

複数窓口同時サービス並進 待ち行列の入力制御

中 村 隆 志

1. まえがき

独立な到着過程を持つ複数個の待合室があり、すべての待合室に客がいるときに扱い者が各待合室から一人ずつ客を受け入れてサービスを行うような待ち行列を同時サービス並進待ち行列と呼ぶ⁽²⁾。例としては、複数の下請会社からの部品の到着を待ち、それらのすべてが揃ったときに組み立てを行う工場などが挙げられる。この待ち行列システムは負荷の大小によらず、本質的に不安定であることが知られている^{(1), (2)}。このため、実際には待合室の容量制限や、到着率を制御する入力制御などにより安定化を計る必要がある。文献(2)、(3)では、入力制御法が提案され、それを適用したときの単一窓口システムの特徴が詳細に述べられている。しかし、窓口が複数のシステムは扱われていない。複数窓口の場合もシステムが不安定であることにはかわりはない。なぜならば、各待ち行列へ到着する客数の差がシステムの不安定性を引き起こす原因であるからである。そこで、本論文では複数窓口のシステムについて、文献(2)と同様の入力制御を行った場合の特性を近似解析とシミュレーションにより考察する。これにより、窓口増設の効果などを明らかにする。

なお、本論文では解析を容易とするため、ポアソン到着、指数サービスで、待合室が2個のモデルのみを扱う。

2. モデル

本論文では図1のような待合室が2個 (Q_1, Q_2) のモデルを考察の対象と

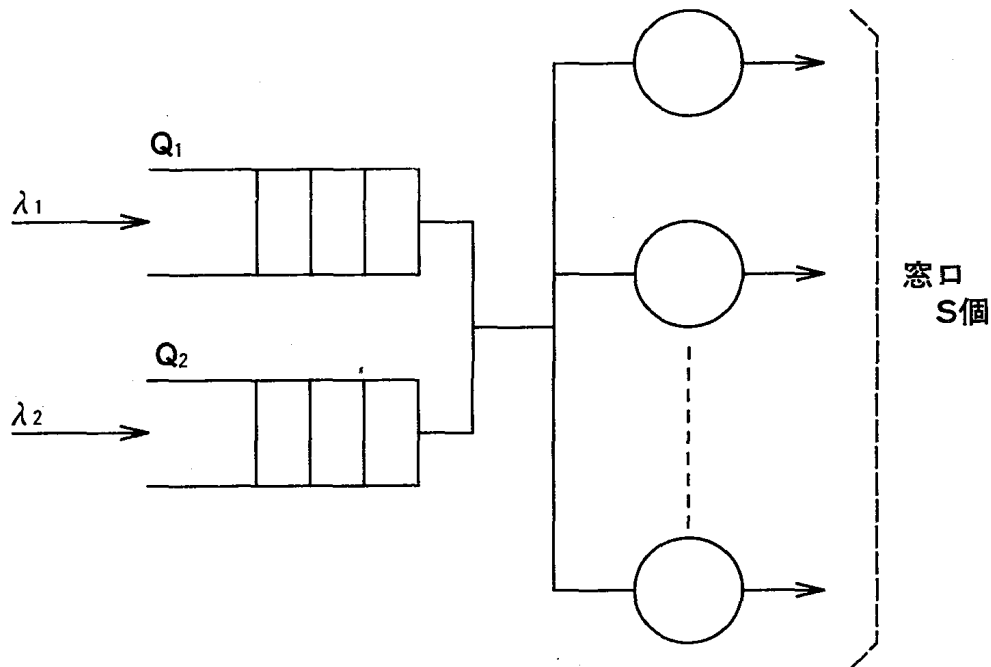


図1 システムモデル

する。窓口数は S 個であり、サービス時間はすべての窓口ともサービス率 μ の指数分布とする。到着は到着率 λ_1 、 λ_2 のポアソン分布に従う。

また、

$$\max(\lambda_1, \lambda_2) / S\mu < 1 \quad (1)$$

とする。

空いている窓口の扱いは、両方の待合室に少なくとも一人の客がいるときに、それぞれ一人ずつ先着順に客を受け入れて同時にサービスを行う。両方の待合室に客が揃わない場合にはサービスを行わない。したがって、ある客が待ち行列の先頭において、空いている窓口があったとしても、他方の待ち行列の客がいなければサービスは受けられず、待たされることとなる。

3. 入力制御

この複数窓口モデルが単一窓口モデルと同様に不安定であることは、シミュレーションにより確かめることができる。すなわち、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$ で λ_1 と λ_2 の差がある程度以上大きい場合は、 $\max(\lambda_1, \lambda_2)$ の方の待ち行列が不安定となって待ち行列長は増大し続け、 $\min(\lambda_1, \lambda_2)$ の方の待ち行列は安定となる。

また、 $\lambda_1 = \lambda_2$ の場合は、ある期間毎に交互に一方が不安定側、他方が安定側となる。このふるまいの定性的な説明は文献(2)に詳細に述べられている。

この不安定性は、各待ち行列へ到着する客数の差に起因している。そこで、文献(2)と同一の次のような入力制御を行い、到着率を変化させて安定化を図ることとする。

簡単のため、制御が行われていないときの Q_1 、 Q_2 の到着率を $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ とする。

ある時刻に Q_1 、 Q_2 にいる客数を n_1 、 n_2 とする。制御限界 C_L (正整数)を定め、

$$|n_1 - n_2| < C_L \quad (2)$$

である間は制御を行わず、 $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ のままとする。式(2)が満たされなくなったときに次のように制御を行う。

$$n_1 - n_2 \geq C_L \quad (3)$$

の場合は

$$\lambda_1 = \alpha_L \lambda, \quad \lambda_2 = \alpha_H \lambda \quad (4)$$

とし、

$$n_2 - n_1 \geq C_L \quad (5)$$

の場合は

$$\lambda_1 = \alpha_H \lambda, \quad \lambda_2 = \alpha_L \lambda \quad (6)$$

とする。ただし、

$$\alpha_H \geq 1, \quad 1 \geq \alpha_L \geq 0 \quad (7)$$

文献(2)ではこの制御方法を Q_1 、 Q_2 の双方を制御することから両側制御と呼んでいる。また、 α_H と α_L の選び方により、

$$a) \quad \alpha_L = 1, \quad \alpha_H \geq 1$$

$$b) \quad \alpha_L \leq 1, \quad \alpha_H = 1$$

$$c) \quad \alpha_L \leq 1, \quad \alpha_H \geq 1, \quad \alpha_L + \alpha_H = 2$$

の三つの場合を考え、下請け工場の工員の増減に当てはめ、それぞれ、a) パート制御、b) 帰休制御、c) 出向制御と名付けている。

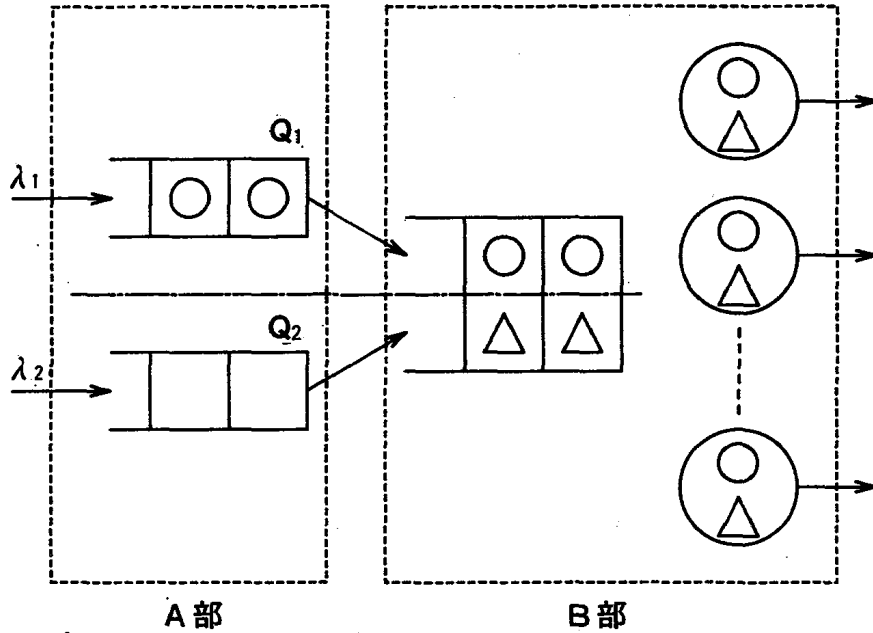


図2 図1と等価なモデル

4. 近似解析

解析を容易に行うために、文献(2)と同様に図1のシステムを図2のような等価なモデルに変形する。\$Q_1\$、\$Q_2\$をそれぞれA部とB部に分ける。B部には\$Q_1\$、\$Q_2\$に揃った客が対をなして並ぶ。これにはサービス中の対も含む。A部には対となる他方の客が未到着の客が並ぶ。したがって、A部の片方は必ず空となる。また、A部からB部への移動には時間を要しないものとする。

A部の挙動は単一窓口の場合とまったく同一である。ある時刻における\$Q_1\$、\$Q_2\$の客数の差

$$k = n_1 - n_2 \tag{8}$$

をA部の状態とすると、これは連続時間マルコフ連鎖として厳密に解析できる。A部における平均システム内客数\$N_A\$、制御を行った場合の平均到着率\$\bar{\alpha} \lambda\$、平均システム内時間\$T_A\$は\$Q_1\$、\$Q_2\$とも等しく、文献(2)より次のようになる。

$$N_A = P_{A0} \left\{ \frac{C_L (C_L - 1)}{2} + \frac{C_L}{\alpha_H - \alpha_L} + \frac{\alpha_L}{(\alpha_H - \alpha_L)^2} \right\} \tag{9}$$

$$\bar{\alpha} \lambda = P_{A0} \lambda \left\{ \frac{\alpha_H + \alpha_L}{\alpha_H - \alpha_L} + 2 C_L - 1 \right\} \quad (10)$$

$$T_A = N_A / (\bar{\alpha} \lambda) \quad (11)$$

ただし,

$$P_{A0} = \frac{1}{2 C_L - 1 + \frac{2}{\alpha_H - \alpha_L}} \quad (12)$$

次にB部を含めたシステム全体の挙動を考える。そのためにはA部の待ち客数の差 k とB部の客数の組を状態とした無限連続時間マルコフ連鎖を解析しなければならない。この状態推移を考えることは容易であるが一般的な解析は困難と思われるので、文献(2)のように、B部を近似的に扱うこととする。

B部の到着過程はA部の退去過程であり、したがって、厳密にはA部の状態 k により変化する。しかし、ここでは、それを到着率 $\bar{\alpha} \lambda$ のポアソン到着として近似する。そうすると、B部はサービス率 μ の指数サービスであるから、M/M/Sシステムとして扱うことができる。したがって、B部の平均システム内客数 N_B は次のようになる⁽⁴⁾。

$$N_B = \rho_B + \frac{\rho_B^S \bar{\alpha} \lambda \mu S}{S! (\mu S - \bar{\alpha} \lambda)^2} P_{B0} \quad (13)$$

ただし,

$$\rho_B = \bar{\alpha} \lambda / \mu \quad (14)$$

$$P_{B0} = \left[\sum_{j=0}^{S-1} \frac{\rho_B^j}{j!} + \frac{\rho_B^S}{S! (1 - \rho_B/S)} \right]^{-1} \quad (15)$$

これらより、A部、B部を含めたシステム全体の平均システム内客数 N 、平均システム内時間 T は次式となる。

$$N = N_A + N_B \quad (16)$$

$$T = N / \bar{\alpha} \lambda \quad (17)$$

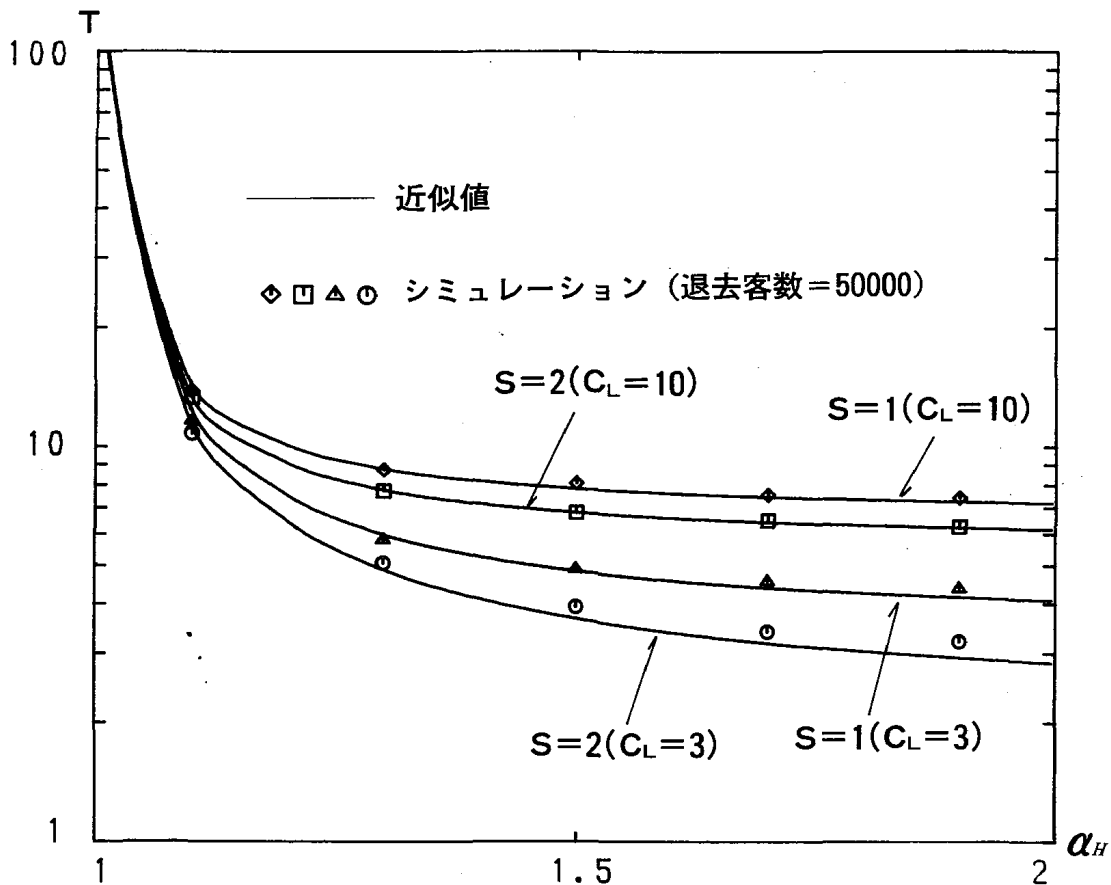


図3 制御特性 ($\lambda = 0.5, \mu = 1, \alpha_L = 1$)

5. 数値例とシミュレーション

ここでは、近似式によるいくつかの数値例とシミュレーションにより、入力制御の有効性、近似式の妥当性、窓口増設の効果などについて考察する。

図3は $\lambda = 0.5, \mu = 1, \alpha_L = 1$ とし、 α_H を1から2まで変化させたときの平均システム内時間の近似値、及びシミュレーション値を示している。窓口数 S は1と2で、 $C_L = 10, 3$ としている。これより、近似解析の精度は十分よいことがわかる。また、複数窓口の場合にも当然ではあるが、入力制御の効果があり、システムが安定化されている。この例では、 α_H が大きくなるほど制御は強くなるが、単一窓口の場合について文献(2)で述べられているのと同様に、複数窓口の場合にも、ある程度以上の強い制御をしてもそれほど効果は上がらない。さらに、この例では α_H が大きくなるにつれて窓口増設の効果が大きくなることがわかる。これは α_H が大きくなると、B部への到着率が増加

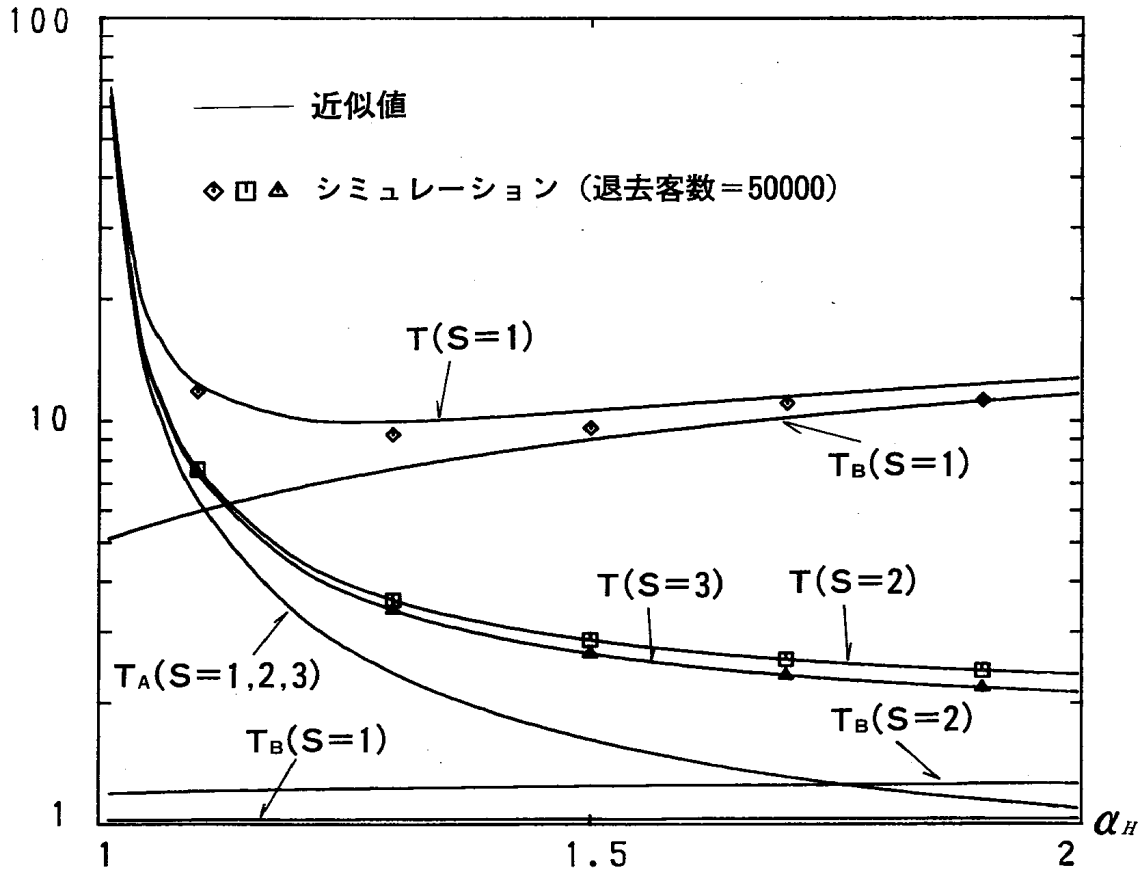


図4 制御特性 ($\lambda=0.8, \mu=1, \alpha_L=1, C_L=3$)

するためである。

図4は $\lambda=0.8, \mu=1$ で $C_L=3$ の場合である。 $S=1, 2, 3$ の場合について全体のシステム内時間の他に、A部、B部のシステム内時間の近似値を示している。 α_L, α_H の条件は図3と同じである。A部の値は $S=1, 2, 3$ ですべて同一となる。多くの場合は、図3の例のように制御が強くなるにつれて平均システム内時間は減少する。しかし、高トラフィックの場合に制御限界の選び方によっては、図4の $S=1$ の場合のように、ある程度以上制御を強くすると、かえってその値が増加してしまうこともある。これは、A部のシステム内時間は制御を強くすることによって減少するが、B部への到着率が上がることにより、B部のシステム内時間が増加するためである。この例の場合はB部のシステム内時間の方がA部よりも大きいためこのような現象が起きる。窓口の増設はB部のシステム内時間を減少させるので、このような場合には特に効果があることがわかる。

図5は $\alpha_L=1$, $\alpha_H=1.5$ に固定して, 到着率 λ を変化させた場合のA部, B部, 及び, 全体の平均システム内時間の変化を $S=1, 2, 3$ について近似式により示したものである。これより, λ の変化による, 全体のシステム内時間に対するA部とB部のシステム内時間の関係, 及び, 窓口増設の効果などが読み取れる。

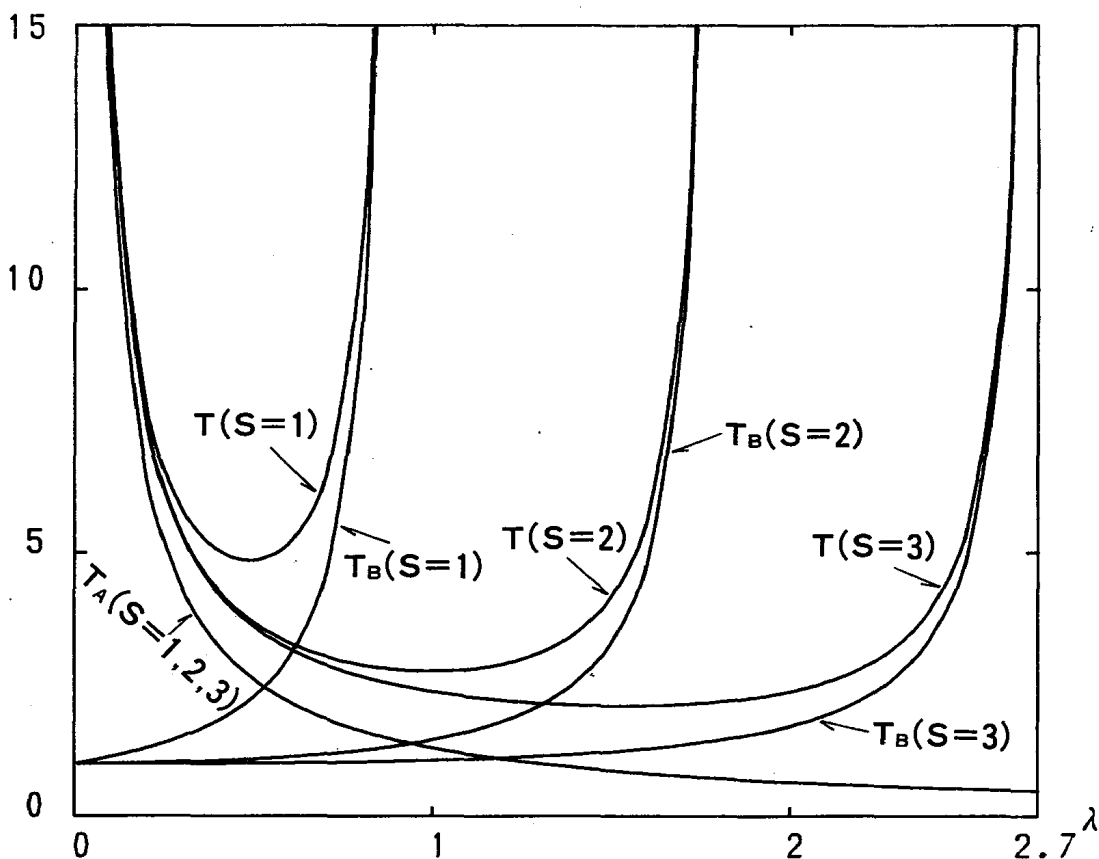


図5 制御特性 ($\mu=1, \alpha_L=1, \alpha_H=1.5, C_L=3$)

システムによっては, 入力制御の開始, 停止の判断から実際の実行までの時間遅れがある場合がある。文献(2)と同様に, 制御の開始, 停止の判断から D 時間後に到着率が変化する場合のシミュレーションを行ってみた。図6は $\lambda=0.5, \mu=1, \alpha_L=0.5, \alpha_H=1.5, C_L=3$ とし, D を変化させたときのシミュレーションによるシステム内時間 ($S=1, 2, 3$) を実線で結んだものである。複数窓口の場合も D を大きくすると, 平均システム内時間は増大する。また, 遅れ時間 D が大きいほど窓口増設の効果の度合いが小さくなることがわかる。これは, 遅れ時間が大きくなるとA部のシステム内時間の増加によってB部へ

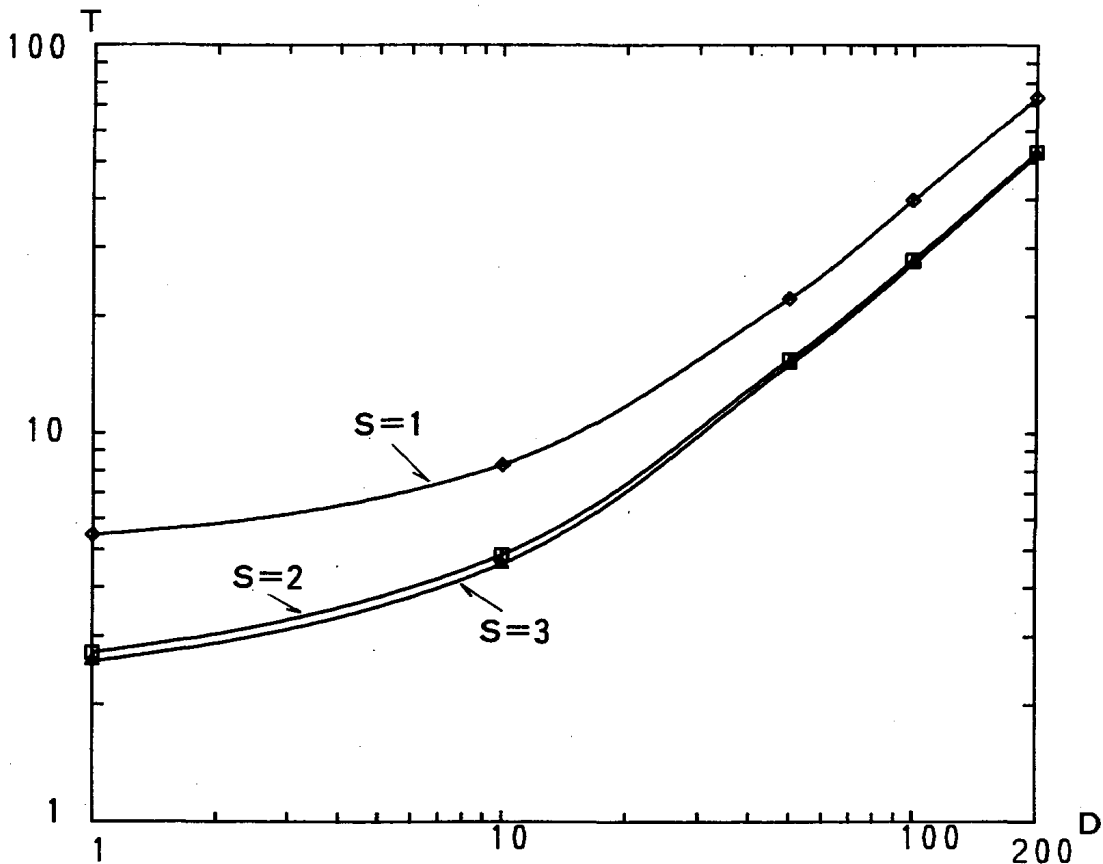


図6 制御時間遅れDのある場合

の到着率が減少し、全体のシステム内時間に占めるB部のシステム内時間の割合が小さくなるためと考えられる。

6. むすび

2個の待合室を持つ複数窓口同時サービス並進待ち行列システムにおいて入力制御法を適用し、近似解析とシミュレーションにより、システムの挙動を明らかにした。得られた主な結果をまとめると次のようになる。

- 1) 窓口が複数の場合も、入力制御の効果があり、システムが安定化される。
- 2) 近似解が有効である。
- 3) B部への到着率が大きいほど、窓口増設の効果がある。
- 4) 制御に時間遅れがある場合には、時間遅れが長いほど、窓口増設の効果の度合いが小さくなる。

本論文では待合室が2個の場合のみを扱ったが、待合室が3個以上の場合の

一般的な入力制御法の考案と、その場合のシステム特性の考察が今後の課題として残されている。

文 献

- (1) J.M.Harrison: "Assembly-like queues", J.Applied Probability, vol.10, pp.354-367(1973).
- (2) 福田, 佐藤, 椋本: "同時サービス並進待ち行列とその入力制御", 信学論(A), J69-A, 7, pp.829-839(昭61-07).
- (3) 福田, 佐藤, 椋本: "同時サービス並進待ち行列の入力制御", 信学論 (A), J69-A, 11, pp.1310-1318(昭61-07).
- (4) H.M.ワグナー: オペレーションズ・リサーチ入門6 (待ち行列), 培風館 (1986).