階層的意思決定法（AHP）をめぐって

若　林　信　夫

1．序　　論

意思決定は，通常，複数個の矛盾した基準のもとで評価された複数個の代替案の中から最良のものを選択することに特徴がある。その選択のための手法として多数のものが提案されているが，最近，階層的意思決定法，いわゆるAHP (Analytic Hierarchy Process) が注目を浴びている。従来の手法，例えば，デルファイ法やSMART法が論理的，公理的基礎が脆弱であったのに対し，AHPは，より強固であるようにみえる。AHPを用いれば，複数個の矛盾した基準，複数個の代替案，複数人の行為者や当事者の間の合意形成的な意思決定が導かれるという。しかし，周知の如く，ケネス・アロウに代表される社会的選択理論では，複数個の基準のもとでは，そのような選択関数は論理的に存在し得ないことが示されている。両者の見解は挑戦的にみえるが実際には前者 (AHP) は後者（社会的選択理論）で要求されるような推移律も多数決原理も前提としないのである。AHPは，合意形成を得るための決定支援の一手段であるにすぎないが，社会的選択理論を構成するための新しい見方を与えているように思われる。

本稿の目的は，AHP（階層的意思決定法）の論理的基礎を明らかにし，社会的選択理論の操作的な側面に迫ってみることである。

階層的意思決定法（AHP）は，トマス・L・サーティ[(1)]により1970年代後半

(1). トマス・L・サーティ（Thomas L. Saaty）は1918年生れ，現在，ピッツバーグ大学経営大学院の教授。イェール大学で数学の博士号を取得後，ペンシルバニア大学に長く勤務。線形計画法，グラフ理論，コンパクトシティ論など10数冊の著書があ

に完成された極めて実用的な技法であり，そのコンピュータ・プログラムを作成し，実行してみることは教育的価値がある。付録では，プログラム言語のFORTRANで書いたコンピュータ・プログラムの実施例を提示する。

2．階層的意思決定法（AHP）の方法論

2．1．AHP概説

意思決定に関する科学的研究は，伝統的に，オペレーションズ・リサーチや管理科学の一分野であったが，最近は，決定科学（Decision Sciences ）という新分野で包括されることもある。そこでの中心的役割は，意思決定分析の技法の開発にある。また，それに派生的に，意思決定の環境あるいは構造をより明瞭にさせる特徴がある。

階層的意思決定法は，前記の数学者Saatyにより，1972年，政策科学の分野で，項目間のウェイトづけの決定に固定値と固有ベクトルを応用することを提案したことに始まる。とりあげられた例題と計算手続きの簡単さ，理論の潜在的な能力により，個人的な意思決定のみならず，広く，経営や経済の分野にも応用されるに至った(2)。

階層的意思決定法は，同一の決定問題に対し，複数の行為者間で相矛盾する目的（基準）をもった複雑な多属性の代替案を評価するために用いられる。こ

る。AHPについては共著も含め4冊ある。AHPの萌芽的論文は下記のものである。"An eigen value allocation model for prioritization and planning, " Unpublished manuscript, University of Pennsylvania Energy Management and Policy Center, 1972.

(2) AHPは階層的意思決定法のほか，階層型意思決定法，階層化意思決定法ともいわれる。AHPの優れた解説書は，創始者Saatyの下記の4冊である。日本語では刀根の小冊子［9］と真鍋他の雑誌特集号［10］が手頃である。
- The Analytic Hierarchy Process, New York : McGraw-Hill, 1980.
- The Logic of Priorities, Boston : Kluwer Nijhoff, 1981.
- Decision Making for Leaders, Belmont : Lifetime Learning Pub. 1982.
- Analytic Planning, New York : Pergamon, 1985.

の過程を通じ，全体の評価基準を容易に理解し，評価できる部分問題に階層的に分解する。評価は各段階で具体的な効用関数や評価関数を想定する必要はなく，単に一対比較を明確に行うことができればよい。AHP の手順を次に述べる。

2．2　AHP の手順

ある意思決定問題に直面し AHP を適用して提言をしようとするならば次の3つの段階を踏まなければならない。

(1)　問題を分析し，階層図を書く。

直面した問題は，究極的に何が目標であるか，それを達成するための代替案は何か，そのための評価基準は何かを識別し，階層構造を図示する段階である。

各階層は，レベル1（又はトップレベル）に目標（ゴールとかフォーカスともいう），レベル2に基準（クライテリオン），そして，レベル3に代替案（オールタナティブ）を識別し，設定する。

具体例として，受験生の大学選択の意思決定を考えよう。彼は，A大学，B大学，C大学を案として考えている。大学の選択については種々の制約又は基準がある。大学の知名度，大学の運動部，費用，そして立地の4つを基準にしているとしよう。階層図は下のようになる。（図1）

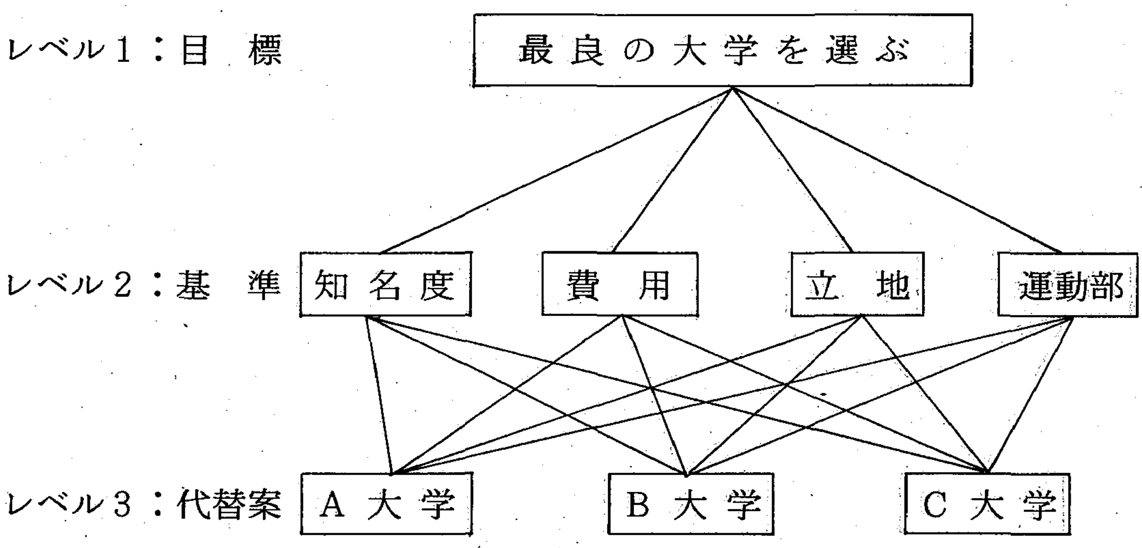


図1．AHP の階層図の例

(2)　各階層で要素間の優先度を比較判断する。

階層の各レベルで，諸要素間の選好関係を一対比較によりウェイトをつける。まず，トップレベルの全体目標からみてすぐ下のレベルの諸要素間の相対的重要性を一対比較してウェイトをつける。全ての要素を一対比較すると正方な「判断行列」（一対比較行列ともいう）ができる。一対比較のさい，諸要素間に絶対的な尺度があればそれを用い，さもないときは主観的な判断によりウェイトをつける。判断の尺度はSaatyの提案した下の表1の数字を用いる。

表1　相対的重要性の尺度

相対的重要性の強さ	説　明
1	2つの要素は同等に重要
3	一方は他方よりも重要
5	一方は他方よりも強く重要
7	一方は他方よりもさらに強く重要
9	一方は他方よりも圧倒的に重要

2，4，6，8は隣り合うウエイトの中間の値。上の数字の逆数，他方からみて一方をどう重要であるとみなすか。
有理数は絶対的尺度からくる比率を表す。

同様に，第iレベルの要素からみて第i＋1レベルの各要素間の相対的重要性をやはり一対比較により評価し，正方な判断行列を構成する。

判断の尺度はそれほど厳密な数字である必要はない。プログラムは，各判断行列について要素のウェイトと整合度（コンシステンシー）を計算する（計算については後述）。整合度が悪ければ一対比較をやり直すよう指示される。

大学選びの上記の例にあてはめると，まず，トップレベルからみて，レベル2の4つの基準の各々の一対比較を行う。知名度対費用，知名度対立地，知名度対運動部の比較を主観的に2，3，5（少し重要，より重要，強く重要）と考えるなら，実行結果の出力リスト（付録）の＜A＞のようになる。他の一対比較についても同様である。

各要素のウェイトは出力リストの＜B＞のように計算される。

(3)　各階層でウェイトを合成する。

各階層の要素（項目）毎に計算されたウェイトは階層のレベルで合成されなければならない。合成の方法は，各階層の要素のウェイトに上のレベルの要素のウェイト（優先度）を掛けて加えればよい。最終的にはボトムレベルの代替案の総合ウェイト（Composite priorities）が得られればよい。（出力リストの＜C＞を参照）。

総合優先度の最高の代替案を選ぶ，あるいは，資源や予算の配分のときは，総合優先度に比例した配分案を実施（又は提言）することになる。

2．3　AHP の数学

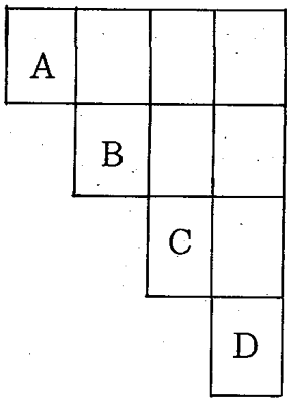
2．3．1　判断行列

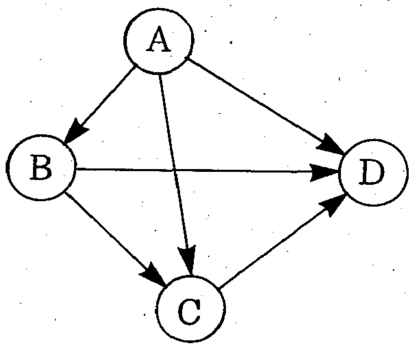
$\{E_1, E_2, \cdots, E_n\}$ を何らかの意味で比較可能なものの集合とする。$(u_1, u_2, \cdots, u_n)$ はその集合の各要素に対する比率尺度（ratio scale）を表す。各 i と j について，u_i/u_j は，E_i の比率尺度と E_j の比率尺度の比である。それぞれは，存在することがわかっていても通常，既知ではない。今，a_{ij} で，u_i/u_j の主観的な推定値を表すとしよう。

特に，$a_{ii}=1$，$a_{ji}=1/a_{ij}$ としてよい。後者は相反性又は逆数性といわれる。

$$A=[a_{ij}] \qquad i, j=1, 2, \cdots, n$$

は，判断行列，スコア行列，又は主観的な一対比較行列といわれる。これは，対角要素が１で，上半非対角要素と下半非対角要素が逆数関係の正方行列である。それゆえ，行列の全要素を必要としないので，上半非対角要素だけをとり出した次のような図又はグラフを書いてもよい。





上図又はグラフは，AHP を実施するには便利である。

比較すべき要素の個数は，全部で，(n－1)＋(n－2)＋…＋2＋1＝ n(n－1)/2 である。

以下では，数学的処理の便宜上，正方行列表記を用いる。

判断が「整合的」であるとは，行列 A のすべての i，j，k に対して，

$$a_{ij}\,a_{jk}=a_{ik}$$

が成りたつことである。

行列 A が整合的であれば，

$$a_{ii}=1 \text{ かつ } \quad a_{ji}=1/a_{ij}$$

は自動的に成り立つ。AHP では行列全体が完全に整合的であることは要求されないが，整合度の指数の導入は重要である。これは，固有値との関連で後に述べる。

2．3．2　要素のウェイト

要素の個数が3個以上になると各要素の相対的重要性のウェイトづけの計算が必要になる。

n＝3のとき，判断行列は

$$A=\begin{array}{c} x \\ y \\ z \end{array}\begin{pmatrix} 1 & a & b \\ 1/a & 1 & c \\ 1/b & 1/c & 1 \end{pmatrix}$$

と書ける。3つの要素 x，y，z の相対的重要度（ウェイト）は，判断行列 A の

全要素を用いていくつかの方法で求めることができる。

Saatyのオリジナルな考えは，行列Aの固有値を計算し，最大固有値に対応する（右）固有ベクトルを採用するものである。いわゆる固有ベクトル法については後にとりあげるが，上例では　最大固有値は，

$$L = 1 + (ac/b)^{1/3} + (b/ac)^{1/3}$$

であり，それに対応する固有ベクトルは

$$w = \begin{pmatrix} (ab)^{1/3} \\ (c/a)^{1/3} \\ (1/bc)^{1/3} \end{pmatrix}$$

となりこれを採用すればよい。しかし，上で得られたwは，Aの各行の幾何平均ベクトルに他ならない。

$n \leqq 3$では固有ベクトル法と幾何平均ベクトル法は一致したウェイトをもたらすが，$n > 3$では必ずしも成り立たない。そのいずれがよいかは議論が分かれるが，後者（幾何平均ベクトル法）の方が明らかに簡単に計算できる。しかし，後述するところの整合度指標のような便利な，論理的に優れた指標は，前者の固有ベクトル法でのみ得られる。

2．3．2．1　幾何平均ベクトル法

幾何平均ベクトルにはさまざまな利点があるが，そのひとつに，任意の正方な判断行列Aに対して，対数最小二乗法（LLSM）を適用することにより幾何平均ベクトルが得られることが挙げられる。Piet de Jong等［2］にならって以下，簡単に論証しよう。

対数最小二乗法（LLSM＝Logarithmic Least Squares Method）による導出：

a_{ij}は，E_iとE_jを一対比較して得られる判断行列の要素であるから，

$$a_{ij} = \frac{u_i}{u_j} \varepsilon_{ij}$$

と書ける。u_iとu_jは未知のパラメタで，ε_{ij}は正の攪乱項である。両辺の対数をとると，

$$\log a_{ij}=\log u_i-\log u_j+\log \varepsilon_{ij}$$

$$\therefore\quad y_{ij}=x_i-x_j+e_{ij}$$

x_i の最小二乗推定量は,

$$\underset{x_1,x_2,\cdots,x_n}{\mathrm{Min}} \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(y_{jk}-x_j+x_k)^2$$

の解である。解析的に解けば,

$$\hat{x}_i=(\sum_{j=1}^{n}y_{ij}+c)/n \qquad (c\text{は任意の定数})$$

を得, $\hat{x}_i$ の逆対数 $\hat{u}_i$ が, 対数最小二乗法の解になる。なお, $\hat{x}_i$ の逆対数 $\hat{u}_i$ は, 合計が1になる要請があれば, 制約付の二次計画問題を解くように定式化してもよい。また, 決定係数 R^2 は, 整合度の欠落を調べるのに使える。

いずれにせよ, $c=0$ のとき,

$$\log w_i=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\log a_{ij}$$

より, 幾何平均ベクトル

$$w_i=\prod_{j=1}^{n}a_{ij}^{1/n}$$

を得る。

幾何平均ベクトルはLLSMによらなくても単純な最小二乗法からも導かれる。また, Aczél と Saaty は, 相反性を用いて幾何平均ベクトルの存在を証明している:

「一定の $n\geqq 2$ に対して,

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n)=\phi^{-1}[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\phi(x_k)], \qquad (\text{準算術平均})$$

$$f(\frac{1}{x_1}, \frac{1}{x_2}, \cdots, \frac{1}{x_n})=1/f(x_1, x_2, \cdots, x_n), \qquad (\text{相反性})$$

および,

$$f(\theta x_1, \theta x_2, \cdots, \theta x_n)=\theta f(x_1, x_2, \cdots, x_n) \qquad (\text{一次同次性})$$

を満たす唯一の解は，

$$f(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n)=\prod_{i=1}^{n} x_i^{1/n}$$

である。」

幾何平均 $\prod_{i=1}^{n} a_i^{1/n}=\sqrt[n]{a_1 a_2, \cdots a_n}$ の計算手続きについて述べる。計算機プログラムを作ることは見掛け通り簡単であるが，電卓を利用するときには若干の工夫が必要である。安価な電卓には平方根キー（$\sqrt{\ }$）やメモリーキー $\boxed{\mathrm{M+}}$ や $\boxed{\mathrm{MR}}$ があっても3乗根キーや7乗根キーはない。$\sqrt[3]{x}$ の近似値を電卓で求める算法は次のようにすればよい。

(1)　x をセットする。$\boxed{\mathrm{M+}}$

(2)　$\sqrt{\ }$ キーを2回とる

(3)　x を掛ける（$\times\boxed{\mathrm{MR}}$ とする。）　(2)に戻る。

(2)で $\sqrt{\ }$ キーを3回連続して押せば7乗根が，4回連続して押せば15乗根が得られることは容易にわかる。収束は比較的速い。

電卓にもし，対数 $\boxed{\mathrm{LOG}}$ と指数 $\boxed{\mathrm{EXP}}$ があれば，このような反復計算は不要である。$y=\sqrt[n]{x}$ の両辺の対数をとれば，$\log y=\frac{1}{n}\log x$ ゆえ，$y=e^{\log y}=e^{(\log x)/n}$ により直ちに求められる。

プログラム電卓ではニュートン法（x_0＝所与，$x_{n+1}=x_n-f(x_n)/f'(x_n)$，$f(x_n)=x^n-a=0$）を用いてもよい。

2．3．2．2　固有ベクトル法

AHP で重要な要素のウェイトの決定について Saaty は固有ベクトル法を提案している。固有ベクトル法は単にウェイトを求めるばかりでなく，判断行列の整合性についても教示する。AHP に関連した範囲内で，固有値と固有ベクトルについて整理しておこう。

実正方行列 A に右からベクトル x を掛けて得られる線形方程式 Ax は，そのベクトル x にスカラー値 λ を掛けたものに等しいとき，即ち，

$$Ax=\lambda x$$

のとき，λを固有値といい，xを（右）固有ベクトルという。λは，多項式$|\lambda I-A|=0$を解いて得られ，高々，行列の次数だけある。AHPではその最大固有値（λ_{max}と表す）それに対応する固有ベクトルに関心がある。固有ベクトル算出の具体的手続きに入る前に2，3の性質を述べる。

性質1：Aの最大固有値$\lambda_{max}=n$となる必要充分条件はすべてのi，j，kについて

$$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$$

のときである。

この性質は行列の完全整合性が最大固有値の数値と関係があることを示している。その証明のためには補題「すべてのi，j，kについて$a_{ij}a_{jk}=a_{ik}$⇔Aの階数（ランク）＝1」を必要とする（証明は省略)。

性質1から次の性質2が派生する。

性質2：λ_{max}をA＝（a_{ij}）の最大固有値とし，uをそれに対応する固有ベクトルで$\sum_{i=1}^{n}u_i=1$に正規化する。そのとき，$\lambda_{max}\geqq n$である。

そして，

性質3：$\mu\equiv\dfrac{\lambda_{max}-n}{n-1}$は，整合性からの平均的乖離（かいり）の尺度を与える。

［証明］a_{ij}＝（u_i/u_j）ε_{ij}とおく。

$$\lambda_{max}=\sum_{j=1}^{n}a_{ij}\frac{u_i}{u_j}=\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}$$

$$n\lambda_{max}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{ij}=n+\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(\varepsilon_{ij}+1/\varepsilon_{ij})$$

$$\mu=\frac{\lambda_{max}-n}{n-1}=-1+\frac{1}{n(n-1)}\sum_{1\leqq i<j\leqq n}(\varepsilon_{ij}+1/\varepsilon_{ij})$$

ε_{ij}が1に近付く（整合的になる）につれ，左辺は0に近付く。μは$\varepsilon_{ij}+1/\varepsilon_{ij}$が凸ゆえ，$\varepsilon_{ij}$の凸関数。最小値が$\varepsilon_{ij}=1$で達成される。$\mu$は1に近い（整合的）のとき小さく，$\varepsilon_{ij}$が1より外れるにつれ大きくなる。このことより，$\mu$は整合性からの平均的乖離の尺度を与えるといえる。

Saatyは整合度指標として上のμ（≡CI）のほか，CR＝CI/RCT［i］も提案

している。RCT [i] は次数 i のときのランダムコンシステンシーベクトルであり，RCT［3］＝0.58，RCT［4］＝0.9，RCT［5］＝1.12，RCT［6］＝1.24，RCT［7］＝1.32，RCT［8］＝1.41，RCT［9］＝1.45，RCT［10］＝1.49 である。しかし，CI 指標のみで十分であろう。

次に行列 A が与えられたとき，AHP で必要な λ_{max} とそれに応じた固有ベクトルを算出する計算手続きに入ろう。周知のように，行列の固有値を求める方法には，ヤコビ法，ハウスホルダー法，ランチョス法，バイセクション法，ベキ乗法，逆反復法，QR 法等多数開発されている。このうち，ベキ乗法は，簡単で，固有ベクトル計算の基本になっているばかりでなく，行列の（絶対値）最大の固有値を求めることができるので，AHP の計算機プログラムに組込まれている。

これは，初期ベクトル $x^{(0)}$ から始めて，逐次，

$$x^{(k)}=Ax^{(k-1)}$$

を計算すると，$k\rightarrow\infty$ のとき，$x^{(k)}$ は与えられた行列 A の絶対値最大の固有値に属する固有ベクトルに収束する。k は 10 〜 20 程度で十分である。なお，行列 A 自身は計算の途中で変形を受けないので A の次元数が大きくても有効である。

2．4　AHP の計算機プログラム

AHP の計算手続きは極めて単純明快であるのでそのプログラムは既に多数存在している。また，ソフトウェアパッケージも市販されている。使用経験はないが，米国バージニア州 McLean の Decision Support Software 社は，「Expert Choice」の商品名で，東京の日科技研（JUSE）からは，「ねまわしくん」の商品名で販売されている。しかし，Saaty の著書［4］には BASIC, FORTRAN，APL，TI－59 プログラム電卓の言語で書かれたソースプログラムが掲載されている。これらはほとんどそのまま，大型計算機であれ，パーソナルコンピュータであれ，プログラム電卓であれ移植することが可能である。それらは，プログラム電卓を除き，ユーザーと計算機の間のフレンドリーな対話形式でプロセスを進み，最終的な総合評価を得ることができる点に特色があ

る。データのエラーの検出や判断の整合性のチェックによりフィードバックがなされ，より正確な意思決定が行われるようになっている。

基本的な入力データは以下のようである。

(1) 単一の行列を処理するか，全体の階層にわたって仕事を進めるか。

(2) 後者の場合，階層構造は完全であるかそれとも不完全であるか。

(3) レベルの数（トップレベルを1とし，ふつうは3）

(4) それぞれのレベルにおける要素数（各要素は左から1，2，3，…と番号付けられる）

(5) 一対比較による相対的重要性の尺度（この数値を入力するときは，非対角要素の上半部だけでよく，分数は負の分母数で表す。例えば1/3なら，－3と入力する。判断のさいは64頁の図やグラフをおいて考慮するとよい）

ユーザが必要なデータを入力し終わると計算機は完全な行列を出力し，各要素に対応するウェイト，最大固有値ならびに2種類の整合度指標を出力する。指標が0.1以上なら一対比較をやり直し，最終的には，最後のレベルで合成した総合評価と全階層の整合度指標を表示する。

付録に，AHPプログラムの実行結果の出力リストを載せた。これは本学のMelcom－Cosmo 700シリーズ上のFORTRANで書いたもので，ソースプログラムは全部で400行足らずであり，公開している。[3]

われわれは，パーソナルコンピュータ（NEC PC 8801/9801シリーズやMacintosh Plus）上でも，BASIC，FORTRANの他，Pascal，Modula－2，APL，C等の高級言語やSHAZAM（Ver.6.0）のような計量経済学ソフトウェアによってAHPを実施できるようにしている。

2．5 AHPの計算の手間

直面する問題がほんの少数のレベルの階層で記述でき，各レベルの項目数が

---

(3) 本プログラムの改訂の過程で有益な助言をいただいた本学大学院学生のKetcha Nzoundji Jules-Roger氏に感謝する。

少なければ AHP により総合評価を行うことは比較的容易である。しかし，実際の意思決定問題では階層内に複数個のレベルが含まれ，各レベルには多数の属性（要素）が含まれるのがふつうである。AHP で必要な一対比較の判断回数は尨大なものになる。例えば，資源を 4 つの競合的な代替案に配分したい。その時，5 つの省庁（行為者）と 11 種の評価基準があるとしよう。AHP で必要とされる一対比較の回数は各省庁で 341 回の多きに達する。より一般的に比較回数を見積れば次のようになる。n 人の行為者，n_1 種の基準，n_2 個の代替案に対して，

$$\frac{n_1(n_1-1)}{2}\times n+\frac{n_2(n_2-1)}{2}\times n_1=\frac{n_1}{2}\{n(n_1-1)+n_2(n_2-1)\}$$

回の比較を必要とする。n＝1 のときの比較回数の表は下のようになる。

表 2　AHP の比較回数

比較回数		n_2（代替案の個数）								
		2	3	4	5	6	7	8	9	10
n_2（基準の数）	2	3	7	13	21	31	43	57	73	91
	3	6	12	21	33	48	66	87	111	138
	4	10	18	30	46	66	90	118	150	186
	5	15	25	40	60	85	115	150	190	235
	6	21	33	51	75	105	141	183	231	285
	7	28	42	63	91	126	168	217	273	336
	8	36	52	76	108	148	196	252	316	388
	9	45	63	90	126	171	225	288	360	441
	10	55	75	105	145	195	255	325	405	495

この表から大規模な決定問題は，そのまま AHP を用いることは不適切であることがわかる。いわゆる統合化または縮約化の問題に直面する。

2．6　AHP の適用対象

AHP の柔軟性とゲーム感覚性のためにこれまで適用された対象は数知れない。論文や著書に現れたものは氷山の一角である。筆者の「管理科学 I」の講

義でも毎年，AHPのレポートを提出させているが，その適用の広範囲さに驚く。それらを分類，列挙してみよう。

(1) 個人意思決定

パーソナルコンピュータ，ワープロ，テレビ，ビデオ，電化製品，車の購入，就職先の決定，髪型の決定等。個人的には，ゼミナールの選考に用いた。

AHPは理論的にはどんな規模の決定問題でも解くことができるが，主観的な判断を一対比較により，下さなければならない行為者はその数の多さにより誤った判断をする危険があり，データの信頼性は劣化する。たとえ，整合性チェックによりフィードバックしても事態はそれほど改善されない。AHPの実施者は関連する項目を適度に減らす必要がある。そのためには，あまり関連のないものの消去法によるのがよい。AHPは現在のところ，消去の方法については研究が進んでいない。

(2) 小集団，企業，公共事業体の意思決定

ゼミ旅行先の選定，会社の移転先，社内人事，新製品開発と商品企画，営業戦略，QCサークルのテーマ決定等。

(3) 経済問題への応用

経済政策，財政政策，金融政策，貿易政策，国防問題，地域振興政策，公共投資政策等。

これらのリストは単に応用可能性を列挙しているだけであって完全なリストではない。

次に，AHPの長所と短所について整理してみよう。

2.7 AHPの長所と短所

AHPの特徴として，刀根［9］は，（1）フィーリングを科学する，（2）多様化する価値観への対応を探る，（3）あいまいな状況をズバリ解明する，と標語的に述べている。AHPを実際に利用してみるとこれらの標語とは全く反対の事態に遭遇することがある。しかし，AHPの全般を通じて長所と短所を次のようにまとめてみることができる。

［長所］

- 直面している問題の理解が鮮明になり，問題の階層構造の作成プロセスが明確化する。
- 従来，経験やカンなどに頼り，数値化しにくい，あいまいな問題にも適用できる。
- 一対比較による要素間の重要度評量の平易さ。
- AHP の数学的方法や数値計算方法が確立している。また，公理的な基礎もできている。
- 計算機プログラムの流通

［短所］

- 要素間の構造を適切に表現することが難しい。要素間にある従属性，因果性を無視し得ない。
- 評価を適切に行うことが難しい。
- 項目数が多くなると手に負えないほどの作業になる。計算の手間については，２．5節でみた通りである。

なお，上記の短所を克服するための研究は着実に行われている。例えば，最近の文献では，Weiss and Rao［７］は，大規模システムに対して不完備実験計画の組合せを提案している。また，Saaty は効用分析の公理的基礎を強固にしたり［５］，順位逆転問題の解明を行っている［６］。

３．社会的決定理論への途

意思決定は，複数人の当事者（利害関係者），複数個の価値基準，複数の代替案に直面して最良の代替案を創出するプロセスである。個人レベルでの意思決定であれ，国家レベルや国際レベルの政策策定であれ，様々な便法によってコンフリクト（不一致）を解決していることも事実である。これまで意思決定分析や社会選択理論の枠組の中で，記述的または規範的な研究が枚挙に暇がないほどなされてきた。AHP は，そのような試みの一つであり，今後ますます理論的な深化と応用が期待される。

以下，AHP を社会的決定理論の一方途としてとらえてみたい。

現代の社会的決定理論は，ケネス・アロウの「不可能性定理」とダンカン・ブラックの投票理論がからみあって発展している。前者には，n 個の代替案に関する個人の選好順序づけを用いて完全な社会的選好順序をもたらすことができるかという「社会的決定関数」と個人の選好順序だけを用いて社会的に最良な代替案を選ぶという「社会的選択関数」がある。いずれの場合も，記述的ないし定性的な研究であり，規範的，操作的な研究ではない。また，単一の評価基準に照しての選好順序の表明であり，複数の評価基準のもとではない。そこでは，ギバードとサタースウェイトの理論によって，社会的選択関数はすべて戦略的操作可能になる。また，実証的には，ツバースキーの選好の非推移性の興味ある反証がなされている。(4)

複数基準の社会的選択の方法に関してはほとんどコンセンサスが得られていない。最近フランス系のレイノー（Raynaud）は，アロウと協力して「社会選択と複数基準の意思決定」という小冊子［1］を著している。フランスの OR 学界や産業では複数基準のもとでの意思決定分析が伝統的に考究されてきた。特にエレクトル法は Saaty の AHP 法に類似の手法である。

エレクトル（Electre）法は，ELimination Et Choix Traduisant la REalite から派生しているが，現実の決定問題を解くための消去と選択の方法である。これは，選択肢に対し，大変よい，よい，ふつう，悪い，大変悪いの

(4) 社会的決定理論への入門書としては，佐伯［9］が優れている。また，Jensen［2］は，複数基準の優先度分析を行ういくつかのコンセンサス法を紹介し，AHP を中心に位置づけている。なお，フランスで行われた重要な貢献に下記の2点がある。

B. Sussmann, P.Buffet, J. P. Crémy et M.Marc, "Peut-On Choisir En Tenant Compte de Critères Multiples? Une Méthode (ELECTRE) et Trois Applications," *Metra* 6（2）(1967) pp.283 − 316.

G. Bernard et M. L. Besson, "Douze méthodes d'Analyse multicritère," *Revue Française d'Informatique et de Recherche Opérationnelle*, 5 − 3 (1971), pp.19 − 64.

５段階方式で評価し合成するものである。この手法は，AHPのように整合性とか魅力的な公理系を完全に満たさないにせよ，複数の基準に直面して合意を形成する有力な手法と評価され，フランス産業界で使われてきた。しかし，エレクトル法は上位下位関係を評価するベースが「空」であることが多いとか，空のベースを避けるために偽りの評価をするとか，手続きが混み入っている等批判もある。アロウらは，前記の書物で，エレクトル法を基礎にしたもっと強固な公理系のもとでの上位法のアルゴリズムを提案している。

複雑な意思決定問題に直面して最良の処方箋を得るための新しい技法の研究は今後とも続けられねばならない。新しい技法の背後にある公理系は納得できるようなより明白な表現が望まれる。また，技法の実現の際，計算の手間も明らかにされねばならない。　（以上）

付録：AHPの計算機プログラムの実行結果

```
FLAG AHP:FOR
WITH>
IF YOU WANT TO PPOCESS SINGLE (UNRELATED) MATRICES, TYPE "S";
IF MORE INVOLVED, HIT "CR KEY".
?
IF YOUR HIERARCHY IS PERFECT (COMPLETE) TYPE "P"; IF NOT,HIT "CR
KEY".
? P
***NOTE: 1. WHEN YOU ARE ENTERING ANY NUMBER, NOTE
THAT THERE ARE 3 COLUMNS OR SPACES RESERVED FOR EACH
NUMBER.
               2. IF YOU HAVE TO ENTER ONE NUMBER, SAY 7,
IT SHOULD BE ENTERD AS "  7" WHERE A " " STANDS FOR A BLANK.
               3. IF YOU HAVE TO ENTER A SERIES OF NUMBE-
RS;SAY 3, 6, 2;IT SHOULD BE ENTERED AS "  3  6  2".
               4. IN ENTERING THE UPPER TRIANGULAR PART
OF THE MATRIX, FRACTIONAL ELEMENT LIKE 1/3 SHOULD BE ENTER-
ED AS "- 3";
               THE ELEMENTS IN A ROW SHOULD BE ENTERED
ON THE SAME LINE UNITY ELEMENTS IN THE MAIN DIAGONAL ARE
UNNECESSARY.
ENTER THE # OF FACTORS IN THE 2ND HIERARCHY LEVEL
? 4
   4? IF WRONG, ENTER "9", ELSE HIT "CR KEY",
?
 ENTER THE UPPER TRIANGULAR PART OF THE MATRIX.
   ROW  1:
```

```
?  2   3   5                                                         〈A〉
   2.  3.  5.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
    ROW   2:
?  3   4
   3.  4.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?  2
    ROW   3:
?
   0.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?  9
    ROW   3:
?  2
   2.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
1.0000  2.0000  3.0000  5.0000
 .5000  1.0000  3.0000  4.0000
 .3333   .3333  1.0000  2.0000
 .2000   .2500   .5000  1.0000
WEIGHTS= .469434   .314582   .137110   .078875                       〈B〉
  LAMBDA (MAX) = 4.05683    C.I.= .018861    C.R.= .020957
IF YOU WANT TO REDO THIS MATRIX, ENTER "9", ELSE "CR KEY",
?
ENTER THE # OF FACTORS IN LEVEL 3. IF YOU WANT TO STOP HERE,
ENTER "0".
?  3
   3?  IF WRONG:"9", ELSE:"CR KEY".
?
ENTER ALL # FACTORS IN LEVEL 3 RELATED TO ELEMENT 1 OF
LEVEL 2 ON THE SAME LINE BY ASCENDING ORDER:
?  1   2   3
   1   2   3
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
ENTER THE UPPER TRIANGULAR PART OF THE MATRIX.
    ROW   1:
?  3   5
   3.  5.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?  3
    ROW   2:
?
   0.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?  9
    ROW   2:
```

```
? 3
  3.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
1.0000  3.0000  5.0000
 .3333  1.0000  3.0000
 .2000   .3333  1.0000
WEIGHTS= .636985   .258285   .104729
LAMBDA (MAX) = 3.038510    C.I.= .019255    C.R.= .033199
IF YOU WANT TO REDO THIS MATRIX, ENTER "9", ELSE "CR KEY",
?
ENTER ALL # FACTORS IN LEVEL 3 RELATED TO ELEMENT 2 OF
LEVEL 2 ON THE SAME LINE BY ASCENDING ORDER:
? 1  2  3
  1  2  3
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
ENTER THE UPPER TRIANGULAR PART OF THE MATRIX.
   ROW  1:
? 2  4
  2. 4.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
   ROW  2:
? 5
  5.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
1.0000  2.0000  4.0000
 .5000  1.0000  5.0000
 .2500   .2000  1.0000
WEIGHTS= .536825   .364292   .098884
LAMBDA (MAX) = 3.094013    C.I.= .047007    C.R.= .081046
IF YOU WANT TO REDO THIS MATRIX, ENTER "9" , ELSE "CR KEY" ,
?
ENTER ALL # FACTORS IN LEVEL 3 RELATED TO ELEMENT 3 OF
LEVEL 2 ON THE SAME LINE BY ASCENDING ORDER:
? 1  2  3
  1  2  3
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
ENTER THE UPPER TRIANGULAR PART OF THE MATRIX.
   ROW  1:
? 3  2
  3. 2.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
   ROW  2:
? -2
  -2.
```

```
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
1.0000  3.0000  2.0000
 .3333  1.0000   .5000
 .5000  2.0000  1.0000
WEIGHTS= .539615   .163424   .296961
LAMBDA (MAX) = 3.009201    C.I.= .004601    C.R.= .007932
IF YOU WANT TO REDO THIS MATRIX, ENTER "9", ELSE "CR KEY",
?
ENTER ALL # FACTORS IN LEVEL 3 RELATED TO ELEMENT 4 OF
LEVEL 2 ON THE SAME LINE BY ASCENDING ORDER:
? 1  2  3
  1  2  3
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
ENTER THE UPPER TRIANGULAR PART OF THE MATRIX.
   ROW  1:
? 3  5
  3. 5.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
   ROW  2:
? 7
  7.
IF NOT CORRECT-"9", ELSE-"CR KEY".
?
1.0000  3.0000  5.0000
 .3333  1.0000  7.0000
 .2000   .1429  1.0000
WEIGHTS= .601768   .323637   .074595
LAMBDA (MAX) = 3.233225    C.I.= .116612    C.R.= .201056
IF YOU WANT TO REDO THIS MATRIX, ENTER "9" , ELSE "CR KEY".
?
   **LEVEL 3 WITH RESPECT TO LEVEL 2
WEIGHT:    .469434   .314582   .137110   .078875
        1  .636985   .536825   .539615   .601768
        2  .258285   .364292   .163424   .323637
        3  .104729   .098884   .296961   .074595
**COMPOSITE PRIORITIES FOR LEVEL 3
 .589348   .283781   .126871                              〈C〉
ENTER THE # OF FACTORS IN LEVEL 4. IF YOU WANT TO STOP HERE,
ENTER "0".
?
    0
    0? IF WRONG:"9", ELSE:"CR KEY".
?
CONSISTENCY RATIO OF THE HIERARCHY (C.R.H.) = .0580
*STOP*
!
```

参 考 文 献

[1] K.J.Arrow and H.Raynaud, *Social Choice and Multicriterion Decision-Making*, Cambridge : MIT Press, 1986.

[2] R.E.Jensen, "Comparison of Consensus Methods for Priority Ranking Problems, " *Decision Sciences*, Vol.17 (1986) , pp.195 − 211.

[3] T.L.Saaty, *The Analytic Hierarchy Process*, New York : McGraw-Hill, 1980.

[4] T.L.Saaty, *Decision Making For Leaders* . Belmont : Lifetime Learning Pub.1982.

[5] T.L.Saaty, "Axiomatic Foundation of the Analytic Hierarchy Process, " *Management Science*, Vol.32 (1986) , pp.841 − 855.

[6] T. L. Saaty, "Rank Generation, Preservation, and Reversal in the Analytic Hierarchy Decision Process," *Decision Sciences*, Vol.18 (1987) , pp.157 − 177.

[7] E.N.Weiss and V.R.Rao, "AHP Design Issues for Large-Scale Systems, " *Decision Sciences*, Vol.18 (1987) , pp.43 − 61.

[8] 佐伯　胖,『「きめ方」の論理』, 東京：東大出版会, 1982.

[9] 刀根　薫,『ゲーム感覚意思決定法』東京：日科技連, 1986.

[10] 真鍋他, 特集 AHP, オペレーションズ・リサーチ, 1986年8月号.