta)C'(I_{t+1})$$
$$\text{if and only if } \mathrm{cov}[U'(.), f(P_{t+1})] \lesseqgtr 0 \qquad (15)$$

さらに，次の2つの微係数を計算して，$U'' < 0$ と $f' > 0$ を使うと，

$$(\partial U'/\partial\theta_{t+1}) = U'' \cdot K_{t+1} \cdot (\partial f/\partial P_{t+1}) \cdot (\partial P_{t+1}/\partial\theta_{t+1}) < 0$$
$$(\partial f/\partial\theta_{t+1}) = (\partial f/\partial P_{t+1}) \cdot (\partial P_{t+1}/\partial\theta_{t+1}) > 0 \qquad (16)$$

を得る。したがって，(15) 式の共分散項の符号が負であることがわかる。

最終的に，われわれは次の不等式を得る。

$$E[f(P_{t+1})] > (C'(I_t)/R) - (1-\delta)C'(I_{t+1}) \qquad (17)$$

(17) 式の経済的解釈は次のように与えられる。資本1単位の増加によりもたらされる利潤増加分（資本に関する限界利潤）の割引現在価値が投資の限界費用マイナス投資の置換費用より大きくなるように最適投資水準が決めらることを意味する。すなわち，(14) 式で決まる投資水準と，(13) 式で決まる危険中立的企業の最適投資水準を比べると，明らかに，危険回避型の企業の投資水準が低くなる。さらに，(4) 式より今期の投資水準が次期の資本投入量を決定するため，次期の資本投入量も小さくなり，結果として，次期の産出量も小さくなる。以上の結果は，先物市場が存在するにもかかわらず，Halthausen の主張する separation property が成立せず，むしろ Lealand や Sandomo らの先物市場が存在しない場合の結果と一致する。

次に，特殊なケースとして，$f(P_{t+1})$ が P_{t+1} の1次関数の場合を考えてみる[5]。すなわち，

---

(4) もし $EP_{t+1} < P^f_{t+1}$ ならば，危険回避型の企業はけっしてスポット市場を利用しないで，全ての生産物を先物市場に供給する。当然，同じことが，危険中立型の企業にもあてはまる。

(5) このような生産技術として，次のようなものが考えられる。レオンチェフ型生産技術，あるいは資本だけを生産要素として用いる生産技術など。

$$f(P_{t+1}) = aP_{t+1} + b \qquad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{18}$$

ただし，aとbは非確率的な定数。(18) 式を (14) 式に代入して整理すると，

$$aP^{f}_{t+1} + b + (1-\delta)C'(I_{t+1}) - (C'(I_t)/R) = 0 \qquad t = 1,\ 2,\ \ldots,\ T \tag{19}$$

を得る。この場合には，最適投資水準は生産物価格の不確実性より独立になり，先物市場は危険回避型の企業の生産物に対して，ヘッジ (hedge) の役割を果たしているといえる[(6)]。

しかし，上記の結果はあくまで資本の限界利潤関数 ($f(P_{t+1})$) の P_{t+1} に関して線形という特殊な場合にのみ有効な結果であり，$f(P_{t+1})$ がより一般的な形，すなわち，非線形な $f(P_{t+1})$ に対しては先物市場が存在しても，Haltohazen の主張する separation property は成立しないと言える。

4. むすび

この論文の主要な結果の要約と簡単なコメントを与える。第一に，生産物市場の販売価格が不確実であり，かつその財に対して先物市場が完備していても，危険回避的な競争企業が長期にわたり投資活動を行うとき，もはや，先物市場は生産決定に対して，ヘッジ (hedge) の役割を果たさず，企業の最適産出決定及び最適投資決定は不確実性から独立ではなくなる。すなわち，投資決定を行う動学的な企業モデルでは，一般に separation property は不成立である。

第二に，上記の結果が生じる主要な理由は，資本に関する限界短期利潤関数

---

(6) もし P_{t+1} が独立かつ同一な確率分布を持つ確率関数でないとき，例えば，定常的な1階の自己回帰過程ならば，すなわち，$P_{t+1} - \overline{P} = \alpha(P_t - \overline{P}) + \theta_{t+1}$，ただし，$|\alpha| < 1$，$E(\theta_{t+1}) = 0$，$E(\theta_{t+1}) = \sigma^2$，$E(\theta_{t+1}\theta_s) = 0$ if $t+1 \neq s$，$\overline{P}$ は平均価格で，かつ $f(P_{t+1})$ が P_{t+1} について線形であっても，separation property が成立しないことが容易に確かめられる。

がスポット市場での販売価格に対して非線形（凸関数）であることによる。この関数の非線形性は，２つの理由による。一つは，生産技術が要素投入に対して一般に非線形的であること。二つには，資本投入（あるいは投資）と労働投入の投入時点に関するタイミングのズレの存在。資本投入に比べて，労働投入はより伸縮的でかつ調整にかかる費用がより少なくて済むため，事後的な調整が容易であるという想定は単に分析を容易にするためのものばかりではなく，きわめて現実性の高い仮定と言える。したがって，本稿のモデルのような要素投入の扱い方はかなり一般性があると主張できる(7)。

第三に，資本に関する限界短期利潤関数がスポット価格に対して線形であれば，先物市場は危険回避型企業の生産物に対して，ヘッジの機能を果たす。つまり，企業の産出決定と投資決定は生産物価格の不確実性より独立になり，separation property が成り立つ。しかし，このような場合が成立するのは，きわめて強い仮定が生産関数になされた場合のみであることに注意しなければならない。

第四に，限界利潤関数がスポット価格の非線形関数であるという特性があれば，われわれと同じ結果がえられるので，われわれと異なる企業モデルの設定からも separation property の不成立を示すことが可能である。たとえば，スポット市場で企業が競争的であるという仮定にかえて，販売量の大きさがその市場価格に影響するような不完全競争的なスポット市場を想定すればよい。このような意味において，われわれの投資決定モデルは非線形的な限界利潤関数を導出するための１例とも言える。

付　　録

本文中の（11）式の導出：

(7) より一般的には長期雇用契約の存在，新規雇用のリクルーティング費用や訓練費用の存在等により，労働投入の調整にも時間と費用がかかるかも知れない。この方向へのモデルの拡張は別の機会に譲りたい。

本文中の目的関数（10）式を（2），（3），（4），（5）式をを制約条件として解くことは次のような Bellman equation を解くことと同値である。

$$E\{U(V(K_t)\} = \mathrm{Max}E\{U[K_t f(P_{t+1}) - P_t h_t - P^f_t h_t - C(I_t) + RV(K_{t+1})]\} \tag{A 1}$$

sujecto to（2），（3），（4），（5）

（A 1）式を K_t で微分すると，

$$E\{U' \cdot V'(K_t)\} = E\{U' \cdot [f(P_t) + (1-\delta)RV'(K_{t+1})]\} \tag{A 2}$$

を得る。この式を1期進ませると，

$$E\{U' \cdot V'(K_{t+1})\} = E\{U' \cdot [f(P_{t+1}) + (1-\delta)RV'(K_{t+2})]\} \tag{A 3}$$

を得る。次に，（A 1）を I_t で微分すると，

$$RE\{U' \cdot V'(K_{t+1})\} = C'(I_t) \cdot EU' \tag{A 4}$$

を得る。（A 4）式を1期進ませると，

$$RE\{U' \cdot V'(K_{t+2})\} = C'(I_{t+1}) \cdot EU' \tag{A 5}$$

が得られる。（A 5）式を（A 3）式に代入する。

$$E\{U' \cdot V'(K_{t+1})\} = E\{U' \cdot [f(P_{t+1}) + (1-\delta)C'(I_{t+1})]\} \tag{A 6}$$

さらに，（A 6）式を（A 4）式に代入すると，

$$RE\{U' \cdot [f(P_{t+1}) + (1-\delta)C'(I_{t+1})]\} = C'(I_t) \cdot EU'$$

が得られる。この式を整理すると本文中の（11）式が得られる。

References

Abel, A. B., 1974, The effects of uncertrainty on investment and the expected long-run capital stock, *Journal of Economic Dynamics and Control* 7, 39 − 53.

Feder, G. E. Just and A. Schmitz, 1980. Future markets and the theory of the firm under price uncertainty, *Quarterly Journal of Economics* 94, March, 317 − 328.

Hartman, R., 1972, The effect of price and cost uncertainty on investment, *Journal of Economic Theory* 5, 258 − 266.

Haruna, S., 1986, On the hedging and output behavior of the competitive cooperative firm under price and production uncertainty, *Economics Letters* 22, 159 – 163.

Holthausen, D. M., 1979, Hedging and the competitive firm under price uncertainty, *American Economic Review* 71, Sep., 753 – 757.

Honda, Y., 1983, Production uncertainty and the input condition of the competitive firm facing the futures market, *Economics Letters* 11, 87 – 92.

Katz, E., 1984, The firm and price hedging in an imperfect market, *International Economic Review* 25, 215 – 219.

Lealand, H. E., 1972 Theory of the firm facing uncertain demand, *American Economic Review* 62, 278 – 291.

Sandmo, C. A., 1971 On the theory of the competitive firm under price uncertainty, *American Economic Review* 61, 67 – 63.