チーム決定問題について

奥　田　和　重

1. 緒　言

二人以上の個人が集まって，共通する目的を達成するために協働してなんらかの決定を下す集団を考える。集団に属する各人の選好関係に差異がなく，共通の目的を反映する選好関数が唯一存在すると仮定できる場合，その集団をチームという[1]。決定を下す主体が，個人であれ，組織であれ，コンピュータのような機械であっても，その下した決定がなんらかの行動に反映されるとき，決定を下す主体の単位を意思決定者と呼ぶことにする。このような意思決定者が複数集まってチームを形成しているとすれば，先の定義から意思決定者の選好関係はすべての意思決定者について同形であるので，各意思決定者は互いに協力して全員にとってよりよい結果がもたらされるように各自の選択を行なう。これをチーム決定問題という[2]。チーム決定問題で，意思決定者間の情報交換が完全になされ，全員が同じ情報を持っているならば，それは意思決定者が 1 人の場合の最適決定問題と等価になる。したがって，チーム決定問題は意思決定者間の情報交換になんらかの制約がある場合に意味を持ち，その情報交換の型，すなわち情報構造を決定することが問題となる。このようなチーム決定問題を研究するチーム理論は Marschak[3] によって始められ，Radner によって発展させられた[1]。そこでは主として静的な問題が取り扱われていたが，後に Ho と Chu によって動的な問題に拡張された[4]。一方，Witsenhausen は制御問題で情報構造を明確にすることが重要であることを指摘した。これを契機に分散制御システムの研究が盛んになったが，分散制御システムはチーム決定問題と類似の構造を持つことから，チーム理論が制御の分野に取り入れられるようになった。最近では，チーム理論にもとづいたコンピュータの並列処理[5]や分

散処理の新しい形態として注目を浴びているチーム・コンピューティング（あるいは協同型処理:cooperating processing）[6),7)] などが報告されている。

本論では，チーム理論を分散制御に対する理論としてではなく，チームが行う意思決定を最適化するための理論としてとらえ，その理論と方法について述べる。次章では，意思決定者の数と目的の数の関係から最適化理論の分類を行い，チーム理論の位置付けを行う。次に，チーム理論ついて述べ，最後に，簡単な生産システムを例に取り，その適用例を示す。

2．意思決定問題

意思決定者が，自らの目的を達成するために行動の代替案の中から特定の行動を選択するとき，これを意思決定といい[8)]，代替案の選択が意思決定者にとって最もよい，すなわち最適な結果が得られるように行なわれるとき，これを最適意思決定という。この最適な意思決定を行なう問題を最適意思決定問題といい，これは次のようである。N人の意思決定者がそれぞれm_i，$i=1$，……，Nの代替案x_{ij}，$j=1$，……，m_iを持っているとする。それぞれの代替案が選択されると，その結果z_{ij}，$j=1$，……，m_iが生じる。意思決定者は，結果に対してそれぞれの好みを持っている。この好みはz_{ij}間の選好関係として表わすことができ，この関係を選好関数$\phi_i(z_{ij})$で表わす。たとえば，意思決定者iが2つの結果z_{i1}，z_{i2}について，z_{i1}をz_{i2}より選好すれば，選好関数は$\phi_i(z_{i1}, z_{i2})>0$となる。z_{i1}とz_{i2}が同等であれば$\phi_i(z_{i1}, z_{i2})=0$，z_{i1}とz_{i2}が同等かあるいはz_{i1}を選好すれば$\phi_i(z_{i1}, z_{i2})\geqq 0$である。したがって意思決定問題は，意思決定者が自らの選好関係のもとで最もよい結果を得るように代替案を選択する問題であるといえる。

上の意思決定問題で代替案や結果が数値として与えられていると，これは数理計画問題として記述することができる。意思決定問題を数理計画問題として記述すると次のようになる。代替案には，満たすべき制約g_iが規定されており，その制約を満たすすべての値が代替案であるとする。これより代替案の集合X_iは次のように書くことができる。

$$X_i=\{x_i : g_i(x_i)\leqq 0\} \tag{1}$$

結果は，ある代替案に対して得られるので，その関係を関数 f_i で表わすと結果の集合 Z_i は，

$$Z_i=\{z_i : z_i=f_i(x_i)\} \tag{2}$$

と書ける。意思決定者が最も大きな値を持つ結果を選好するとすれば，これは Z_i の中から最大の z_i を選ぶことを意味する。すなわち

$$\mathrm{MAX.}\ \{z_i : z_i\in Z_i\} \tag{3}$$

である。最大の z_i を選ぶということは，f_i を最大にする x_i を選ぶことと等価である。したがって式(3)は

$$\mathrm{MAX.}\ f_i(x_i) \qquad (x_i)$$

となる。以上のことより，意思決定問題を数理計画問題として記述すると，式(1)を制約条件とし関数 $f_i(x_i)$ を最大化する問題として次のように書くことができる。

$$\mathrm{MAX.}\ f_i(x_i) \tag{5}$$

$$\mathrm{S.T.}\ x_i\in X_i=\{x_i : g_i(x_i)\leqq 0\} \tag{6}$$

ここで x_i は意思決定者 i の決定変数，$f_i\ (x_i)$ は目的関数である。以下の議論で，X_i はコンパクト凸集合，f_i は x_i に関して凹関数で，x に関して微分可能な連続関数であるとする。

意思決定問題は，意思決定者の数と目的関数の関係によって以下のように分類することができる。

Ｉ．最適化問題

意思決定者が１人（N=1）の場合，式(5)，(6)は次の最適化問題になる。

$$\mathrm{MAX.}\ f(x) \tag{7}$$

$$\mathrm{S.T.}\ g(x)\leqq 0 \tag{8}$$

この問題に対する最適化手法としては，数多くの手法が提案されており[9)]，ここでは省略する。

II．多目的最適化問題

意思決定者が１人の場合であっても，その意思決定者が複数の目的を持って

いるとき，次の多目的最適化問題となる。

$$\mathrm{MAX.}\ \{f_1(x),\ f_2(x),\ \cdots\cdots\} \tag{9}$$

$$\mathrm{S.T.}\ g(x) \leqq 0 \tag{10}$$

この多目的最適化問題に対しては，目標計画法や対話型最適化法などの最適化手法が提案されている[10]。

式(9)，(10)のような多目的最適化問題では，すべての目的を同時に達成するような最適解は一般的には存在しない。このような問題では，解はPareto最適解（あるいは非劣解：non－inferior solution）となる。Pareto解は，すくなくとも他の1つの目的を減少させることなくして，ある目的を増加せしめることができない解である。すなわち，式(9)，(10)の問題で，すべてのiに対して$f_i(x) \leqq f_i(x^*)$，かついくつかのiに対して$f_i(x) < f_i(x^*)$なる任意のxが存在しないならば，またそのときにのみx^*はPareto解である。

Ⅲ．ゲーム決定問題

複数の意思決定者が存在し，それぞれが目的を持っている場合，ある意思決定者の決定が他の意思決定者の決定に影響を与えるならば，その意思決定問題はゲーム決定問題となる。この決定問題は，意思決定者iの決定問題として次のように定式化できる。

$$\mathrm{MAX.}\ f_i(x) \tag{11}$$

$$\mathrm{S.T.}\ g_i(x) \leqq 0 \tag{12}$$

この問題に対する理論としてゲーム理論[11]がある。ゲームの理論では，各意思決定者がそのとるべき戦略を合意の上で決定する協力ゲームと，意思決定者が互いに競合している場合の非協力ゲームがある。協力ゲームには，2人交渉ゲームや特性関数形（提携形）ゲームなどがある。意思決定者全員が協力して決定を行なう場合，それは多目的最適化問題と等価になる。

非協力ゲームには，意思決定に優先権がある場合や，ゼロ和／非ゼロ和ゲームなどがある。

1)Stackelberg解

意思決定に優先権がある場合で，優先権がある意思決定者の決定を他の意思

決定者が知って自らの決定を行なう。これを説明するために，意思決定者が2人の場合で，意思決定者1に優先権がある場合を考える。意思決定者1の決定$x_1^* \in X_1$が与えられたとき，意思決定者2は，

$$f_2(x_1^*, x_2^*) \geqq f_2(x_1^*, x_2), \quad x_2 \in X_2 \tag{13}$$

となるように$x_2^* = T(x_1^*)$を選ぶ。ここでTは任意の関数である。このとき

$$f_1(x_1^*, T(x_1^*)) \geqq f_1(x_1^*, T(x_1)), \ x_1 \in X_1 \tag{14}$$

となるような$x_1^* \in X_1$, $x_2^* = T(x_1^*)$が存在すれば$x_2^* \in X_2$はStackelberg解である。

2人の意思決定者の最適化問題は，具体的には次のようになる。任意の$x_1^0 \in X_1$に対する意思決定者2の最適化問題は，

$$\text{MAX.}\ f_2(x_1^0, x_2) \tag{14}$$

$$\text{S.T.}\ g_2(x_1^0, x_2) \leqq 0 \tag{15}$$

である。これを最適にするためにLagrange関数を次式で定義する。

$$L_2(x_1^0, x_2, \lambda_2) \triangleq f_2(x_1^0, x_2) + \lambda_2^T g_2(x_1^0, x_1) \tag{16}$$

これより，意思決定者2が最適決定を得るためのKuhn-Tuckerの必要条件は，

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2(x_1^0, x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda_2^{*T} \frac{\partial g_2(x_1^0, x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \tag{17}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2} = g(x_1^0, x_2^*) = 0 \tag{18}$$

である。優先権のある意思決定者1の最適化問題は，式(17)，(18)を考慮して次のようになる。

$$\text{MAX.}\ f_1(x_1, x_2) \tag{19}$$

$$\text{S.T.}\ g_1(x_1, x_2) \leqq 0 \tag{20}$$

$$g_2(x_1, x_2) = 0 \tag{21}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \lambda_2^T \frac{\partial g_2}{\partial x_2} = 0 \tag{22}$$

この問題のLagrange関数は，

$$L_1(x_1, x_2, \lambda_2, \mu_1, \mu_2, \nu_1) \triangleq f_1(x_1, x_2) + \mu_1^T g_1(x_1, x_2)$$

$$+\nu_1^{T} g_2(x_1, x_2)+\mu_2^{T}(\partial f_2/\partial x_2+\lambda_2^{T}\partial g_2/\partial x_2) \qquad (23)$$

となる。Kuhn-Tucker の必要条件は,

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1}=\frac{\partial f_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}+\mu_1^{*T}\frac{\partial g_1(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}+\nu_1^{*T}\frac{\partial g_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_1}$$

$$+\mu_2^{*T}\frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}+\lambda_2^{*T}\frac{\partial g_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}\right)=0 \qquad (24)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mu_1}=g_1(x_1^*, x_2^*)=0 \qquad (25)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mu_2}=\frac{\partial f_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}+\lambda_2^{*T}\frac{\partial g_2(x_1^*, x_2^*)}{\partial x_2}=0 \qquad (26)$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \nu_1}=g_2(x_1^*, x_2^*)=0 \qquad (27)$$

である。この必要条件で，x_2^*とλ_2^*は意思決定者2の最適化問題の必要条件(式(17)，(18)）よりx_1の関数，たとえば$x_2^*=T(x_1)$，$\lambda_2^*=H(x_1)$として記述できるので，式(24)〜(27)はx_1，μ_1，μ_2，ν_1について解けばよい。ここで$T(*)$と$H(*)$は任意の関数である。

2) 2人ゼロ和ゲーム

2人ゼロ和ゲームは意思決定者が2人で，2人の目的関数の和がゼロ，すなわち$f_1-f_2=0$の場合である。これは，意思決定者1の意思決定問題が最大化問題であれば，一方の意思決定者2の意思決定問題は最小化問題になる。そしてその目的関数の最適値は一致する。この関係は次式で記述することができる。

$$f(x_1^*, x_2)\geqq f(x_1^*, x_2^*)\geqq f(x_1, x_2^*),\ \forall x_1\in X_1,\ \forall x_2\in X_2 \qquad (28)$$

これを満たすx_1^*，x_2^*を鞍点解という。式(28)は等価的に次のように書ける。

$$f(x_1^*, x_2^*)=\max_{x_1}\min_{x_2} f(x_1, x_2)=\min_{x_2}\max_{x_1} f(x_1, x_2) \qquad (29)$$

鞍点解が存在するための必要十分条件は，式(29)が等号で成り立つことである。これが不等号で成り立つ場合には鞍点解が存在せず，このときの解は

minimax 解となる。

意思決定者の最適化問題をそれぞれ次のようであるとする。

$$\text{意思決定者1}\ :\ \mathrm{MAX.}\ f_1(x_1,\ x_2) \tag{30}$$

$$\mathrm{S.T.}\ g_1(x_1,\ x_2) \leqq 0 \tag{31}$$

$$\text{意思決定者2}\ :\ \mathrm{MIN.}\ f_2(x_1,\ x_2) \tag{32}$$

$$\mathrm{S.T.}\ g_2(x_1,\ x_2) \leqq 0 \tag{33}$$

その Lagrange 関数はそれぞれ次のようである。

$$L_1(x_1,\ x_2,\ \lambda_1) \triangleq f_1(x_1,\ x_2) + \lambda_1^T g_1(x_1,\ x_2)$$

$$L_2(x_1,\ x_2,\ \lambda_2) \triangleq f_2(x_1,\ x_2) + \lambda_2^T g_2(x_1,\ x_2)$$

これより鞍点解が存在するための必要条件は次のようになる。

$$\frac{\partial L_1}{\partial x_1} = \frac{\partial f_1(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1} + \lambda_1^{*T} \frac{\partial g_1(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_1} = 0 \tag{34}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1} = g_1(x_1^*,\ x_2^*) = 0 \tag{35}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2} = \frac{\partial f_2(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2} + \lambda_2^{*T} \frac{\partial g_2(x_1^*,\ x_2^*)}{\partial x_2} = 0 \tag{36}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2} = g_2(x_1^*,\ x_2^*) = 0 \tag{37}$$

3)非ゼロ和ゲーム

非ゼロ和ゲームで意思決定者がN人いる場合，各意思決定者の最適な決定は Nash 解になる。Nash 解は，他の意思決定者が Nash 解を採用しているとき，いずれの意思決定者も自己の解を改良するような解が存在しない均衡解である。これはすべての $x_i \in X_i$，$i=1, \cdots\cdots, N$ に対して，次のように書くことができる。

$$f_i(x_1^*, \cdots\cdots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \cdots\cdots, x_N^*) \leqq f_i(x_1^*, \cdots\cdots, x_N^*) \tag{38}$$

意思決定者 i の決定問題が式(11),(12)の形で与えられているとき，Lagrange 関数は

$$L_i(x_1, \cdots\cdots, x_N,\ \lambda_i) \triangleq f_i(x_1, \cdots\cdots, x_N) + \lambda_i^T g_i(x_1, \cdots\cdots, x_N) \tag{39}$$

となる。これより式(38)を満たすNash解は，次の必要条件

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_i}=\frac{\partial f_i(x_1^*,\cdots\cdots,x_N^*)}{\partial x_i}+\lambda_i^{*T}\frac{\partial g_i(x_1^*,\cdots\cdots,x_N^*)}{\partial x_i}=0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i}=g_i(x_1^*,\cdots\cdots,x_N^*)=0 \tag{41}$$

を満たす $x_i^*\in X_i$，$i=1,\cdots\cdots,N$ である。

Ⅳ．チーム決定問題

意思決定者が複数人で，各人に共通した目的がただ1つ存在する場合，すなわち $f_1=f_2=\cdots\cdots=f_N=f$ であるとき，その決定問題はチーム決定問題となる。これは，

$$f(x_1^*,\cdots\cdots,x_N^*)=\max_{x_1,\cdots\cdots,x_N} f(x_1,\cdots\cdots,x_N) \tag{42}$$

であるような $x_i^*\in X_i$，$i=1,\cdots\cdots,N$ を見つける問題となる。これは規模の小さな問題を除いて直接解くことは困難である。チーム決定問題は，ある意思決定者の決定が他の意思決定者の決定に独立であると仮定し，そのときの最適解：person-by-person 最適解（pbp 最適解）を求めることで最適化される。pbp 最適解を得るための必要条件は，

$$f(x_1^*,\cdots\cdots,x_{i-1}^*,x_i^*,x_{i+1}^*,\cdots\cdots,x_N^*)$$
$$\geq f(x_1^*,\cdots\cdots,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,\cdots\cdots,x_N^*) \tag{43}$$

である。これは先のNash解の定義式(38)と同じ形である。したがって，チーム決定問題の pbp 最適解は非ゼロ和N人非協力ゲームで各意思決定者が持つ目的が共通する1つの目的になった場合であると考えることができる。さらにチーム決定問題を多くの意思決定者の中のN人が協力して目的を達成するために決定し行動する問題であると解釈すれば，これはゲーム理論での協力ゲームの特殊な形であるといえる。

以上の各決定問題の関係を図示すると，図1のようである。

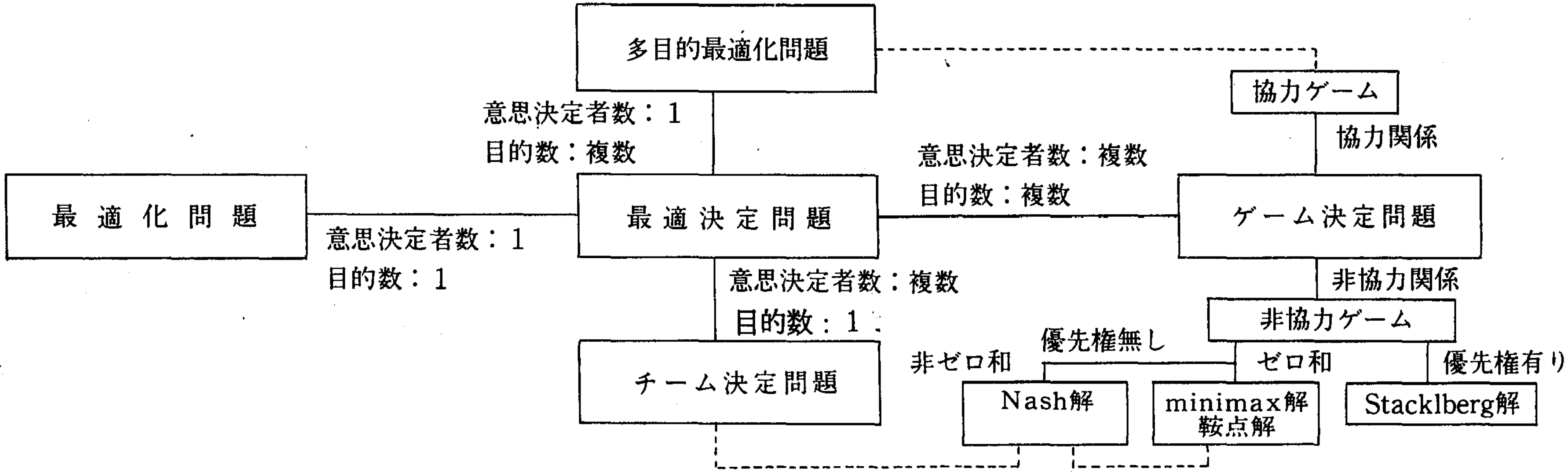

図1　最適決定問題の分類

3. チーム決定問題

3. 1. チーム理論

MarschakとRadnerによって与えられたチーム理論は，全体の目的が与えられたとき各意思決定者が協同して，その目的を達成するにはどのような情報交換を行うべきかを対象とするものであった。そこでは，チームに属する意思決定者（メンバー）間の情報交換を規定する情報構造と，その情報構造のもとでの決定規則を決定している。決定規則は，式(43)のpbp最適解によって得られる。システム全体の最適解がpbp最適解であれば，個々の意思決定者についてもそれは最適である。逆に個々の意思決定者についてpbp最適解が得られていても，それは必ずしも全体の最適解とはならない。したがって，システム全体の最適解はpbp最適解の中に存在する。他方，情報構造は一般には離散的な集合で表わされるので，最適な情報構造は通常の解析的な手法によって求めることはできない。

Marschakらによって与えられたチーム理論は動的な要素，すなわち時間を考慮にいれていない静的な問題を対象にしているので静的チーム決定問題と呼ばれている。静的な場合，意思決定者が下す決定は他の意思決定者の決定に影響を及ぼすことはない。この静的チーム決定問題はHo, Chu[4] によって動的な場合に拡張された。この問題は動的チーム決定問題と呼ばれ，ある時刻における意思決定者の決定によってシステムの状態が変化するので，時間の経過とともに状態の変化を通じてある意思決定者の決定が他の意思決定者の決定に影響を与える。動的要素を考慮にいれたチーム決定問題であっても，システムの状態が意思決定者の決定に影響されない場合が考えられる。この場合には，各時刻の各意思決定者を新たな意思決定者と考えることによって静的チーム決定問題とすることができる。この決定問題を準静的チーム決定問題という。

チームに属する意思決定者iがシステムの状態yを観測することによってなんらかの情報z_iを得る。これを

$$z_i = \zeta_i(y), \quad i=1, \cdots\cdots, N \tag{44}$$

で表わす。この情報を意思決定者間で交換することによって意思決定者iは，

$$u_i = P_i(z_i) = P_i(\zeta_i(y)) = \eta_i(y), \quad i=1, \cdots\cdots, N \qquad (45)$$

なる情報を得る。通常，状態の観測と情報の交換には外乱をともなう。この情報にもとづいて意思決定者iは意思決定

$$x_i = \gamma_i(u_i) = \gamma_i(\eta_i(y)), \quad i=1, \cdots\cdots, N \qquad (46)$$

を行なう。ここで，η_iを情報関数あるいは情報構造と呼び，γiを制御関数あるいは意思決定関数といい，さきの決定規則である。

状態の観測や情報交換にはそれなりの費用が必要で，これらの費用は情報構造や外乱に依存している。したがってチーム理論における目的関数は，式(45)，(46)を考慮して次のようになる。

$$f(\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_N, \eta_1, \cdots\cdots, \eta_N) \text{あるいは} f(\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_N) \qquad (47)$$

さきに述べたようにチーム決定問題では，この目的関数を最適にするように情報構造η_iと意思決定関数γ_iを決定するものである。

3. 2. 情報構造

最適な情報構造を解析的手法で求めることは困難であるので，考えられるすべての情報構造に関してその評価値を求め，その中から最適な情報構造を決定する。これを行うために情報構造を意思決定者が情報を持つか持たないかによって1か0の値をとる要素によって表すことにする。すなわち，

$$\eta_{ij} = \begin{cases} 1: \text{意思決定者}i\text{が情報}y_j\text{を持つとき} \\ 0: \text{その他} \end{cases}, \quad j=1, \cdots\cdots, m \qquad (48)$$

ここでmは情報の個数である。これを用いて意思決定者iの情報構造η_iとチーム全体の情報構造ηを

$$\eta_i = [\eta_{i1}, \cdots\cdots, \eta_{iN}]^T, \quad i=1, \cdots\cdots, N \qquad (49)$$

$$\eta = [\eta_i], \quad i=1, \cdots\cdots, N \qquad (50)$$

で表す。m＝Nのとき，ηはN人の意思決定者に対して2^{N^2}組存在し，Nの増加とともにその数は急速に増加する。ところで情報y_iは意思決定者iのみが持っており，他の意思決定者がこの情報を受け取ることができるのは意思決定

者 i のみからであるとする。これは情報 y_i に関して意思決定者 i のみが専門家で，他の意思決定者が情報 y_i を直接得るには意思決定者 i が得る場合に比べて非常に高い費用を要する場合である。このような特別な制約を課すことによって，検討すべき情報構造の数を減少させることができる。これは次のように表すことができる。

$$\eta_{ij}=0 \ \rightarrow \ \eta_{ji}=0,\ i, j=1, \cdots\cdots, N \qquad (51)$$

たとえばN＝2のとき情報構造 η の組合せは16組存在する。式(51)の制約を課すと組合せは次の9組になる。

$$\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&0\\0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&1\\0&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&0\\1&1\end{bmatrix}\ \begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$$

Marschak らは式(50)で表される情報構造を次のように分類している[1)]。

①集中型情報構造：どの意思決定者も同じ情報構造($\eta_1=, \cdots\cdots, =\eta_N$)を持つ場合で，$\eta=\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}$ である。

②分散型情報構造：各意思決定者が異なる情報構造を持つ場合で，$\eta=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$ である。

③集中型不完全情報構造：情報が特定の意思決定者に集中している場合で，他の意思決定者はこの意思決定者からのみ情報を得ることができる。この場合 $\eta=\begin{bmatrix}1&0\\1&0\end{bmatrix}$ あるいは $\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$ である。

④無情報構造：情報が全く得られない場合で，$\eta=\begin{bmatrix}0&0\\0&0\end{bmatrix}$ である。

Marschak らは例を用いて，これらの情報構造に対して観測費用と情報交換費用を考慮した評価を行い最適な情報構造を決定している。

3. 3. 静的チーム決定問題

静的チーム決定問題は3. 1節の式(44)～(47)のようであるが，状態の観測や

情報の交換にともなう外乱は，主観確率あるいは客観確率のどちらかの意味で確率的である。したがって与えられた情報構造ηのもとで，最適な意思決定関数は，$\gamma_i \in \Gamma_i$に対して

$$J(\gamma_1^*, \cdots\cdots, \gamma_N^*) = \max_{\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_N} J(\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_N)$$

$$= \max_{\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_N} Ef(\gamma_1, \cdots\cdots, \gamma_N) \quad (52)$$

で決定される。ここでΓ_iは意思決定関数の集合でX_iを規定する。pbp 最適解の必要条件（式(43)）より

$$J_i(\gamma_1^*, \cdots\cdots, \gamma_{i-1}^*, \gamma_i, \gamma_{i+1}^*, \cdots\cdots, \gamma_N^*)$$
$$= Ef(\gamma_1^*, \cdots\cdots, \gamma_{i-1}^*, \gamma_i, \gamma_{i+1}^*, \cdots\cdots, \gamma_N^*) \qquad (53)$$

であるので，式(46)よりこれを$\gamma_i \in \Gamma_i$について最適にすることは，

$$\max_{x_i} J_i = \max_{x_i} Ef(\gamma_1^*, \cdots\cdots, \gamma_{i-1}^*, x_i, \gamma_{i+1}^*, \cdots\cdots, \gamma_N^*) \qquad (54)$$

をx_iについて最適にすることと等価である。

Ho, Chu は，目的関数 f が凸関数であるとき J の局所最適解が全体的最適解であることを示している[4)]。いま f が次のような 2 次関数であるとする。

$$f(y, x_1, \cdots\cdots, x_N) = \tfrac{1}{2} x^T Q x + x^T R y + c^T x \qquad (55)$$

ここで$x = (x_1, \cdots\cdots, x_N)^T$, Q, R, c は適当な次元の行列とベクトルである。Ho と Chu によって与えられた必要条件は，すべての i に対して

$$\frac{\partial J_i}{\partial x_i} = 0 \qquad (56)$$

が成り立つことである。これよりすべてのu_i，$i=1, \cdots\cdots, N$について

$$Q_{ii}\gamma_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N} Q_{ij} E(\gamma_j \mid u_i) + R_i E(y \mid u_i) + c_i = 0 \qquad (57)$$

を得る。y とu_iの確率分布が正規分布であれば，意思決定関数は次の線形関数になることが知られている[12)]。

$$x_i = \gamma(u_i) = A_i u_i + b_i \qquad (58)$$

A_iとb_iは式(58)を式(57)に代入することによって得ることができる。

3. 4. 動的チーム決定問題

動的チームは，静的チームに時間要素を考慮にいれ動的な場合に拡張したものである。Ho, Chu は時刻k, k=1, ……, K において意思決定する意思決定者 i を意思決定者 ik とし，意思決定者数 NK を改めて N として，その意思決定者間に意思決定の先行関係と包含関係を導入している。x_jがu_iに影響をおよぼすとき，意思決定者 j は意思決定者 i よりもさきに意思決定することを意味する。この意思決定の先行関係を半順序関係（$<$）を用いて$j<i$のように表す。一方，意思決定者 i が自分の情報u_iを通じて意思決定者 j の情報u_jを知ることができるならば，u_iはu_jを包含するという。$j<i$なるすべての i, j に対してu_iがu_jを包含すれば，情報構造ηは partially nested(PN) という。PN 情報構造を持つ動的チームでは，その情報構造は次のような線形関数として与えることができる。

$$u_i = H_i y + \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} x_j \tag{59}$$

ここでH_iとD_{ij}は適当な次元の行列ですべての意思決定者に対して既知である。行列$D_{ij} \neq 0$であれば，意思決定者 j の決定は意思決定者 i の情報に影響を与え，$j<i$, $D_{ji}=0$を意味する。静的チームの場合，情報構造は$u_i = H_i y$である。

いま次のような LQG 問題，すなわちシステムの状態方程式が線形関数，目的関数が 2 次関数，外乱が正規分布に従う場合の問題を取り上げる。

$$\text{MAX.}\quad J = E[\tfrac{1}{2} y_{N+1}^T S y_{N+1} + \tfrac{1}{2} \sum_{j=1}^{N} (y_i^T B^T B y_i + x_i^T R x_i)] \tag{60}$$

$$\text{S.T.}\qquad y_{i+1} = F y_i + G x_i + w_i \tag{61}$$

さらに意思決定者 i の観測は

$$z_i = C y_i + v_i \tag{62}$$

であり，その情報構造は

$$u_i = H_i \xi + \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} x_j \tag{63}$$

であるとする。ここで$\xi=(y_1, w_1, \cdots\cdots, w_N, v_1, \cdots\cdots, v_N)^T$, F, G, C は適当な次元の行列，$y_1$は初期状態，wi，vi は外乱である。

式(61)をy_iについて解き，y_1，w_i，x_iの関数として表すと

$$y_i=F^{i-1}y_1+\sum_{j=1}^{i-1}F^{i-1-j}\ (Gx_j+w_j) \tag{64}$$

となる。これを式(62)に代入すると

$$z_i=CF^{i-1}y_1+C\sum_{j=1}^{i-1}F^{i-1-j}\ (Gx_j+w_j)+v_i \tag{65}$$

となる。式(64)，(65)はともにx_i，w_i，v_iの線形関数である。これらと式(63)を式(60)に代入すると

$$J=E(½x^TQx+x^TS\xi) \tag{66}$$

を得る。ここで$x=(x_1, \cdots\cdots, x_N)^T$である。また x に関係しない項は省略してある。これは先の静的チーム決定問題での目的関数式(55)と基本的に同じである。

PN 情報構造の場合，ある意思決定者は先行する意思決定者を知っており，またその決定規則についての知識もある。そこでチームに属するN人の意思決定者をその先行関係を考慮して次のようなnグループに分割する。

$N_1=\{i:j\prec i$ なる j が存在しない$\}$

$N_2=\{i:j\prec i,\ j\in N_1\}$

$N_3=\{i:j\prec i,\ j\in N_2\}$

$\vdots$

$N_n=\{i:j\prec i,\ j\in N_{n-1}\}$

N_1に属する意思決定者は先行する意思決定者が存在しないので式(63)は$u_i=H_i\xi$となる。これはu_iが過去の情報ξにのみ従っていることを示している。N_2に属する意思決定者は先行する意思決定者の決定x_jとその情報u_j，$j\in N_1$がわかっているので，式(63)は

$$u_i=\begin{bmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_{i-1} \\ H_i\xi+\sum_{j=1}^{i-1}D_{ij}x_j \end{bmatrix},\quad i\in N_2 \tag{67}$$

となる。すべての$i \in N_2$, $j \in N_1$に対して

$$\hat{u}_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} D_{ij} x_j \tag{68}$$

とおくと,

$$\hat{u}_i = H_i \xi \tag{69}$$

を得る。したがって，情報構造が式(63)のような線形のPN情報構造であり，任意の決定関数γ_i, $i=1$, ……, Nに関する動的チームは，情報構造が式(70)で与えられる情報構造の静的チームと等価になる。このことから式(60)〜(63)で与えられるLQGタイプの動的チーム決定問題の最適な意思決定関数は静的チーム決定問題の場合と同様に式(58)と同型の線形関数として与えられる。

Ho, Chuは上記のようにPN情報構造を持つ動的チーム決定問題を等価な静的チーム決定問題に置き換えて線形の意思決定関数を導いた。そこではN_iに属する意思決定者は先行する意思決定者の情報を同じように持っている。このような情報構造は一般に古典的情報構造と呼ばれ，そうでない情報構造は非古典的情報構造と呼ばれている。この非古典的情報構造を持つ動的チーム決定問題では，意思決定関数は先のような線形関数にはならない。Cole, Sage[12] はこのようなPN情報構造でない動的チーム決定問題に対して，PN情報構造を持つ補助問題を作成しその意思決定関数を求めることによって元の問題の意思決定関数を求めている。非古典的情報構造に関して森，示村[13] は情報交換価値と情報伝達価値について考察し，最適制御，最適な情報伝達と交換時点の決定などを導いている。

4. 生産計画問題への応用

ここではシステムの状態観測や情報交換に外乱が存在しない確定的な問題を対象にする。制約条件式g(x)をシステムの状態方程式として次のように書き改める。

$$y = g(x) \tag{70}$$

ここで$y=(y_1, \ldots\ldots, y_N)^T$, $x=(x_1, \ldots\ldots, x_N)^T$である。目的関数$f(y, x)$はx, yに関して微分可能な凹関数であるとする。情報構造は,

$$u_i = H_i y, \ i=1, \cdots\cdots, N \tag{71}$$

で与えられる静的な場合であるとする。また意思決定関数は式(46)である。このときの意思決定問題は次のようになる。

$$\begin{aligned} &\text{MAX. } f(y, x) \\ &\text{S.T. } \ y = g(x) \\ &\qquad u_i = H_i y, \ i=1, \cdots\cdots, N \end{aligned}$$

この問題を最適化するために，Lagrange 関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} L(y, x_1, \cdots\cdots, x_N) &\triangleq f(y, x_1, \cdots\cdots, x_N) + \lambda^T(g(x_1, \cdots\cdots, x_N) - y) \\ &\quad + \sum_{i=1}^N \mu_i^T(H_i y - u_i) \\ &= f(g(x_1, \cdots\cdots, x_N), x_1, \cdots\cdots, x_N) \\ &\quad + \lambda^T(g(x_1, \cdots\cdots, x_N) - y) + \sum_{i=1}^N \mu_i^T(H_i y - u_i) \end{aligned} \tag{72}$$

いまの場合 pbp 最適解の必要条件は式(43)より

$$\begin{aligned} &L(y, x_1^*, \cdots\cdots, x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*, \cdots\cdots, x_N^*) \\ &\qquad \geqq L(y, x_1^*, \cdots\cdots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \cdots\cdots, x_N^*) \end{aligned} \tag{73}$$

である。上式の右辺は式(46)を考慮して次のように表わすことができる。

$$\begin{aligned} &L(y, \gamma_1^*(u_1), \cdots\cdots, \gamma_{i-1}^*(u_{i-1}), \\ &\qquad \gamma_i(u_i), \gamma_{i+1}^*(u_{i+1}), \cdots\cdots, \gamma_N^*(u_N)) \end{aligned} \tag{74}$$

$\gamma_1^*, \cdots\cdots, \gamma_{i-1}^*, \gamma_{i+1}^*, \cdots\cdots, \gamma_N^*$ と任意の u_i が固定されているならば，$\gamma_i \in \Gamma_i$ に関して式(74)を最適化することは，

$$L(y, \gamma_1^*(u_1), \cdots, \gamma_{i-1}^*(u_{i-1}), x_i, \gamma_{i+1}^*(u_{i+1}), \cdots, \gamma_N^*(u_N)) \tag{75}$$

を x_i に関して最適化することと等価である。したがって pbp 最適解を得るための必要条件は次のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} f(y^*, x^*) \frac{\partial}{\partial x} g(x^*) + \lambda^{*T} \frac{\partial}{\partial x} g(x^*) = 0 \tag{76}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} f(y^*, x^*) - \lambda^* + \sum_{j=1}^N H_j^T \mu_j^* = 0 \tag{77}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = g(x^*) - y^* = 0 \tag{78}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu i} = H_i^T y^* - u_i = 0 \tag{79}$$

上式を解くとx^*，y^*，λ^*はμ（$=(\mu_1, \cdots\cdots, \mu_N)^T$）の関数として求められる。最適解を得るために，$\mu$をパラメータとして次のような計算アルゴリズムを考える。

【計算アルゴリズム】

ステップ1：μとyの初期値をそれぞれμ^0=定数，$y^0=y_0$（初期在庫）とする。$k=0$とおく。

ステップ2：$\mu^{k+1}=\mu^k+\varepsilon y^k$を計算し，これを用いて$y^{k+1}=y(\mu^{k+1})$を計算する。ここで$\varepsilon$はステップ幅で任意の定数である。

ステップ3：$|y^{k+1}-y^k|<\delta$であれば，手順を終了する。そうでなければ$k=k+1$として，ステップ2へ戻る。ここでδは手順の停止基準で，任意の定数である。

この手順によって最終的に得られたμ^{k+1}を用いて最適解を次のように計算する。

$$x^*=x(\mu^{k+1}), \quad y^*=y(\mu^{k+1}), \quad \lambda^*=\lambda(\mu^{k+1})$$

以上の結果を次の生産計画問題への適用を試みる。生産システムは図2に示すような2工程生産システムで，各工程には工程の生産計画を立てる意思決定者がいる。各意思決定者は工程の在庫状況を調べ，それを一方の意思決定者に知らせ，互いに在庫状況を交換して自らの生産計画を立てる。各工程では1種類の製品，すなわち工程1では製品1を，工程2では製品2を生産していており，各製品は互いに独立な需要を持つものとする。ただし，製品2を1個生産するのに製品1を1個必要とする。生産システムには，なんらかの生産目標が与えられており，目標からのずれを最小にするために目的関数は次の2次関数で表されるものとする。

$$f(y, x)=½(y^TQy+x^TRx)+c^Tx+d^Ty \tag{80}$$

ここで$x=(x_1, x_2)^T$, $Q=\begin{bmatrix} q_1 & q_3 \\ q_3 & q_2 \end{bmatrix}$, $R=\begin{bmatrix} r_1 & r_3 \\ r_3 & r_2 \end{bmatrix}$, $c=(c_1, c_2)^T$, $d=(d_1, d_2)^T$

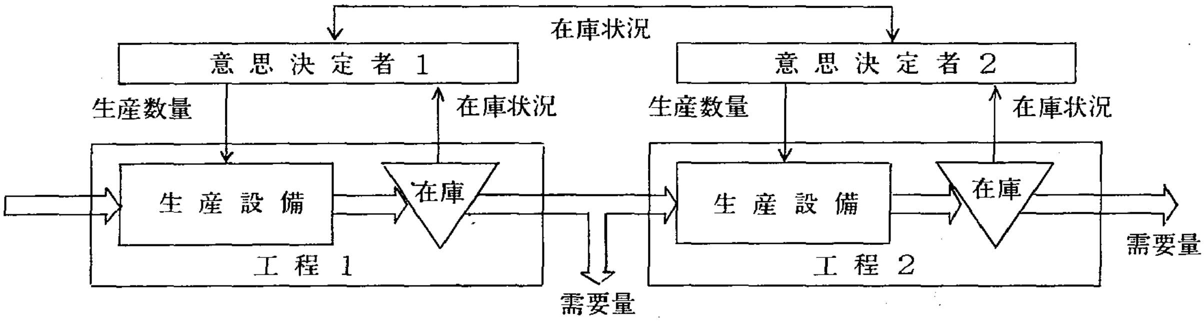

図2　2工程生産システム

である。各工程の在庫状態を次式で表す。

$$y=y_0+\sum_{i=1}^{2}B_i x_i-D \tag{81}$$

ここで$y_0=(y_{01},\ y_{02})$は初期在庫，$B_1=(1,\ 0)$，$B_2=(-1,\ 1)$，$D=(D_1,\ D_2)$である。情報構造は分散型情報構造であるとする。すなわち

$$u_i=H_i y=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}y \tag{82}$$

決定変数は在庫量と生産量であるから非負条件$y_1\geqq 0$，$y_2\geqq 0$，$x_1\geqq 0$，$x_2\geqq 0$を必要とする。各意思決定者の生産計画問題は，式(81)，(82)の制約のもとで式(80)の目的関数を最小にすることである。

pbp最適解を求めるためにLagrange関数を以下のように定義する。

$$\begin{aligned}L(y,x,\lambda,\mu)&\triangleq \tfrac{1}{2}(y^TQy+x^TRx)+c^Tx+d^Ty\\&\quad+\lambda^T\Big(y_0+\sum_{i=1}^{2}B_i x_i-D-y\Big)+\sum_{i=1}^{2}\mu_i^T(y_i-u_i)\\&=\tfrac{1}{2}\Big[\Big(y_0+\sum_{i=1}^{2}B_i x_i-D\Big)^TQ\Big(y_0+\sum_{i=1}^{2}B_i x_i-D\Big)+x^TRx\Big]+c^Tx+d^Ty\\&\quad+\lambda^T\Big(y_0+\sum_{i=1}^{2}B_i x_i-D-y\Big)+\sum_{i=1}^{2}\mu_i^T(y_i-u_i)\end{aligned}\tag{83}$$

ここで$\lambda=(\lambda_1,\ \lambda_2)^T$，$\mu=(\mu_1,\ \mu_1)^T$である。式(76)～(79)の必要条件を各意思決定者ごとに求めると，次のようになる。

$$\frac{\partial L}{\partial x_i}=B_i^TQy^*+Rx_i^*+c+B_i^T\lambda^*=0,\quad i=1,\ 2 \tag{84}$$

$$\frac{\partial L}{\partial y}=Qy^*+d-\lambda^*+\mu^*=0 \tag{85}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda}=y_0+\sum_{i=1}^{2}B_i x_i^*-D-y^*=0 \tag{86}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_i}=y_i^*-u_i=0,\ i=1,2 \tag{87}$$

これを解くと

$$x_i^*=-2R^{-1}\{B_i^T Q\Gamma^{-1}(y_0-D)-M_i G_i(\mu)\} \tag{88}$$

$$y^*=\Gamma^{-1}(y_0-D+2B_i R^{-1}G_i(\mu)) \tag{89}$$

$$\lambda^*=Q\Gamma^{-1}(y_0+G_i(\mu))+d+\mu \tag{90}$$

ここで

$$G_i(\mu)=c+B_i^T d+B_i^T\mu$$

$$\Gamma=I-2\sum_{i=1}^{2}B_i^T R^{-1}B_i Q$$

$$M_i=I+2B_i^T Q\Gamma^{-1}\sum_{i=1}^{2}B_i^T R^{-1}$$

さきの計算アルゴリズムに式(89)を用いて逐次的にμ^{k+1}とy^{k+1}を計算すると，各工程について最適な生産量x^*と在庫量y^*を求めることができる。

5．結　言

本論では，従来分散制御との関連で研究されているチーム理論を，最適意思決定の立場から取り扱うことを試みた。はじめに意思決定者の数と目的の数から最適意思決定問題の分類を行い，それらの関係を明らかにした。そこでチーム理論のpbp最適解は目的関数が1つの時のNash均衡解と等価であることを示した。つぎにチーム決定問題の概括を静的チームと動的チームについて行なった。とくに動的チーム決定問題で，その情報構造がPN情報構造であれば等価な静的チーム決定問題することができることをHo, Chuの研究にしたがって示した。チーム理論では一般的にシステムの状態の観測や情報交換に外乱が存在すると仮定しているので，チーム決定問題は不確実性をともなう決定問題として取り扱われている。本論では，そのような外乱が存在しない確定的なチーム決定問題を取り扱うこととし，そのときのpbp最適解が存在する必要条件を示した。その結果を用いて，2工程生産システムに対してチーム決定問題を定

式化し，最適解を求める方法を示した。

参 考 文 献

1) J.Marschak, R.Radner: Economic Theory of Team, Yale Uni. Pr., (1972), p.9
2) 市川惇信：「意思決定論」,共立出版,(1983), p.6
3) J.Marschak:"Elements for a Theory of Teams," Managment Sci., Vol.1, No.2, (1955), pp.127−137
4) Y.C.Ho, K.C.Chu:"Team Decision Theory and Information Structures in Optimal Control Problems−Part I,II," Trans. on Automatic Control, Vol. AC−17, No.1, pp.15−21, pp.22−28, (1972)
5) K.H.Kim, F.W.Roush: Team Theory, John-Wiley & Sons, (1987),pp.131−137
6) 田端孝一，杉本重雄：「協同型処理におけるプログラミングパラダイム」，情報処理，Vol.28, No.3, (1987), pp.286−294
7) 「分散処理の新しいスタイルーチーム・コンピューティング登場」，日経コンピュータ，(1990／5)
8) 宮川公男：『意思決定論』，丸善，(1983),p.29
9) たとえばE.M.L.Beale: Introduction to Optimization, John-Wiley & Sons, (1988)
10) たとえばJ.L.Cohon: Multiobjective Programming and Planning, Academic Press, (1978)
11) J.von Neuman, O.Morgenstern: Theory of Games and Economic Behavior, Princeton, (1944)
12) J.D.Cole, A.P.Sage:"Multi Person Decision Analysis in Large-Scale Hier archical Systems −team decision theory," Int. J. Control, Vol.22, No.1, (1975), pp.1−28
13) 森欣司,示村悦二郎：「情報交換を考慮したチーム問題」,計測自動制御学会論文集, Vol.9, No.5, (1973), pp.560−567