

ダイナミック・ゲーム理論による 企業間連携モデルの解析

奥田和重

概 要

本論文では、産業集積地に見られる企業連携の中で、核となる企業が存在しないハブレス・カンパニーについて、各地の産業集積の事例からその形態を明らかにしている。そのハブレス・カンパニーを多段階生産システムとして捉えたとき、ハブレス・カンパニーを構成する企業が多段階生産システムの各工程を形成しており、工程（企業）間の相互関係を満たす生産計画を導く理論展開を行っている。この理論展開では、まず単一期間生産計画問題を定式化し、これに非協力ゲームの理論を適用することで工程（企業）間の相互関係を満たす最適な生産計画を得ることができることを示している。さらに多期間生産計画問題に対しては、ダイナミック・ゲームの理論を適用することで多段階生産システムの多期間生産計画問題の最適化を行っている。そしてこれらの理論展開の結果の妥当性を検討するために数値計算例を示している。

1. 緒 言

企業間連携に関する数学モデルは、すでに[1]で報告しているところで、本論文ではそこで提案した数学モデルを具体的に展開して最適化解析し、数値計算例を示すことを目的としている。対象としている企業間連携は、比較的狭い地域に集積した中小企業が相互に連携して技術的な相乗効果あるいは創発効果という集積効果を発現する中小企業間の連携である。この企業間連携は、自社

だけでは受けきれない量を受注した場合や、自社だけでは対応できない技術が必要とする場合など、受注に応じて企業集団を形成して柔軟に生産システムを編成する。このような企業集団は、特定の親企業や中核企業が存在しない集団でハブレス・カンパニー[2]と呼ばれている。[2]ではハブレス・カンパニーを「自由な意思を持った複数の企業がコンピュータ・ネットワークの上でオープンな連携を達成し、それらの企業が統治中枢(hub)を必要とすることなく(-less)、あたかも一つの会社(company)であるかのごとく自律的に活動する有機体をさす。」と定義している。このようにハブレス・カンパニーは自律的な意思決定主体である企業によって構成されていると言える。一方、自律的な意思決定主体で構成される生産システムを分権的生产システムと定義して非協力ゲームによる最適化解析が行われている[3]。そこでは、多段階生産システムを構成する生産工程を自律的な意思決定主体としており、それにより生産システムの組織構造が分権的であるとしている。そして、この分権的な組織構造を持つ多段階生産システムの単一期間生産計画問題に対して非協力ゲームの理論を適用して最適化解析を行い、Nash均衡解を導いて多段階生産システムの情報構造を明らかにしている。この多段階生産システムを構成する工程とハブレス・カンパニーを構成する企業はともに自律的な意思決定主体であることから、[3]で行った理論展開をハブレス・カンパニーに適用することができる。

本論文では、はじめに n 企業からなるハブレス・カンパニーに[3]で展開した最適化解析を適用し、 $n=2$ の場合について、すなわち2企業からなるハブレス・カンパニーにおける情報構造を明らかにする。つぎに、これを多期間生産計画問題に拡張し、数値計算例を用いて最適化解析の妥当性を検討する。

第2章では、産業集積の類型に基づいて中小企業の企業間連携を俯瞰し、ハブレス・カンパニーの特徴を明らかにする。第3章では[3]に基づいて多段階生産システムの各工程がハブレス・カンパニーを構成する企業であるとして、単一期間生産計画問題の最適化解析を行い、2企業の場合についてハブレス・カンパニーの情報構造を明らかにする。第4章では、3章での理論展開を多期間生産計画問題に拡張し数値計算例を示す。第5章は、本論文の結論部である。

2. 企業間連携とハブレス・カンパニー

2.1 企業間連携

中小企業による企業間連携は、比較的狭い地域に相互関連性の強い多数の企業が集中的に立地した産業集積の中で形成されることが多い。産業集積の中で密集した中小企業は、相互依存関係によって全体として効率的な生産体系を形成しており、その産業集積全体を大企業や問屋といった中心的企業が主導し、これらの企業に中小企業は依存するという構造を形成している。近年の少子高齢化は生産人口の減少と都市部への人口集中を招き、地方の中小企業の衰退と減少させ、さらに中心的企業が生産拠点を海外等に移転させることでサプライチェーンが崩壊して中小企業をさらに弱体化させている。

中小企業が集中して立地する産業集積には次のような類型に分類することができる[4]。

- (1) 地場産業集積
- (2) 企業城下町型産業集積
- (3) 都市型産業集積

(1)の地場産業集積は、金属洋食器産業の新潟県燕市や繊維産業の大阪府泉州地域などがその代表例である。燕市の事例では元請けと呼ばれる4～50社の企業の元に1次下請け、2次下請けの中小企業が存在するピラミッド型の生産構造で分業体制を取っており、自社で製品を一貫生産する企業は一部の業者に限られている[5]。泉州地域では、製品の企画・開発を行う問屋と製品の製造を行う中小企業という分業体制を取っている[6]。(2)の企業城下町型産業集積では、自動車製造企業の周辺に多くの中小企業が集積していることはよく知られている。また、戦中に地方に疎開した企業の下請けを行う中小企業が集積した形態がある。前者には愛知県豊田市の事例がある。トヨタ自動車に部品等を供給する一次サプライヤーがあり、その下に二次サプライヤー、三次サプライヤーが存在するピラミッド型の生産構造である[7]。後者の事例では、長野県諏訪地方の精密機械の産業集積がある。この場合も疎開企業を頂点とするピラミッ

下型の生産構造を形成している[8]。(3)の都市型産業集積は、膨大な数の専門化した中小企業が都市部に集積した形態で、東京都大田区や大阪府東大阪地域など、その地域名で呼ばれる産業集積が多い[9]。

しかしながら、低価格の輸入品の増加や元請け企業の生産拠点の海外移転等によりこれらの産業集積は衰退しつつある。中小企業の倒産・廃業等により産業集積が衰退すると、失業者が増加し、それに伴い中小の小売店やサービス店が顧客を失って減少し、それがまた人口の減少を加速させて地域経済・社会の崩壊を招くことになる。このような状況の中で、中小企業を活性化し地域経済・社会の再生を目指した企業間連携が、産業集積の中に形成されるようになった。

産業集積内に形成される企業間連携については北イタリアの事例がよく知られている[10]。北イタリアの中小企業は、家族経営の形態を取る企業が多く、これが需要の変動に柔軟に対応でき、固定費を抑え、技術の継承・蓄積を可能にしている。また、産業集積は同一業種の中小企業が集積していることが多く、企業は細分化された生産工程の一部を担って専門化しており、これらの企業が連携して最終製品の生産を行っている。このような専門化と企業間連携は需要の変動に対して柔軟に対応でき、「伸縮性のある專業化」あるいは「伸縮的専門化」と呼ばれており、北イタリアの産業集積の特徴になっている。これらの専門化した中小企業に対して製品の企画・開発を行い、専門化した中小企業を組織化して生産工程を構成し最終製品を完成させる企業が存在している。この企業は市場と直接接しているために取引のリスクを負っているが、生産工程を構成する専門化した中小企業（専門工程企業）に対しては発注元になる。この発注元になる企業は生産設備を持たないファブレス（fabless）・カンパニーであるので設備投資が少ないために参入が容易になる。専門工程企業は、自ら専門とする工程については高度な技術を保有し、市場のニーズに対応できる職能を提供する。また、市場とは直接接触しないため取引リスクを負うことはない。このため過大な設備投資を抑えることができ、複数の発注元の企業と取引をすることにより自立化し、生産の平滑化も行うことができる。

一方、日本の事例では先に取り上げた大阪府の泉州地域の繊維産業の集積が

ある[6][11]。ここでは、問屋が製品の企画・開発を行い産地の企業は最終製品の製造を行っており、企業同士が過剰な競争を繰り返している。泉州の繊維産業では低価格の輸入品と差別化するために、いかにして高付加価値製品を作るか、それに伴う多品種少量生産・短納期化にいかに対応するかが課題になっている。この課題に対応するために大阪繊維リソースセンター（2012年解散）がコーディネータとなり、2代目経営者の有志グループが企業間ネットワークを形成した。この企業間ネットワークは、従来の下請け型の縦のネットワークではなく水平のネットワークで、メンバーの提携による販売・企画力の増大、生産設備や営業人材の共有化によるコスト効率の改善、メンバー同士の情報交換による技術力の向上、産地の活性化などのメリットを有している。

山形県米沢市は、戦中の疎開企業と戦後の誘致企業の創業に伴って電機・機械産業の中小企業が集積した企業城下町型産業集積地である[12]。中小企業の多くは、大手企業の一次下請け、二次下請けといった縦の系列を形成していた。1979年のオイルショックを契機に一次下請け企業が中心になり情報交換・情報収集、大手企業との取引の円滑化、人材育成、受注開拓などを目的にした協議会を発足させた。この協議会では互いの工場を見せ合ったり仕事の横請けを行ったりし、また親企業の工場見学などを行っている。これに対して発注元の手企業は、大手企業間のネットワークが存在しないことが下請け企業と大手企業との間に距離を作っているとの認識から、大手企業の間で系列を超えた受発注を行いながら仕事を確保する企業間ネットワークを組織化した。この企業間ネットワークは、余剰需要の斡旋や地元企業の教育指導などを主に行っている。余剰需要の斡旋は、大手企業に発注があった場合、その系列だけでは対応できないときに他の系列に斡旋する機能である。これによって各企業が扱える製品の幅が広がり、その結果事業拡大・事業転換が容易になり、米沢に来る受注量の変動を柔軟に吸収する生産システムとして中小企業の集団が機能するようになった。このような地域ネットワークの存在が外部企業との連携を結ぶ上での資源となっており、外部とのネットワーク形成を通じて地域内企業は新製品開発や事業拡大の機会を獲得している。

これらの事例を検討すると、中小企業の集積地には従来の親会社→一次下請け→二次下請け→…といった縦の系列の中で中小企業を位置付ける下請け体質から脱却して、同業者だけでなく異業者も含めた水平的な企業間連携(企業ネットワーク)の形成が試みられている。同様の試みは長野県岡谷地域[8][13]や東京都墨田区[14]などにも見られる。このような企業間連携の形態を大別すると次のようになる。

(1) 専門化した中小企業を生産する製品の生産工程に従ってコーディネート企業が組織化する形態

(2) 様々な中小企業が一つの企業集団を作り、あたかも一つの大きな企業のように活動する形態

(1)の形態は北イタリアの産業集積に見られる形態で、日本においても製品の企画・開発能力を持つ問屋がこの形態を形成する場合がある。(2)には企業集団全体で受注をこなす場合と、受注した企業が適切な企業を紹介する、横請けを行う場合がある。この形態には、さらに図1のような形態が存在する。「分業化」は中小企業が生産工程の一部を形成し、全体として一つの生産工程を形成する。一方、「小口化」は中小企業1社では受けられない大口の需要を他の企業とともに受注することで対応しようとするもので、横請けがこれに当たる。また、幹事企業は生産工程の一部を分担している場合と、生産には直接関わらない場合がある。このような企業間連携を行う目的は共同受注が多いようであるが、単に発注を待っているだけでなく、互いの工場を見せ合うといった情報の共有化、技術・技能の共有化を行って企業集団としてのアイデンティティを明確にしている。また、個々の企業についても受注した品物を期日までに生産して納品するといった下請け体質から脱却して、製品の企画・開発能力を身につけ、さらに販売能力までに身につけて提案型企業へと変革しようとしている。さらには、企業集団としてクラウドソーシングにも対応することができ、世界中の企業・団体等から発注を受けることができるようになる。

このような企業間連携は参加企業の専門化を促すとともに対応できる分野の幅を広げることにもなる。一見矛盾しているかのように見えるが、従来の下請

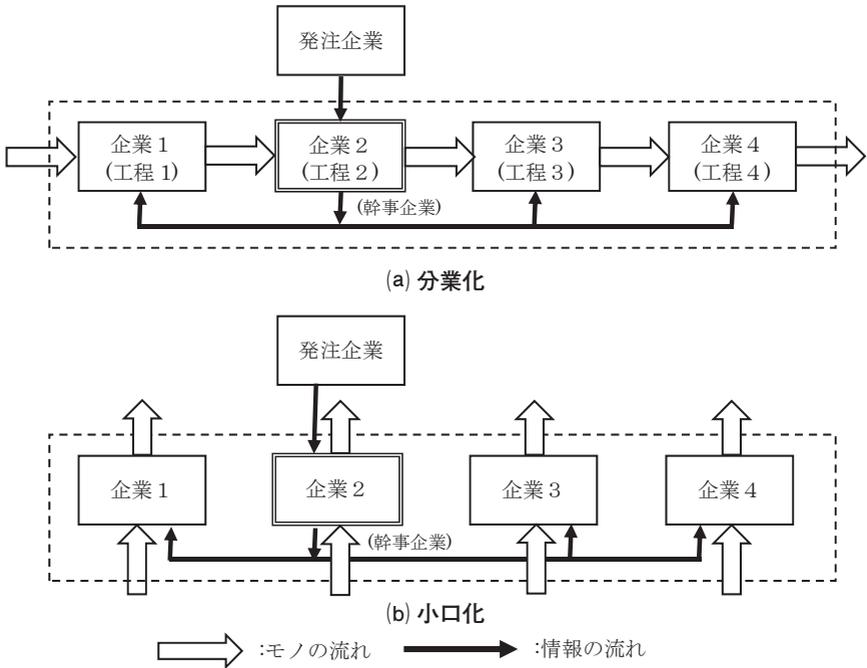


図1 企業連携の形態

けの縦の系列に組み込まれ親企業のみ取引から脱却して、専門企業として複数の企業と取引するようになるので、対応できる分野が広がることによる。これは中小企業が単なる下請けからサプライヤーとして自立し、大手企業と対等の関係になることを意味している。大手企業から見ると、従来のように下請け企業を丸抱えするのではなく、適切なサプライヤーを選択することが出来るようになる。

ICT化は遠隔地の通信を容易にするので産業集積の意義を低下させるように見えるが、シリコンバレーに見られるように逆に企業の集積は高まっている。企業間連携を形成するうえで重要なことは、フェイス・ツー・フェイスの関係にある人的ネットワークの存在であると言える。東京都墨田区や先の泉州などでは企業の2代目経営者が集まって企業間連携が形成された事例があり、そこ

では工場を見せ合う、意見を交換するといった恒常的な接触がなされており、その結果、情報の共有化、技術・技能の共有化がはかられている。このようなことから恒常的な接触と濃密な情報交換、情報の共有化は互いの信頼感を醸成させ柔軟な企業間連携を生み出すために必要な条件で、そのためには地理的な接近が必要である。

2.2 ハブレス・カンパニー

前節で取り上げた事例では、企業間連携は複数の企業からなる集団で、その集団への参加や退会が自由なため、集団がダイナミックに変化している場合が多くある。また外部からの受注に応じて柔軟に生産工程を編成しており、特定の親企業は存在しない。このような企業集団が1章で述べたハブレス・カンパニーである。顧客から発注を受けた企業はその仕事に関する幹事企業となり、受注した仕事にふさわしい企業の参加を募る。このようにして幹事企業は受注をした仕事に対応する小グループを形成するが、幹事企業は個別の取引に応じて発生する暫定的なもので固定したものではない。このように中心となる特定の企業が存在しない、という意味でハブレスと言え、小グループは受注した仕事をこなすために必要に応じて構成されるのでカンパニーと言える。

ハブレス・カンパニーは受注を担うにふさわしい企業の小グループの組織であるが、小グループを構成する企業は専門企業として生産する品物の生産工程の一部を分担する。このような機能を実現するためには、ハブレス・カンパニーを構成する企業はネットワークを通じて相互に情報システムを接続し、アプリケーションを共同で開発して共有化する必要がある。このような相互に接続された情報システムで構成される情報ネットワークを構築することによって多様な注文に対して、企業集団は適切な小グループを組織化することができ、多様な注文に対応することができる。他方、ハブレス・カンパニーでは、メンバーであるどの企業も幹事企業になる可能性があるので、取引書類の標準書式を定めておく必要がある。情報ネットワークを通じてこの標準化された取引書類を交換することによって、メンバー企業が効率的に情報交換することができ情報

の共有化を行うことができる。このような情報システムは、受注の処理、生産、在庫、会計処理、輸送などに関してハブレス・カンパニーのメンバーを連携させるために活用することができる。

3. ハブレス・カンパニーの数学モデルと解析

3.1 ハブレス・カンパニーの数学モデル

ハブレス・カンパニーのように幹事企業は存在するが中核となる親企業が存在しない場合、これに参加する企業の自律性は高くなる。このようなハブレス・カンパニーを取り扱った研究に[15]がある。これはハブレス・カンパニーの具体例としてペンションの集積を想定し、ハブレス・カンパニーを成功させるためには企業の集積数と企業の個性化のバランスが重要であることを導いている。また、ハブレス・カンパニーを構成する企業が競争関係にあっても、情報を交換・共有することで企業の利潤を増加させることができることを明らかにし、全体で交換・共有される情報量を最大にすると、それに対する適切な集積数が存在することを導いている。

ハブレス・カンパニーが生産工程を構成し、各企業が生産工程の一部を分担する場合、ある企業の生産が関連する企業の生産に影響を及ぼす。この場合、各企業は情報ネットワークを通じて生産に関する情報を交換して、関連する企業の生産に関する情報を知り、自社の生産に役立たせることができる。例えば、上流工程を担う企業の生産計画は、その下流工程に位置する企業の生産計画に影響を及ぼす。下流工程の企業は上流工程の企業の生産計画を制約条件として自社の生産計画を立てることになり、そこで得られる生産計画は下流工程の企業にとっては必ずしも最適な生産計画にはならない。さらに下流工程の企業は、上流工程と下流工程の間に存在する企業の生産計画を通じて上流工程の企業の生産計画を知ることになり、工程が下流になるに従って制約は大きくなる。このような問題を対象にした研究に[16][17]がある。これらは組織が垂直構造(階層構造)の場合、上位レベルの最適解を下位レベルの制約条件式右辺に代入し

て最適解を求めており、最適解はStackelberg解になることを導いている。本論文では、企業集団の組織は水平構造をしており、これらの研究で提案されている手法は適用することはできない。また上流工程企業の生産計画の変更が下流企業に伝わるのに時間遅れが生じるため、連携している企業が均しく生産計画の最適化を達成するためには、すべての企業が同時に最適化する必要がある。しかし、生産計画立案時には関連する企業の生産計画は未定であるため、これを推測して自らの生産計画を決定しなければならない。この推測に基づいて決定された生産計画はハブレス・カンパニーを構成する他の企業によっても推測されるので、企業間で推測の繰り返しが行われることになる。

ハブレス・カンパニーを多段階生産システムとして捉えると、システム全体の目的関数が存在せず、各意思決定主体（今の場合はハブレス・カンパニーを構成する個々の企業）が自律して主体間の相互関係を満たす意思決定を情報交換によって行う意思決定問題であるといえる。このような意思決定問題はゲーム的意思決定問題[18]と呼ばれ、ゲームの理論における非協力ゲームの理論を適用することができる。本論文で対象にしているハブレス・カンパニーの場合、ハブレス・カンパニーを構成する企業の意思決定は同時に行われ優先順位がないので非協力ゲームの理論が適用でき、このような非協力ゲームの解はNash均衡解[19]と呼ばれている。このNash均衡解は、「 n 個の意思決定主体がNash均衡解を採用しているとき、いずれの意思決定主体についても自己の目的関数を改良するような解は存在しない。」[20]のように定義されている。この定義を数式で表すために各意思決定主体、すなわち各企業の意思決定問題を次のように定式化する。

$$\text{Min. } f_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \quad (1)$$

$$\text{sub. to } g_i(x_1^*, x_2^*, \dots, x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*, \dots, x_n^*) \leq b_i \quad (2)$$

$$h_i(x_i) \leq 0 \quad (3)$$

$$x_i \geq 0 \quad (4)$$

ここで f_i は企業 i の目的関数で、意思決定問題が生産計画問題であれば総生産費用や目標生産量からのずれ（差異）などで、 g_i は企業間の相互関係を表す

制約条件, \mathbf{h}_i は企業 i 独自の制約条件である。また \mathbf{x}_i は企業 i の決定変数で生産量や在庫量などであり, n はハブレス・カンパニーを構成する企業数である。これを用いて先のNash均衡解の定義を表すと次のようになる。

すべての $\mathbf{x}_i \in X_i^N, i = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$f_i(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*, \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) \leq f_i(\mathbf{x}_1^*, \mathbf{x}_2^*, \dots, \mathbf{x}_{i-1}, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) \quad (5)$$

であれば, このとき $\mathbf{x}_i^* \in X_i^N$ はNash均衡解である[20]。ここで

$$X_i^N = \{\mathbf{x}_i \in \mathcal{R}^{m_i}: \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) \leq \mathbf{b}_i, \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i) \leq \mathbf{0}, \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0}\} \quad (6)$$

である。言い換えれば, 上の関係式は企業が互いに相互関係を満たす均衡解を得るためには, それぞれの企業の問題が同時に最適化されなければならないことを意味している。これによって, 先の推測の繰り返しを避けることができる。

Nash均衡解を得るために各企業の意味決定問題のLagrange関数を次のように定義する。

$$L_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) = f_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) + \boldsymbol{\lambda}_i^T (\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) - \mathbf{b}_i) + \boldsymbol{\mu}_i^T \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i) \quad (7)$$

ここで $\boldsymbol{\lambda}_i$ と $\boldsymbol{\mu}_i$ はLagrange乗数である。これより $\mathbf{x}_i^*, i = 1, 2, \dots, n$ がNash均衡解であるための必要条件は, すべての i に対して以下のものである。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{x}_i} &= \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} f_i(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) + \boldsymbol{\lambda}_i^{*T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} (\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) - \mathbf{b}_i) \\ &\quad + \boldsymbol{\mu}_i^{*T} \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i} \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i^*) = \mathbf{0} \end{aligned} \quad (8)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = \mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) - \mathbf{b}_i \leq \mathbf{0} \quad (9)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} = \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i^*) \leq \mathbf{0} \quad (10)$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{*T} (\mathbf{g}_i(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) - \mathbf{b}_i) = 0 \quad (11)$$

$$\boldsymbol{\mu}_i^{*T} \mathbf{h}_i(\mathbf{x}_i^*) = 0 \quad (12)$$

$$\mathbf{x}_i^* \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\lambda}_i^* \geq \mathbf{0}, \boldsymbol{\mu}_i^* \geq \mathbf{0} \quad (13)$$

一般的にはこの条件を満たすNash均衡解は唯一には定まらず, 解集合の形になる。しかしながら, 問題が2次計画問題で表される場合は, Nash均衡解が唯一存在することが知られている。

3.2 単一期間生産計画問題の解析

3.2.1 生産計画問題の設定

ハブレス・カンパニーを構成する個々の企業は、ハブレス・カンパニーの生産工程の一部を担い、その意思決定は他工程を担う企業とは独立した自律的なものである。しかしながら、ハブレス・カンパニー全体としては工程間（企業間）の相互関係を満たし、全体として整合性のとれた生産計画を立案する必要がある。そのためにハブレス・カンパニーは企業間情報システムを構築して生産計画の立案に必要な情報を交換する。このようなハブレス・カンパニーの単一期間生産計画問題を定式化するために、以下のような前提条件を設定する。

- (1) ハブレス・カンパニーを構成する企業は、多段階生産工程の一つの工程と一対一に対応し、各企業は図2に示すような生産設備と在庫から構成されるものとする。生産工程は n 工程で構成され、各工程（企業）を添字 i ($i = 1, 2, \dots, n$) で表す。

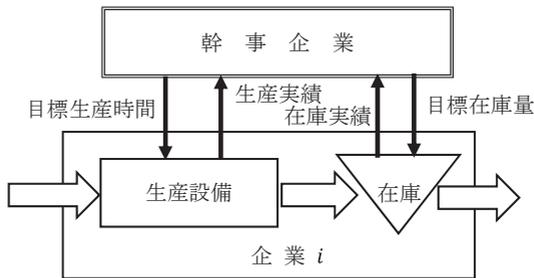


図2 ハブレス・カンパニーを構成する企業のモデル

- (2) 各工程の企業は m_i 種類の製品 P_{ik} ($k = 1, 2, \dots, m_i$) を製造し、製造する生産時間を $x_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ 、在庫量を $y_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ とする。また、需要量と期首在庫量をそれぞれ $d_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ 、 $y_i^0 \in \mathcal{R}^{m_i}$ とする。
- (3) ハブレス・カンパニーの幹事企業は、生産工程を構成する各企業に生産目標として、目標生産時間 $X_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ と目標在庫量 $Y_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ を示すものとする。これらの生産目標を達成するための生産能力は十分に準備されている。

るものとする。

- (4) 製品は幹事企業があらかじめ定めた工程の企業での処理を順次受けて完成品になる。処理が終了した製品は仕掛在庫に送られ、後続工程の企業から要求があれば直ちに在庫され後続工程の企業に送られる。また生産リードタイムと製品の処理順序は考慮しない。製品の品切れは許されないものとする。

生産工程を構成する各企業の意思決定者は、幹事企業から示された生産目標を達成するように生産時間と期末在庫量を決定して生産計画の最適化を行う。これを行うために式(1)の目的関数 $f_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i)$ を生産目標からの差異の二乗和として表すことにする。すなわち企業 i の目的関数は次のようである。

$$f_i(\mathbf{y}_i, \mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{y}_i - \mathbf{Y}_i)^T Q'_i (\mathbf{y}_i - \mathbf{Y}_i) + (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i)^T R_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i) \} \quad (14)$$

ここで、 Q'_i と R_i は生産目標からの差異に対するペナルティ係数で $m_i \times m_i$ の対角行列である。一方、期末在庫量 \mathbf{y}_i は、他工程の企業に送られる量（内部需要量）を考慮して次式によって与える。

$$\mathbf{y}_i = \mathbf{y}_i^0 + B_{ii} \mathbf{x}_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ij} \mathbf{x}_j - \mathbf{d}_i \quad (15)$$

ここで $B_{ij} = B_{ij}^1 \mathbf{P}_j$, B_{ij}^1 は企業 i の後続工程の企業 j で生産する製品 1 個に要する企業 i の製品の数で $m_i \times m_j$ 行列, \mathbf{P}_j は企業 j で生産する製品の単位時間当たりの生産個数（個/時間）で m_j ベクトルである。企業 i ($i = 1, 2, \dots, n$) における単一期間生産計画問題は、式(15)と \mathbf{x}_i と \mathbf{y}_i の非負条件を制約条件として、式(14)を最小にする問題になる。

3.2.2 非協力ゲームによる定式化

式(15)をみると、式内に他企業の決定変数 \mathbf{x}_j ($j \neq i, j = 1, 2, \dots, n$) が存在する。これは生産計画立案時においては未知の変数であるので、式(14), (15)と非負条件で定式化される生産計画問題を解くことは困難である。この \mathbf{x}_j を知ることなしに生産計画問題の最適化を行う必要がある。このような問題の最適化法が非

協力ゲームにおけるNash均衡解を求める方法である[21]。3.1節で示したNash均衡解の定義をいまの生産計画問題に適用するために、式(15)を式(14)に代入し、これを J_i とすると、これは

$$J_i(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n) \equiv f_i(\mathbf{y}_i^0 + B_{ii}\mathbf{x}_i - \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ij}\mathbf{x}_j - \mathbf{d}_i, \mathbf{x}_i) \quad (16)$$

と \mathbf{x}_j ($j=1, 2, \dots, n$) の関数として定義できる。これを用いてNash均衡解の定義を表すと、次のように書くことができる。

\mathbf{x}_i^* がNash均衡解であるとする、すべての i ($i=1, 2, \dots, n$) について

$$J_i(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*, \mathbf{x}_i, \mathbf{x}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) \geq J_i(\mathbf{x}_1^*, \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*, \mathbf{x}_i^*, \mathbf{x}_{i+1}^*, \dots, \mathbf{x}_n^*) \quad (17)$$

が成り立つことである。

式(17)を満たすNash均衡解を求めるために、式(14)、(15)と変数の非負条件で表される生産計画問題を書き換える。式(15)は右辺第3項の内部需要量 ($\sum_{j=1}^n B_{ij}\mathbf{x}_j$) によって、他企業の生産時間が企業 i に及ぼす影響を表している。しかし先述したように未知の決定変数 \mathbf{x}_j が存在するために生産計画問題の最適化を困難にしている。[3]では多段階生産システムの各工程が他工程とネットワークを介して情報交換をすることによって \mathbf{x}_j の情報がなくても自工程の生産計画を決定できる方法を提案している。本論文でも、そこで提案している方法を用いることにする。

企業間で情報交換できる情報には、生産計画立案前に各企業が保有している情報と、生産計画を立案した後に初めて得られる情報がある。ここでは、前者を事前情報と呼び、後者を事後情報と呼ぶことにする。生産計画立案時に情報交換できるのは事前情報であることは明らかで、これを企業間で交換できる情報の対象とする。この情報には \mathbf{y}_i^0 、 B_{ij} 、 \mathbf{d}_i 、 \mathbf{X}_i 、 \mathbf{Y}_i 、 Q_i^1 、 R_i 、 \mathbf{P}_j があり、これらが事前情報になる。事後情報は、生産計画を立案することによって得られる生産時間 \mathbf{x}_i と期末在庫量 \mathbf{y}_i である。そこで、企業間の相互関係を表す行列 B_i を $B_i = (-B_{1i}, \dots, -B_{i-1i}, B_{ii}, -B_{i+1i}, \dots, -B_{ni})^T$ と置くことにする。この行列は $\sum_{j=1}^n m_j \times m_i$ 行列である。これによって \mathbf{x}_i が他企業に及ぼす影響を知ることができる。また、 \mathbf{y}_i^0 と \mathbf{d}_i を $\mathbf{y}^0 = (\mathbf{y}_1^0, \dots, \mathbf{y}_n^0)^T$ 、 $\mathbf{d} = (\mathbf{d}_1, \dots, \mathbf{d}_n)^T$ と置く。これらを用いて多段階生産システムであるハプレス・カンパニー全体の状態を表す式を

次のように設定する。

$$\mathbf{y} = \mathbf{y}^0 + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j - \mathbf{d} \quad (18)$$

ここで $\mathbf{y} = (y_1, \dots, y_n)^T$ である。

また式(14)の目的関数は次のように書き換える。

$$f_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{y} - \mathbf{Y})^T Q_i (\mathbf{y} - \mathbf{Y}) + (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i)^T R_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i) \} \quad (19)$$

ここで $\mathbf{Y} = (Y_1, \dots, Y_n)^T$ である。 Q_i は i 番目の対角ブロック行列が Q_i' であるような $\sum_{j=1}^n m_j \times \sum_{j=1}^n m_j$ の対角行列である。

以上のことより、企業 i の単一期間生産計画問題は変数の非負条件と式(18)のもとに式(19)を最小にする問題になる。

3.2.3 最適化解析

前項で定式化した企業 i の単一期間生産計画問題を整理すると次のようになる。

$$\text{Min. } f_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}_i) = \frac{1}{2} \{ (\mathbf{y} - \mathbf{Y})^T Q_i (\mathbf{y} - \mathbf{Y}) + (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i)^T R_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i) \} \quad (20)$$

$$\text{sub. to } \mathbf{y} = \mathbf{y}^0 + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j - \mathbf{d} \quad (22)$$

$$\mathbf{y} \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_i \geq \mathbf{0} \quad (23)$$

式(17)を満たすNash均衡解を求めるために、この問題に対するLagrange関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} L_i(\mathbf{y}, \mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n, \boldsymbol{\lambda}_i) &\equiv \frac{1}{2} \{ (\mathbf{y} - \mathbf{Y})^T Q_i (\mathbf{y} - \mathbf{Y}) + (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i)^T R_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i) \} \\ &\quad + \boldsymbol{\lambda}_i^T (\mathbf{y}^0 + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j - \mathbf{d} - \mathbf{y}) \\ &= \frac{1}{2} \{ (\mathbf{y}^0 + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j - \mathbf{d} - \mathbf{Y})^T Q_i (\mathbf{y}^0 + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j - \mathbf{d} - \mathbf{Y}) \\ &\quad + (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i)^T R_i (\mathbf{x}_i - \mathbf{X}_i) \} + \boldsymbol{\lambda}_i^T (\mathbf{y}^0 + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j - \mathbf{d} - \mathbf{y}) \end{aligned}$$

ここで $\lambda_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ はLagrange乗数である。

これよりNash均衡解が存在するための必要条件は、すべての i ($i = 1, 2, \dots, n$) について次式が同時に成り立つことである。

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{y}} = Q_i(\mathbf{y}^* - \mathbf{Y}) - \lambda_i^* = \mathbf{0} \quad (24)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mathbf{x}_i} = B_i^T Q_i(\mathbf{y}^* - \mathbf{Y}) + R_i(\mathbf{x}_i^* - \mathbf{X}_i) + B_i^T \lambda_i^* = \mathbf{0} \quad (25)$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i} = \mathbf{y}^0 + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j^* - \mathbf{d} - \mathbf{y}^* = \mathbf{0} \quad (26)$$

$$\mathbf{y}^* \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_i^* \geq \mathbf{0} \quad (27)$$

式(24), (25)より \mathbf{x}_i^* を求め、これを式(26)に代入して \mathbf{y}^* に関して整理すると、Nash均衡解における期末在庫量は次のようになる。

$$\mathbf{y}^* = \Gamma^{-1}(\mathbf{y}^0 - \mathbf{Y}) + \mathbf{V} + \mathbf{Y} \quad (28)$$

ここで

$$\Gamma \equiv I + 2 \sum_{j=1}^n B_j R_j^{-1} B_j^T Q_j \quad (29)$$

$$\mathbf{V} \equiv \Gamma^{-1}(\sum_{j=1}^n B_j \mathbf{X}_j - \mathbf{d}) \quad (30)$$

I は $\sum_{j=1}^n m_j \times \sum_{j=1}^n m_j$ 単位行列である。また Γ は $\sum_{j=1}^n m_j \times \sum_{j=1}^n m_j$ 正則行列である。これらを用いて \mathbf{x}_i^* と λ_i^* を求めると、

$$\mathbf{x}_i^* = -2R_i^{-1} B_i^T Q_i \{ \Gamma^{-1}(\mathbf{y}^0 - \mathbf{Y}) + \mathbf{V} \} + \mathbf{X}_i \quad (31)$$

$$\lambda_i^* = Q_i \{ \Gamma^{-1}(\mathbf{y}^0 - \mathbf{Y}) + \mathbf{V} \} \quad (32)$$

を得る。

以上の展開より、式(24)~(27)を同時に満たすNash均衡解は式(31)で与えられ、そのときの期末在庫量は式(28)で与えられる。これらの式から明らかなように各企業は生産計画立案時に \mathbf{y}_i^0 , B_{ij} , \mathbf{d}_i , \mathbf{X}_i , \mathbf{Y}_i , Q_i , R_i , \mathbf{P}_j を交換することによって、他企業の生産時間 \mathbf{x}_i^* を知ることなしに自らの生産計画を立てることができる。このようにして立案された生産計画は他企業との相互関係を満たしている。

3.2.4 数値計算例

数値計算例のモデルとして[3]で例示した計算例を用いる。そこでの生産工程をハブレス・カンパニーを構成する企業に置き換えると、図3に示す2企業からなるハブレス・カンパニーになる。この計算例は、2.1節で述べた分業化の場合で、2つの企業は2工程生産システムの工程1と工程2を構成しており、企業1を幹事企業とする。幹事企業は、需要情報に基づいて立案した長期生産計画の第1期について生産目標を設定して、自社と企業2に提示する。両企業は、企業間の相互関係を満たし、かつ生産目標を達成するように第1期の生産計画を立案する。なお、第1期の需要量は確定しているものとする。

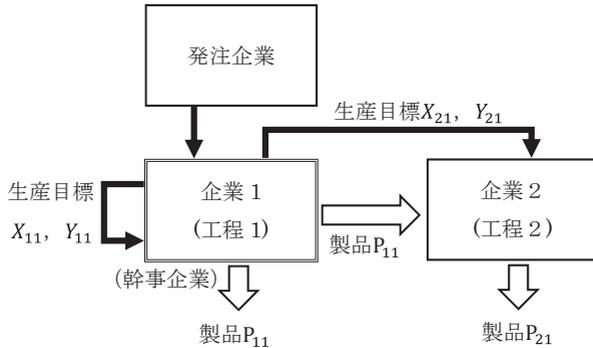


図3 数値計算例 (2企業の場合)

図3に示しているように企業1と企業2はそれぞれ製品 P_{11} と P_{21} を生産している。製品 P_{21} は製品 P_{11} を部品として1個使用する。このとき B'_{ij} と B_i ($i = 1, \dots, n$) は次のようになる。

$$B'_{11} = [1], \quad B'_{12} = [1], \quad B'_{21} = [0], \quad B'_{22} = [1]$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} p_{11} \\ 0 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} -p_{21} \\ p_{21} \end{pmatrix}$$

ここで p_{ij} は単位時間当たりの生産個数ベクトル P_i の要素である。また Q_i , R_i ($i = 1, 2$) は次のようであるとする。

$$Q_1 = Q_2 = \begin{pmatrix} q_{11} & 0 \\ 0 & q_{21} \end{pmatrix}, \quad R_1 = (r_{11}), \quad R_2 = (r_{21})$$

式(29)より Γ は次のようになる。

$$\Gamma = \begin{pmatrix} 1 + \frac{2p_{11}^2 q_{11}}{r_{11}} + \frac{2p_{21}^2 q_{11}}{r_{21}} & -\frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}} \\ -\frac{2p_{21}^2 q_{11}}{r_{21}} & 1 + \frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}} \end{pmatrix}$$

この行列の逆行列は

$$\Gamma^{-1} = \begin{pmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} \end{pmatrix}$$

である。ここで

$$\gamma_{11} = \frac{1 + \frac{2p_{21}^2 q_{21}^2}{r_{21}}}{|\Gamma|}, \quad \gamma_{12} = -\frac{\frac{2p_{21}^2 q_{11}^2}{r_{21}}}{|\Gamma|}, \quad \gamma_{21} = -\frac{\frac{2p_{21}^2 q_{21}^2}{r_{21}}}{|\Gamma|},$$

$$\gamma_{22} = \frac{1 + \frac{2p_{11}^2 q_{11}^2}{r_{11}} + \frac{2p_{21}^2 q_{11}^2}{r_{21}}}{|\Gamma|}$$

$$|\Gamma| = -\left(\frac{2p_{11}^2 q_{11}}{r_{21}}\right)\left(\frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}}\right) + \left(1 + \frac{2p_{11}^2 q_{11}}{r_{11}} + \frac{2p_{21}^2 q_{11}}{r_{21}}\right)\left(1 + \frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}}\right)$$

これを用いて式(31)より Nash 均衡解として

$$x_{11} = -\frac{2p_{11}^2 q_{11}}{r_{11}} \{ \gamma_{11} (y_{11}^0 + p_{11}x_{11} - p_{21}x_{21} - d_{11} - Y_{11})$$

$$+ \gamma_{12} (y_{21}^0 + p_{21}x_{21} - d_{21} - Y_{21}) \} + X_{11}$$

$$x_{21} = \frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}} \{ \gamma_{11} (y_{11}^0 + p_{11}x_{11} - p_{21}x_{21} - d_{11} - Y_{11})$$

$$+ \gamma_{12} (y_{21}^0 + p_{21}x_{21} - d_{21} - Y_{21}) \}$$

$$- \frac{2p_{21}^2 q_{21}}{r_{21}} \{ \gamma_{21} (y_{11}^0 + p_{11}x_{11} - p_{21}x_{21} - d_{11} - Y_{11})$$

$$+ \gamma_{22} (y_{21}^0 + p_{21}x_{21} - d_{21} - Y_{21}) \} + X_{21}$$

を得る。このときの期末在庫量は式(28)より

$$\begin{aligned}
 y_{11} &= \gamma_{11}(y_{11}^0 + p_{11}X_{11} - p_{21}X_{21} - d_{11} - Y_{11}) \\
 &\quad + \gamma_{12}(y_{21}^0 + p_{21}X_{21} - d_{21} - Y_{21}) + Y_{11} \\
 y_{21} &= \gamma_{21}(y_{11}^0 + p_{11}X_{11} - p_{21}X_{21} - d_{11} - Y_{11}) \\
 &\quad + \gamma_{22}(y_{21}^0 + p_{21}X_{21} - d_{21} - Y_{21}) + Y_{21}
 \end{aligned}$$

となる。

この計算結果より、企業1と企業2の間で交換する情報は、図4のように $y_i^0, d_i, X_i, Y_i, Q_i, R_i, P_i$ であり、これらは事前情報であるので情報交換は可能である。したがって、企業1と企業2は互いの生産計画を知ることなしに企業間の相互関係を満たす自社の生産計画を立案することができる。また、生産目標からの差異の増減は、一般的には生産時間と期末在庫量のペナルティの比 ($q_{i1}/r_{i1}, i=1,2$) に関するトレードオフの関係がある。図3の計算例では企業1の在庫量と企業2の生産時間の間にもトレードオフ q_{11}/r_{21} が存在する。これは企業1で生産する製品 P_{11} が企業2で生産する製品 P_{21} の部品になっていることに関連する。このことから、分業化によってハブレス・カンパニーに参加する企業は生産工程の各工程を構成しており、前工程の企業と後工程の企業の間には生産時間と在庫量に関するトレードオフが存在し、これが生産目標からの差異の増減に関連していると言える。需要の小口化に対応するハブレス・カンパニーでは企業間の直接の相互関係は存在しないので、このようなトレードオフが存在しないことは容易に想像することができる。

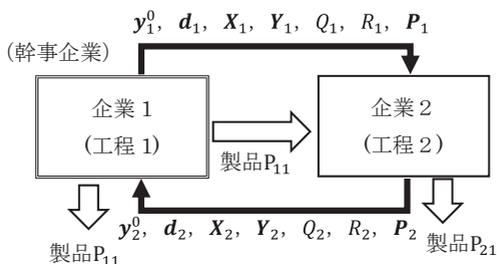


図4 2企業の情報構造

4. ハブレス・カンパニーの多期間生産計画問題とその最適化

4.1 多期間生産計画問題

ここでは、前章で取り上げたハブレス・カンパニーの単一期間生産計画問題を多期間生産計画問題に拡張する。ハブレス・カンパニーの幹事企業によって多段階生産システムを構成する各企業に対して各期の生産目標が設定されており、各企業がこの生産目標を達成する多期間生産計画問題の最適化を非協力ダイナミック・ゲームの理論に基づいて行う方法を提案する。

そのために前提条件を以下のように設定する。

- (1) 生産計画期間は T 期間であるとし、各期を t で表す ($t=1,2,\dots,T$)。
- (2) 各企業の t 期における生産時間を $x_i(t) \in \mathcal{R}^{m_i}$ 、 t 期首在庫量を $y_i(t) \in \mathcal{R}^{m_i}$ とする。また t 期における需要量を $d_i(t) \in \mathcal{R}^{m_i}$ で表す ($t=1,2,\dots,T$)。計画期間の第1期の初期在庫量は既知で $y_i(1) = a_i \in \mathcal{R}^{m_i}$ であるとする。
- (3) 各企業の生産目標として、目標生産時間 $X_i(t) \in \mathcal{R}^{m_i}$ と目標在庫量 $Y_i(t) \in \mathcal{R}^{m_i}$ が幹事企業によって設定されており、これらの生産目標を達成するための生産能力は十分に与えられているものとする。
- (4) 上記以外の前提条件については3章の単一期間生産計画問題の場合と同様である。

これらの前提条件に基づいて、ハブレス・カンパニーの T 期間の生産計画問題を設定する。目的関数は、単一期間生産計画問題と同様で生産目標からの差異を最小にするものとして次のように置く。

$$f_i(y_i(t+1), x_i(t)) = (y_i(t+1) - Y_i(t+1))^T Q'_i(y_i(t+1) - Y_i(t+1)) \quad (33) \\ + (x_i(t) - X_i(t))^T R_i(x_i(t) - X_i(t))$$

また、期首在庫量 $y_i(t+1)$ も次のように置く。

$$y_i(t+1) = y_i(t) + B_{ii}x_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ij}x_j(t) - d_i(t) \quad (34)$$

これらより企業 i の多期間生産計画問題は、式(34)と $y_i(t)$ および $x_i(t)$ の非

負条件の下に式(33)を最小にする問題として定式化することができる。すなわち

$$\begin{aligned} \text{Min. } & \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T f_i(\mathbf{y}_i(t+1), \mathbf{x}_i(t)) \\ & = \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ (\mathbf{y}_i(t+1) - \mathbf{Y}_i(t+1))^T Q_i' (\mathbf{y}_i(t+1) - \mathbf{Y}_i(t+1)) \right. \\ & \quad \left. + (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t))^T R_i (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t)) \right\} \end{aligned} \quad (35)$$

$$\text{sub. to } \mathbf{y}_i(t+1) = \mathbf{y}_i(t) + B_{ii} \mathbf{x}_i(t) -$$

$$\sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ij} \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}_i(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (36)$$

$$\mathbf{y}_i(1) = \mathbf{a}_i \quad (37)$$

$$\mathbf{y}_i(t+1) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_i(t) \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T \quad (38)$$

4.2 非協力ダイナミック・ゲーム理論による最適化

4.2.1 非協力ゲームによる定式化とNash均衡解

式(35)~(38)で定式化したハブレス・カンパニーの多期間生産計画問題を3章と同様に非協力ゲームを用いて最適化するために、ベクトルと行列を次のように定義する。

$$\mathbf{y}(t) = (\mathbf{y}_1(t), \dots, \mathbf{y}_n(t))^T$$

$$\mathbf{Y}(t) = (\mathbf{Y}_1(t), \dots, \mathbf{Y}_n(t))^T$$

$$\mathbf{d}(t) = (\mathbf{d}_1(t), \dots, \mathbf{d}_n(t))^T$$

$$B_i = (-B_{1i}, \dots, -B_{i-1i}, B_{ii}, -B_{i+1i}, \dots, -B_{ni})^T$$

$$\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n)^T$$

また、 Q_i を i 番目の対角ブロック行列が Q_i' であるような $\sum_{j=1}^n m_j \times \sum_{j=1}^n m_j$ の対角行列であるとする。これらの記号を用いて式(35)~(38)を書き直すと、次のようになる。

$$\text{Min. } \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T f_i(\mathbf{y}(t+1), \mathbf{x}_i(t))$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ (\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{Y}(t+1))^T Q_i (\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{Y}(t+1)) + (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t))^T R_i (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t)) \right\} \quad (39)$$

$$\text{sub. to } \mathbf{y}(t+1) = \mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (40)$$

$$\mathbf{y}(1) = \mathbf{a} \quad (41)$$

$$\mathbf{y}(t+1) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_i(t) \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T \quad (42)$$

多期間生産計画問題においても3章と同様にしてNash均衡解を定義する。

すなわち式(40)を式(39)に代入して

$$J_i(\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) \equiv f_i(\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t), \mathbf{x}_i(t)) \quad (43)$$

とする。Nash均衡解が成り立つ条件は式(43)を用いて表すと、すべての i ($i = 1, \dots, n$) について次式が成り立つことである。

$$J_i(\mathbf{x}_1^*(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*(t), \mathbf{x}_i(t), \mathbf{x}_{i+1}^*(t), \dots, \mathbf{x}_n^*(t)) \geq J_i(\mathbf{x}_1^*(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*(t), \mathbf{x}_i^*(t), \mathbf{x}_{i+1}^*(t), \dots, \mathbf{x}_n^*(t)) \quad (44)$$

すなわち、上式を満たす $\mathbf{x}_i^*(t)$ がNash均衡解となる。

4.2.2 最適化解析

式(44)を満たすNash均衡解はT.Başarらが定義している離散型動的非協力ゲームにおける開ループNash均衡解[21]になる(付録1参照)。この均衡解を以下で導出する。

式(39)~(42)の多期間生産計画問題に対するHamilton関数を次のように定義する。

$$\begin{aligned} H_i(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) &= \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{Y}(t+1))^T Q_i (\mathbf{y}(t+1) - \mathbf{Y}(t+1)) \right. \\ &\quad \left. + (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t))^T R_i (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t)) \right\} \\ &\quad + \lambda^T(t+1) (\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t)) \\ &= \frac{1}{2} \left(\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t) - \mathbf{Y}(t+1) \right)^T \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & Q_i \left(\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t) - \mathbf{Y}(t+1) \right) \\
 & + \left(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t) \right)^T R_i \left(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t) \right) \Big\} \\
 & + \boldsymbol{\lambda}^T(t+1) \left(\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t) \right)
 \end{aligned} \tag{45}$$

上式を用いてNash均衡解を求めるために、行列 $\Gamma(t)$ 、 $M_i(t)$ 、 $V(t)$ を次のように定義する。

$$\Gamma(t) \equiv I + \sum_{i=1}^n B_i R_i^{-1} B_i^T M_i(t+1), \quad t = 1, \dots, T \tag{46}$$

$$M_i(t) \equiv Q_i + M_i(t+1) \Gamma^{-1}(t), \quad t = 1, \dots, T \tag{47}$$

$$V(t) \equiv \sum_{i=1}^n B_i R_i^{-1} B_i^T \sum_{\tau=t}^T (M_i(\tau) - Q_i) (\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau-1)), \quad t = 1, \dots, T \tag{48}$$

ここで I は $\sum_{j=1}^n m_j \times \sum_{j=1}^n m_j$ の単位行列で、

$$\mathbf{d}'(t) = \mathbf{Y}(t+1) - \mathbf{Y}(t) - \sum_{i=1}^n B_i \mathbf{X}_i(t) + \mathbf{d}_i, \quad t = 1, \dots, T$$

である。Nash均衡解はこれらの行列を用いて次のように表すことができる（証明は付録2参照）。

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_i^*(t) &= -R_i^{-1} B_i^T M_i(t+1) \Gamma^{-1}(t) (\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{Y}(t)) \\
 &\quad - R_i^{-1} B_i^T \sum_{\tau=t}^T (M_i(\tau) - Q_i) (\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau+1)) + \mathbf{X}_i(t), \\
 & \quad i = 1, \dots, n, \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned} \tag{49}$$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}^*(t+1) &= \Gamma^{-1}(t) (\mathbf{y}^*(t) - \mathbf{Y}(t)) - \Gamma^{-1}(t) (\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau+1)) \\
 &\quad + \mathbf{Y}(t+1), \quad t = 1, \dots, T
 \end{aligned} \tag{50}$$

式(49)は式(39)～(42)で表される多期間生産計画問題の唯一の最適解で、式(50)はそのときの期首在庫量である。これらの結果から、3章の単一期間生産計画問題の場合と同様に初期在庫量 $\mathbf{y}_i(1)$ と $\mathbf{d}_i(t)$ 、 $\mathbf{X}_i(t)$ 、 $\mathbf{Y}_i(t)$ 、 Q_i 、 R_i 、 \mathbf{P}_i が明らかであれば、最適な生産時間と在庫量を決定することができる。これらの情報は生産計画立案時には既知であるので、企業 i は他企業の生産計画に影響されことなく企業間の相互関係を満たす生産計画を最適にすることができる。

4.2.3 数値計算例

数値計算例のモデルとして、図5のような相互関係が存在する3企業からなるハブレス・カンパニーを考える。各企業はそれぞれ2種類の製品を生産しており、計画期間は10期間で各期の独立需要量は表1のようである。企業間の相互関係は、企業2で生産される製品 P_{22} は企業1で生産される製品 P_{12} を1個、企業3で生産される製品 P_{31} は企業2で生産される製品 P_{21} を1個、企業1で生産される製品 P_{11} は企業3で生産される製品 P_{32} を1個用いるものとする。この関係と図5、および表2の単位時間当たりの生産個数（生産率）より企業間の相互関係を表す行列 B_i , $i = 1, 2, 3$ は次のようになる。

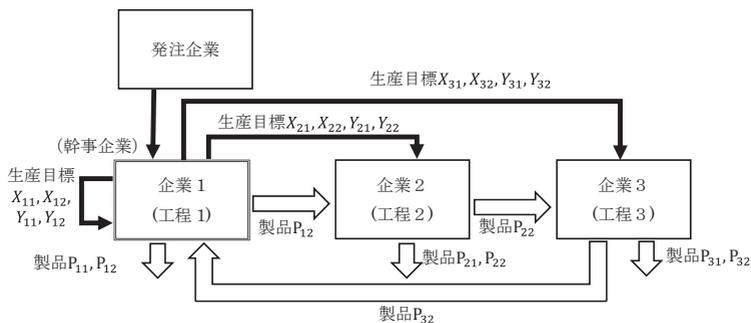


図5 数値計算例（3企業の場合）

$$B_1 = \begin{bmatrix} 2.13 & 0 \\ 0 & 1.12 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.81 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_2 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1.12 \\ 0.92 & 0 \\ 0 & 3.31 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad B_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -0.92 & 0 \\ 0 & 0 \\ 1.37 & 0 \\ 0 & 0.81 \end{bmatrix}$$

また Q'_i と R_i は各企業とも同じ値で次のようであるとする。

$$Q'_1 = Q'_2 = Q'_3 = \begin{bmatrix} 7 & 0 \\ 0 & 7 \end{bmatrix}, \quad R_1 = R_2 = R_3 = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

また、初期在庫 $y(1)$ は目標在庫量に等しいものとする。製品 P_{12} , P_{21} , P_{32} は

表1 製品の独立需要量 (個)

| 期(t) | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
|----------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| P_{11} | 250 | 200 | 300 | 350 | 250 | 200 | 150 | 150 | 200 | 200 |
| P_{12} | 300 | 250 | 350 | 200 | 200 | 200 | 300 | 400 | 350 | 300 |
| P_{21} | 100 | 200 | 200 | 150 | 150 | 200 | 250 | 200 | 150 | 150 |
| P_{22} | 150 | 100 | 100 | 100 | 150 | 150 | 200 | 200 | 150 | 150 |
| P_{31} | 300 | 300 | 400 | 450 | 450 | 450 | 300 | 250 | 300 | 300 |
| P_{32} | 400 | 350 | 300 | 300 | 350 | 400 | 450 | 350 | 350 | 400 |

企業間の相互関係から内部需要量を持ち、表1の独立需要量からその従属需要量を求めることができる。以下に目標生産時間が計画期間を通じて一定の場合と、期毎に異なる場合について数値計算を行う。

(a) 目標生産時間が一定の場合

これは、製品の需要量は期毎に変動するが、各期の生産変動をできるだけ少なくなるように平滑化を行う場合である。各製品の目標生産時間と目標在庫量、および生産率は表2のようである。これらのデータをもとに数値計算を行った結果が図6である。これをみると生産時間は需要量の変動にしたがって変動しているが、目標生産時間の周辺で変動していることがわかる。とくに製品 P_{12} 、 P_{21} 、 P_{32} のように内部需要を持つ製品は目標生産時間の近傍で変動しており、需要量の変動よりもその変動は少ない。在庫量に関しては、目標在庫量の周辺で変動しており、生産時間の場合のような製品間の違いは見られない。

表2 数値計算例のデータ

| 企業(工程)No. | 1 | | 2 | | 3 | |
|-----------|----------|----------|----------|----------|----------|----------|
| 製品 | P_{11} | P_{12} | P_{21} | P_{22} | P_{31} | P_{32} |
| 目標生産時間(h) | 479.25 | 481.60 | 478.40 | 479.95 | 479.50 | 477.90 |
| 目標在庫量(個) | 120 | 174 | 174 | 70 | 148 | 87 |
| 生産率(個/h) | 2.13 | 1.12 | 0.92 | 3.31 | 1.37 | 0.81 |

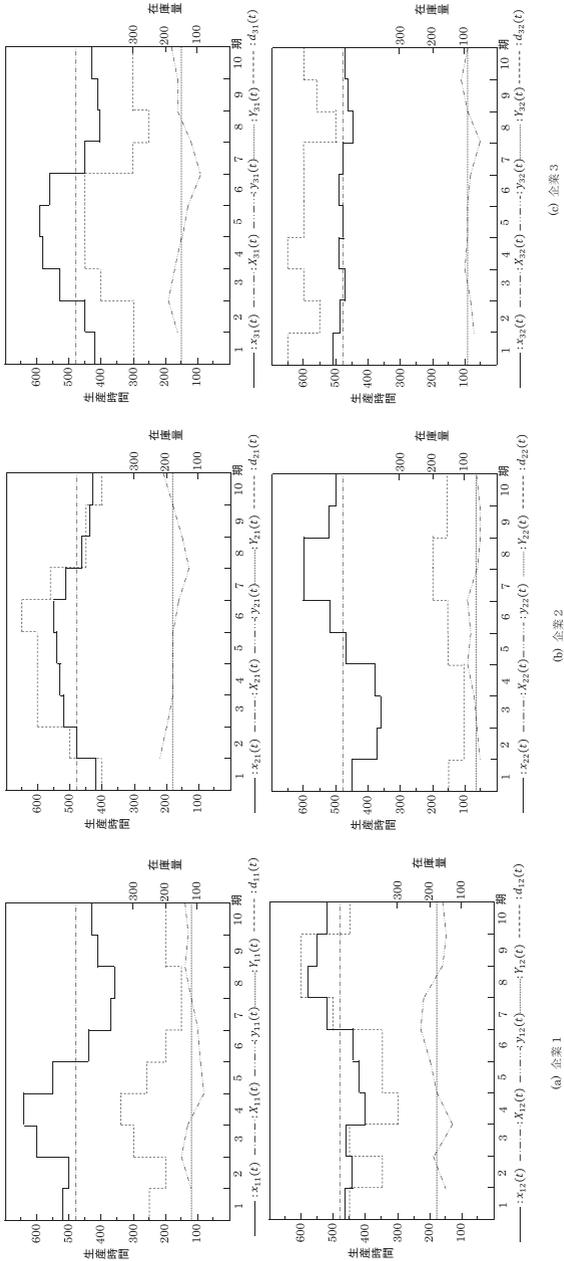


図6 数値計算例 (目標生産時間が一定の場合)

(c) 企業3

(b) 企業2

(a) 企業1

(b) 目標生産時間が各期で異なる場合

各期の目標生産時間は、従属需要と独立需要を加えた総需要量を用いて設定されているものとする。その他のデータは(a)の場合と同じである。図7は、これらのデータによって数値計算を行った結果を図示したものである。この結果を見ると、生産時間は需要の変動よりも目標生産時間の変化にしたがっていることがわかる。また内部需要量を持つ製品 P_{12} , P_{21} , P_{32} は、内部需要量を持たない製品に比べて目標値に近い値を取っていることがわかる。目標生産時間が一定の場合と比べると、生産時間は目標生産時間に従って変動しているが、在庫量は目標在庫量の近傍で変動している。

以上の2つの数値計算例から、生産時間の変動を少なくし、平滑化を優先するのであれば目標生産時間は一定にする方がよいと言え、他方、在庫量の変動を少なくするのであれば、目標生産時間を総需要量に基づいて期毎に設定すればよいと言える。

5. 結 言

本論文で得られた結果を要約すれば以下のようになる。

- (1) 産業集積の中に見られる企業間連携の事例からハブレス・カンパニーの形態を明らかにした。
- (2) ハブレス・カンパニーを多段階生産システムとして捉え、その単一期間生産計画問題に非協力ゲームの理論を適用することで、多段階生産システムの工程（企業）間の相互関係を満たす最適な生産計画が得られることを示し、2企業で構成されるハブレス・カンパニー（2段階工程）の情報構造を明らかにした。
- (3) 多段階生産システムとして捉えたハブレス・カンパニーの多期間生産計画問題に対してダイナミック・ゲームの理論を適用することで工程（企業）間の相互関係を満たす最適な多期間の生産計画が得られることを示した。そして、3企業で構成されるハブレス・カンパニー（3段階工程）の数値計算例によってその妥当性を検討した。

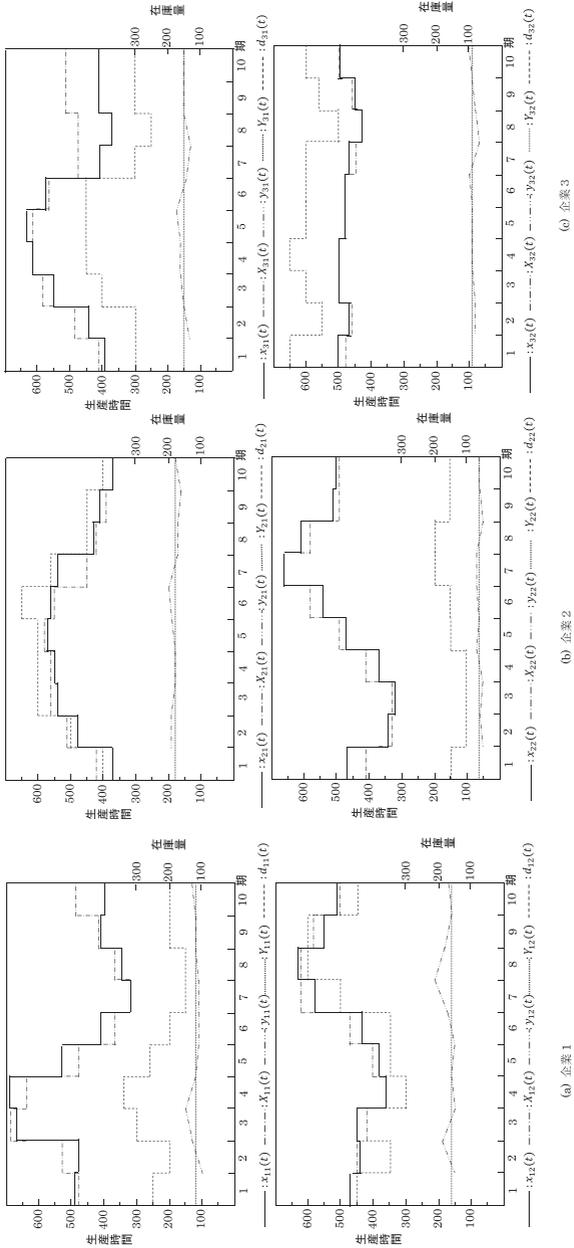


図7 数値計算例 (目標生産時間が各期で異なる場合)

参考文献

- [1] 奥田和重：企業間連携の数学モデル，日本生産管理学会第14回全国大会講演論文集，pp.76-79，(2001).
- [2] 八鍬幸信：観光産業ハブレス・カンパニー概念と新観光情報システム，関口恭毅研究代表「観光産業のサービス化に向けた新ビジネスモデルとIT基盤の調査研究」成果報告書第2章，pp.7-23，(2002).
- [3] 奥田和重：分権の生産システムの最適化に関する研究（第1報 非協力ゲームによる単一期間生産計画問題の最適化），日本機械学会論文集C編，65巻，633号，pp.2116-2121，(1999).
- [4] 小川正博：産業集積の課題とネットワーク，経済と経営，25巻，4号，pp.607-627，(1999).
- [5] 藤田栄美子：産業集積地域の構造転換の変遷と現状－新潟県燕市を事例にして－，現代社会文化研究，No.28，pp.1-16，(2003).
- [6] 本多哲夫：転換期における地場産業構造の動態－泉州地域を事例として－，産業開発研究論文集，Vol.11，(1999).
- [7] 松島茂：自動車産業と産業集積－豊田市周辺のフィールド・ワークからの中間的考察－，経営志林，39巻，1号，pp.47-59，(2002).
- [8] 山本健兒，松橋公治：中小企業集積地域におけるネットワーク形成－諏訪・岡谷地域の事例－，経営志林，66巻，3/4号，pp.85-182，(1999).
- [9] 鎌倉健：大都市圏における工業集積の構造変化と自治体産業政策の課題－東京都墨田区，大田区と東大阪市の地域間比較－，経済論叢別冊調査と研究，第18号，pp.49-75，(1999).
- [10] 小川秀樹：「イタリアの中小企業」，日本貿易振興会，(2000).
- [11] 本多哲夫：泉州繊維産地における新しい企業間ネットワークの構築，産業能率，1998年12月号，pp.4-7，(1998).
- [12] 福嶋路：米沢市電気・機械産業における企業間ネットワークのダイナミズム，組織科学，32巻，4号，pp.13-23，(1999).
- [13] 辻田素子：岡谷地域における中小企業ネットワーク，関満博，辻田素子編：「飛躍する中小企業都市－「岡谷モデル」の模索－」第7章，新評論，pp.178-206，(2001).
- [14] 関満博：「地域産業の未来」，有斐閣，pp.117-121，(2001).
- [15] 上木政美：核を持たない企業連携のあり方，経済学研究，54巻，2号，pp.63-80，(2004).
- [16] K.Shimizu, Y.Ishizuka, J.F.Bard: "Nondifferentiable and Two-level Mathematical Programming", pp.347-449, Kluwer, (1997).
- [17] N.P.Faisca, P.M.Saraiva, B.Rustem, E.N.Pistikopoulos: A multi-parametric

programming approach for multilevel hierarchical and decentralized optimization problems, Computational management science, Vol.6, No.4, pp.377-397, (2009).

- [18] 市川敦信：「意思決定論」, 共立出版, (1983).
- [19] J.Nash: Non-Cooperative Games, Annals of Mathematics, Vol.54, No.2, (1951).
- [20] 鈴木光男：「ゲーム理論入門」, 共立出版, (1981).
- [21] Başar,T. and Olsder,G.J.: “Dynamic Noncooperative Game Theory”, p.239, Academic Press, (1982)

付録 1

次の最適化問題を考える。

$$\text{Min. } \sum_{t=1}^T f_i(\mathbf{y}(t+1), \mathbf{x}_i(t)) \quad (51)$$

$$\text{sub. to } \mathbf{y}(t+1) = \mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (52)$$

$$\mathbf{y}(1) = \mathbf{a} \quad (53)$$

$$\mathbf{y}(t+1) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_i(t) \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T \quad (54)$$

この問題に対するNash均衡解の定義は式(44)と同様である。この均衡解が存在するための必要条件は次の定理によって与えられる。

定理 式(51)の目的関数と式(52)の制約条件は $\mathbf{x}_i(t)$ に関して微分可能な連続関数である。このとき $\mathbf{x}_i^*(t)$, $i = 1, \dots, n$, $t = 1, \dots, T$ が開ループNash均衡解でかつ $\mathbf{y}^*(t+1)$, $t = 1, \dots, T$ がそのときのシステムの状態であれば、以下の関係を満たす costate vector $\boldsymbol{\lambda}^\top(t)$ が存在する。

$$\mathbf{y}^*(t+1) = \mathbf{y}^*(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j^*(t) - \mathbf{d}(t), \quad t = 1, \dots, T \quad (55)$$

$$\frac{\partial}{\partial \mathbf{x}_i(t)} H_i(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{x}_1^*(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*(t), \mathbf{x}_i^*(t), \mathbf{x}_{i+1}^*(t), \dots, \mathbf{x}_n^*(t)) = \mathbf{0} \quad (56)$$

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(t) = & \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}(t)} \mathbf{g}^T(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{x}_1^*(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*(t), \mathbf{x}_i^*(t), \\ & \mathbf{x}_{i+1}^*(t), \dots, \mathbf{x}_n^*(t)) \{ \boldsymbol{\lambda}(t+1) \\ & - \frac{\partial}{\partial \mathbf{y}(t)} f(\mathbf{x}_i^*(t), \mathbf{g}(\mathbf{y}^*(t), \mathbf{x}_1^*(t), \dots, \mathbf{x}_{i-1}^*(t), \mathbf{x}_i^*(t), \mathbf{x}_{i+1}^*(t), \dots, \mathbf{x}_n^*(t))) \}, \\ & t = 1, \dots, T \end{aligned} \quad (57)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(T+1) = \mathbf{0} \quad (58)$$

$$\boldsymbol{\lambda}(t) \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T, \quad \mathbf{y}^*(1) = \mathbf{a} \quad (59)$$

ここで $H_i(\cdot)$ はHamilton関数で

$$H_i(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) \equiv f_i(\mathbf{x}_i(t), \mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))) \\ + \lambda^T(t+1)\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t))$$

また

$$\mathbf{g}(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) = \mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t)$$

この定理は、T.Başar[21]の定理6.1の証明と同様に証明できるので、ここでは省略する。 ■

付録2

最適化の対象である多期間生産計画問題は以下のものであった。

$$\text{Min. } \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left\{ (\mathbf{y}_i(t+1) - \mathbf{Y}_i(t+1))^T Q_i (\mathbf{y}_i(t+1) - \mathbf{Y}_i(t+1)) \right. \\ \left. + (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t))^T R_i (\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t)) \right\} \quad (60)$$

$$\text{sub. to } \mathbf{y}_i(t+1) = \mathbf{y}_i(t) + B_{ii} \mathbf{x}_i(t) - \sum_{j=1, j \neq i}^n B_{ij} \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}_i(t), \\ t = 1, \dots, T \quad (61)$$

$$\mathbf{y}_i(1) = \mathbf{a}_i \quad (62)$$

$$\mathbf{y}_i(t+1) \geq \mathbf{0}, \quad \mathbf{x}_i(t) \geq \mathbf{0}, \quad t = 1, \dots, T \quad (63)$$

付録1で導いた開ループNash均衡解は、一般的には唯一解が存在せず解集合の形で求められる。しかしながら、上記の最適化問題(式60~63)のような目的関数が2次凸関数で、 Q_i が対称行列、 R_i の要素が正($R_i > 0$)であれば開ループNash均衡解は唯一存在し、それは式(49)、(50)で与えられる。この証明を以下で行う。

最適化問題式(60)~(63)に対するHamilton関数は

$$H_i(\mathbf{y}(t), \mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)) \equiv \\ \frac{1}{2} \left\{ (\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t) - \mathbf{Y}(t+1))^T \right.$$

$$\begin{aligned}
 & Q_i \left(\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t) - \mathbf{Y}(t+1) \right) \\
 & + \left(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t) \right)^T R_i \left(\mathbf{x}_i(t) - \mathbf{X}_i(t) \right) \Big\} \\
 & + \boldsymbol{\lambda}^T(t+1) \left(\mathbf{y}(t) + \sum_{j=1}^n B_j \mathbf{x}_j(t) - \mathbf{d}(t) \right)
 \end{aligned} \tag{64}$$

であった。これを \mathcal{R}^{m_i} 上で最小にする $\mathbf{x}_i^*(t)$ と $\boldsymbol{\lambda}^*(t)$ は式(56)と(57)より

$$\mathbf{x}_i^*(t) = -R_i^{-1} B_i^T \left\{ \boldsymbol{\lambda}^*(t+1) + Q_i \left(\mathbf{y}^*(t+1) - \mathbf{Y}(t+1) \right) \right\} + \mathbf{X}_i(t) \tag{65}$$

$$\boldsymbol{\lambda}^*(t) = \boldsymbol{\lambda}^*(t+1) + Q_i \left(\mathbf{y}^*(t+1) - \mathbf{Y}(t+1) \right) \tag{66}$$

を得る。

$t=T$ のとき、式(65)は

$$\mathbf{x}_i^*(T) = -R_i^{-1} B_i^T Q_i \left(\mathbf{y}^*(T+1) - \mathbf{Y}(T+1) \right) + \mathbf{X}_i(T) \tag{67}$$

となる。この両辺に B_i を左から乗じ、 i について総和を求め、式(61)に代入すると式(46)を考慮して

$$\mathbf{y}^*(T+1) = \Gamma^{-1}(T) \left(\mathbf{y}^*(T) - \mathbf{Y}(T) \right) - \Gamma^{-1}(T) \mathbf{d}'(T) + \mathbf{Y}(T+1)$$

を得る。これを式(67)に代入すると式(47)を考慮して

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_i^*(T) &= -R_i^{-1} B_i^T M_i(T-1) \Gamma^{-1}(T) \left(\mathbf{y}^*(T) - \mathbf{Y}(T) \right) \\
 &+ R_i^{-1} B_i^T \left(M_i(T) - Q_i \right) \mathbf{d}'(T) + \mathbf{X}_i(T)
 \end{aligned} \tag{68}$$

となる。

$t=T-1$ のとき、同様に行くと次のようになる。

$$\mathbf{x}_i^*(T-1) = -R_i^{-1} B_i^T \left\{ \boldsymbol{\lambda}^*(T) + Q_i \left(\mathbf{y}^*(T) - \mathbf{Y}(T) \right) \right\} + \mathbf{X}_i(T-1) \tag{69}$$

式(66)より

$$\boldsymbol{\lambda}^*(T) = \left(M_i(T) - Q_i \right) \left(\mathbf{y}^*(T) - \mathbf{Y}(T) \right) \left(M_i(T) - Q_i \right) \mathbf{d}'(T) \tag{70}$$

であるので、式(69)は

$$\begin{aligned}
 \mathbf{x}_i^*(T-1) &= -R_i^{-1} B_i^T M_i(T) \left(\mathbf{y}^*(T) - \mathbf{Y}(T) \right) \\
 &+ R_i^{-1} B_i^T \left(M_i(T) - Q_i \right) \mathbf{d}'(T) + \mathbf{X}_i(T-1)
 \end{aligned} \tag{71}$$

となる。これと式(48)を用いて

$$\begin{aligned}
 \mathbf{y}^*(T) &= \Gamma^{-1}(T-1) \left(\mathbf{y}^*(T-1) - \mathbf{Y}(T-1) \right) \\
 &- \Gamma^{-1}(T-1) \left(\mathbf{d}'(T-1) - \mathbf{V}(T) \right) + \mathbf{Y}(T+1)
 \end{aligned}$$

を得る。これを式(71)に代入することによって

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^*(T-1) &= -R_i^{-1}B_i^T M_i(T)\Gamma^{-1}(T-1)(\mathbf{y}^*(T-1) - \mathbf{Y}(T-1)) \\ &\quad - R_i^{-1}B_i^T \sum_{\tau=T-1}^T (M_i(\tau) - Q_i)(\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau-1)) + \mathbf{X}_i(T-1) \end{aligned} \quad (72)$$

を得る。また

$$\begin{aligned} \lambda^*(T-1) &= (M_i(T-1) - Q_i)(\mathbf{y}^*(T-1) - \mathbf{Y}(T-1)) \\ &\quad - \sum_{\tau=T-1}^T (M_i(\tau) - Q_i)(\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau+1)) \end{aligned}$$

つぎに $t=k$ のとき、 $k+1$ 期で式(49)と式(50)が成り立っているものと仮定する。

このとき、

$$\begin{aligned} \lambda^*(k+1) &= (M_i(k+1) - Q_i)(\mathbf{y}^*(k+1) - \mathbf{Y}(k+1)) \\ &\quad - \sum_{\tau=k+1}^T (M_i(\tau) - Q_i)(\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau+1)) \end{aligned}$$

である。これを式(65)に代入すると

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^*(k) &= -R_i^{-1}B_i^T M_i(k+1)(\mathbf{y}^*(k+1) - \mathbf{Y}(k+1)) \\ &\quad + -R_i^{-1}B_i^T \sum_{\tau=k+1}^T (M_i(\tau) - Q_i)(\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau+1)) + \mathbf{X}_i(k) \end{aligned}$$

となる。いままでと同様にして

$$\mathbf{y}^*(k+1) = \Gamma^{-1}(k)(\mathbf{y}^*(k) - \mathbf{Y}(k)) - \Gamma^{-1}(k)(\mathbf{d}'(k) - V(k+1)) + \mathbf{Y}(k+1)$$

したがって

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_i^*(k) &= -R_i^{-1}B_i^T M_i(k+1)\Gamma^{-1}(k)(\mathbf{y}^*(k) - \mathbf{Y}(k)) \\ &\quad + -R_i^{-1}B_i^T \sum_{\tau=k}^T (M_i(\tau) - Q_i)(\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau+1)) + \mathbf{X}_i(k) \end{aligned}$$

および

$$\lambda^*(k) = (M_i(k) - Q_i)(\mathbf{y}^*(k) - \mathbf{Y}(k)) - \sum_{\tau=k}^T (M_i(\tau) - Q_i)(\mathbf{d}'(\tau) - V(\tau+1))$$

を得る。

$k=T-2$ のとき、 $T-1$ 期についてはすでに証明しているので、この場合も式(49)と式(50)が成り立つ。このことから $k=1, \dots, T-3$ のときについても式(49)と

式(50)が成り立つ。

$t=1$ のとき、在庫の初期条件 $\mathbf{y}(1) = \mathbf{a}$ を式(49)と式(50)に代入すれば $x_i^*(1)$, $\mathbf{y}^*(2)$ を得る。この値を $t=2$ のときの式(49)と式(50)に代入すれば $x_i^*(2)$, $\mathbf{y}^*(3)$ を得る。これを繰り返して T 期まで順次代入していくことによって各期の最適な生産時間と期首在庫量を得ることができる。このようにして得た最適解は唯一である。 ■