

# 有限容量同時サービス並進待ち行列の解析

中 村 隆 志  
菱 川 善 文

## 1. まえがき

独立な到着過程を持つ複数個の待合室があり、すべての待合室に客がいるときに扱い者が各待合室から一人ずつ客を受け入れて同時にサービスを行うような待ち行列を同時サービス並進待ち行列と呼ぶ<sup>(2)</sup>。例としては、複数の下請会社からの部品の到着を待ち、それらのすべてが揃ったときに組み立てを行う工場やデータフロー計算機などが挙げられる。この待ち行列システムはトラフィック密度の大小によらず、本質的に不安定であることが知られている<sup>(1)・(2)</sup>。このため、現実のシステムにおいては何らかの安定化のための方策が必要となる。これには入力制御（到着率の制御）、客の途中放棄、待合室の容量制限などが考えられる。文献(2)～(4)には入力制御、文献(5)には客の途中放棄のある場合のシステムの特徴が詳細に述べられている。容量制限に関しては、文献(2)において、シミュレーションによるシステム特性が簡単に考察され、又、文献(6)、(7)では理論解析が行なわれている。しかし、各待ち行列への客の到着率が異なる場合等に関する詳細な考察は行なわれていない。入力制御等を行なわない場合、本システムでは容易に長い待ち行列ができるので、待合室容量が有限の場合の平均システム内客数、あふれ率等の特性量を定量的に把握しておくことは有意義である。

そこで、本論文では、この待合室容量が有限のシステムを、文献(2)の待合室容量無限モデルと同様のモデル化により、連続時間マルコフ連鎖として解析す

る。これにより、平均システム内客数、あふれ率、待ち率等を求め、これらとトラフィック密度等との関係を明らかにする。なお、本論文では解析を容易とするため、指数サービスで二つのポアソン到着過程を持つモデルのみを扱う。

## 2. モ デ ル

本論文で対象とするモデルは図1のようなものである。客は待合室  $Q_1$ ,  $Q_2$  にそれぞれ到着率  $\lambda_1$ ,  $\lambda_2$  でポアソン到着する。扱いは両方の待合室に少なくとも一人の客がいるときに、それぞれ一人ずつ先着順に客を受け入れて、同時にサービス率  $\mu$  の指数サービスを行う。サービス中の客を含めた待合室の容量は  $Q_1$ ,  $Q_2$  とも  $M$  である。したがって、 $Q_1$ ,  $Q_2$  とも、システム内客数が  $M$  人のときの到着は許されない。又、システム全体が空の状態のときに到着した客は、サービス施設内で他方の客の到着を待つ。

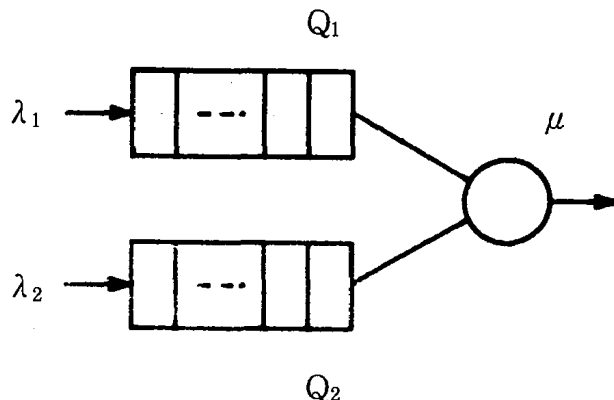


図1 有限容量同時サービス並進待ち行列

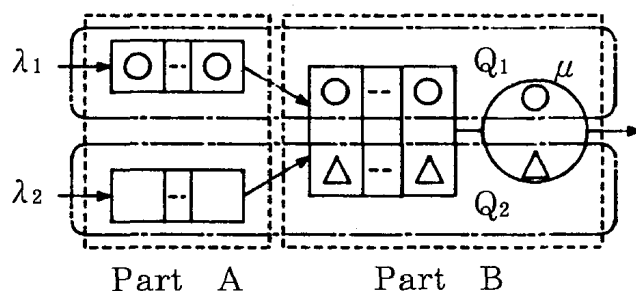


図2 図1に等価なモデル

### 3. 状態の定義と推移

解析の便宜のため、文献(2)に示されているように、図1のシステムを図2のような等価なモデルに変形する。これは図1の  $Q_1$ ,  $Q_2$  を次のようにA部とB部に分けたものである。B部には  $Q_1$ ,  $Q_2$  に揃った客が対をなして並ぶ（サービス中の対も含む）。A部には対となる他方の客が未到着の客が並ぶ。したがって、A部の片方は必ず空となる。又、A部からB部への移動には時間を要しないものとする。 $Q_1$ ,  $Q_2$  のどちらも、A部とB部にいる客数の和はM人を越えない。

このモデルで、ある時刻において  $Q_1$ ,  $Q_2$  にいる客数を  $n_1$ ,  $n_2$  とし、A部の状態を

$$j = n_1 - n_2 \quad (1)$$

で表わす。又、B部の客の対数を  $k$  で表わす。システム全体の挙動はこれらの組  $(j, k)$  を状態とする連続時間マルコフ連鎖により、表わすことができる<sup>(2)</sup>。有限容量Mのモデルを考えているので、状態空間  $S$  は次のようになる。

$$S = \{(j, k) \mid j = -M, -(M-1), \dots, 0, \dots, (M-1), M; \\ k = 0, 1, \dots, M; |j| + k \leq M\} \quad (2)$$

総状態数は  $M^2 + 2M + 1$  個である。

状態遷移速度図を図3に示す。

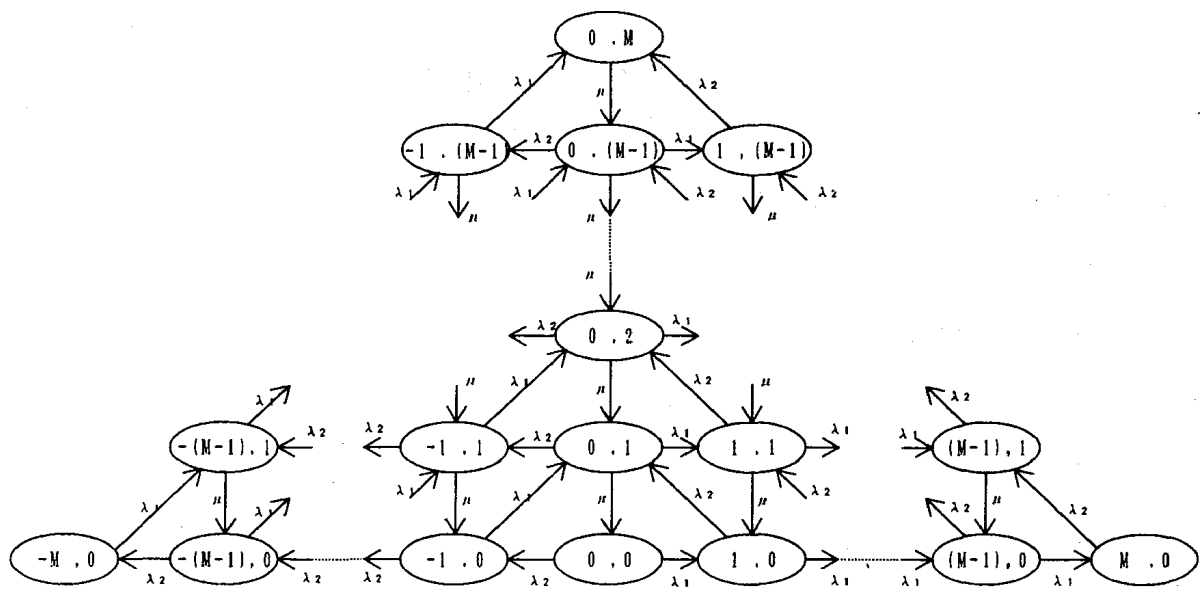


図3 状態遷移速度図

## 4. 解 析

### 4. 1 平衡状態確率

各状態  $(j, k)$  の平衡状態確率  $\pi(j, k)$  は次式で求められる。

$$\pi R = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{(j, k)} \pi(j, k) = 1 \quad (4)$$

但し、 $\pi$  は  $\pi(j, k)$  の行ベクトル、 $R$  は状態遷移速度行列である。 $R$  内の遷移速度  $\mu$  を 1 に、 $\lambda_1$  を  $\rho_1 = \lambda_1 / \mu$  に、 $\lambda_2$  を  $\rho_2 = \lambda_2 / \mu$  に置き換えた行列  $R^*$  を作り、 $R$  と置き換えても式(3)の結果は変わらない。したがって、 $\pi(j, k)$  はトラフィック密度  $\rho_1, \rho_2$  に依存することとなる。

ここで、次のような確率を考える。

- $\pi_{iA, m}$  : 平衡状態で  $Q_i$  の A 部に  $m$  人いる確率
- $\pi_{iB, m}$  : 平衡状態で  $Q_i$  の B 部に  $m$  人いる確率
- $\pi_{iT, m}$  : 平衡状態で  $Q_i$  に A 部, B 部合計で  $m$  人いる確率

但し、 $0 \leq m \leq M, i=1, 2$  である。

これらは  $\pi(j, k)$  より、次のように求められる。

$$\pi_{1A, 0} = \sum_{j=-M}^0 \sum_{k=0}^{M+j} \pi(j, k) \quad (5)$$

$$\pi_{1A, m} = \sum_{k=0}^{M-m} \pi(m, k) \quad ; m=1, 2, \dots, M \quad (6)$$

$$\pi_{2A, 0} = \sum_{j=0}^M \sum_{k=0}^{M-j} \pi(j, k) \quad (7)$$

$$\pi_{2A, m} = \sum_{k=0}^{M-m} \pi(-m, k) \quad ; m=1, 2, \dots, M \quad (8)$$

$$\pi_{1B, m} = \pi_{2B, m} = \sum_{j=-(M-m)}^{M-m} \pi(j, m) \quad ; m=0, 1, 2, \dots, M \quad (9)$$

$$\pi_{1T, m} = \sum_{j=0}^m \pi(j, m-j) + \sum_{j=-(M-m)}^{-1} \pi(j, m) \quad ; m=0, 1, 2, \dots, M \quad (10)$$

$$\pi_{2T, m} = \sum_{j=-m}^0 \pi(j, m+j) + \sum_{j=1}^{M-m} \pi(j, m) \quad ; m=0, 1, 2, \dots, M \quad (11)$$

但し,

$$\sum_a^b \pi(j, m) = 0 \quad ; a > b \quad (12)$$

と定義する。

#### 4. 2 平均システム内容数

$Q_i$  ( $i=1, 2$ ) の A 部, B 部, 又, 全体 (A 部と B 部の合計) の平均客数  $L_{iA}, L_{iB}, L_{iT}$  は次のように求められる。

$$L_{iA} = \sum_{m=0}^M m \pi_{iA, m} \quad ; i=1, 2 \quad (13)$$

$$L_{iB} = \sum_{m=0}^M m \pi_{iB, m} \quad ; i=1, 2 \quad (14)$$

$$L_{iT} = \sum_{m=0}^M m \pi_{iT, m} \quad ; i=1, 2 \quad (15)$$

又,

$$L_{1B} = L_{2B} \quad (16)$$

$$L_{iT} = L_{iA} + L_{iB} \quad ; i=1, 2 \quad (17)$$

である。

## 4. 3 あふれ率, 待ち率

$Q_i$  ( $i=1, 2$ ) のあふれ率  $B_i$  (待合室がすべてふさがっている確率) は, 次式となる。

$$B_i = \pi_{i T, M} \quad ; \quad i = 1, 2 \quad (18)$$

待ち率とは到着した客が待たなければならない確率である。通常の単一窓口の待ち行列の場合, システムが空であればただちにサービスを受けられる。しかし, この待ち行列では  $Q_i$  に到着した客は,  $Q_i$  が空であっても相手方がいないとサービスを受けられない。したがって,  $Q_i$  の待ち率  $\Pi_i$  は次の確率と等しくなる。

$$\begin{aligned} \Pi_i &= \sum_{m=1}^{M-1} \pi_{i T, m} + \pi(0, 0) \\ &= 1 - B_i - \pi_{i T, 0} + \pi(0, 0) \quad ; \quad i = 1, 2 \end{aligned} \quad (19)$$

表1  $\pi_{i B, m}$  と  $M/M/1$  ( $M$ ) の平衡状態確率  $p_m$  ( $\rho = 0.5, M = 10$ )

$m$	$\pi_{i B, m}$	$p_m$
0	5.264 E -01	5.002 E -01
1	2.553 E -01	2.501 E -01
2	1.197 E -01	1.251 E -01
3	5.501 E -02	6.253 E -02
4	2.480 E -02	3.127 E -02
5	1.096 E -02	1.563 E -02
6	4.729 E -03	7.816 E -03
7	1.976 E -03	3.908 E -03
8	7.866 E -04	1.954 E -03
9	2.870 E -04	9.770 E -04
10	8.315 E -05	4.885 E -04

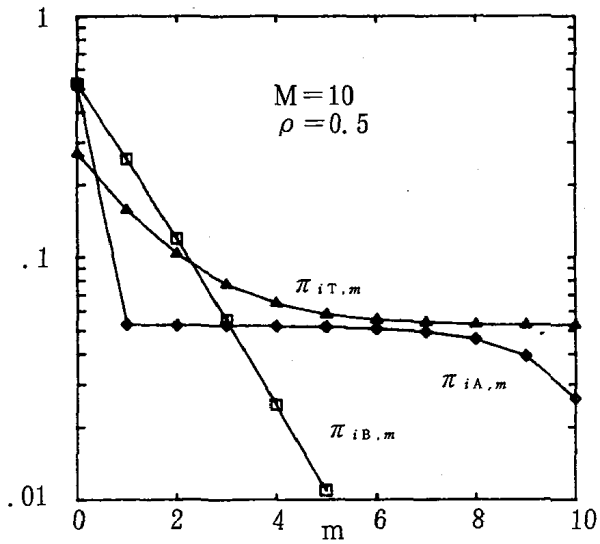
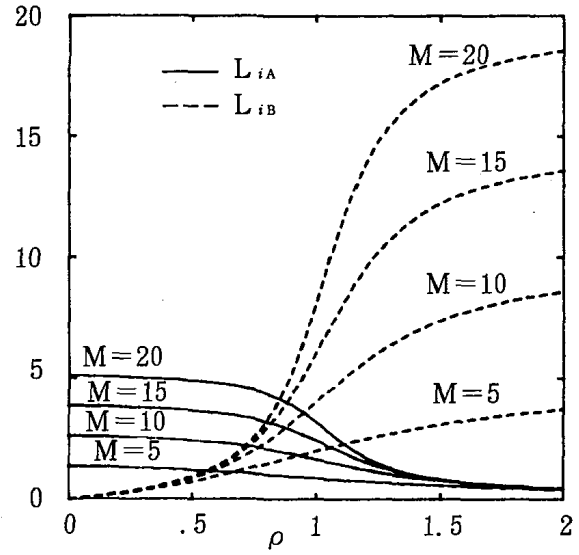
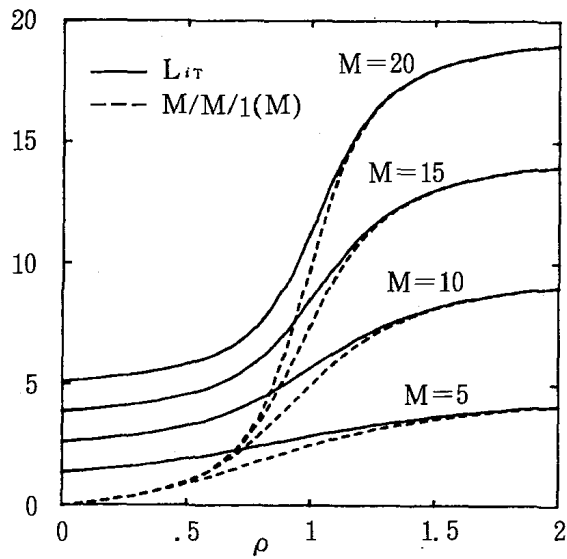
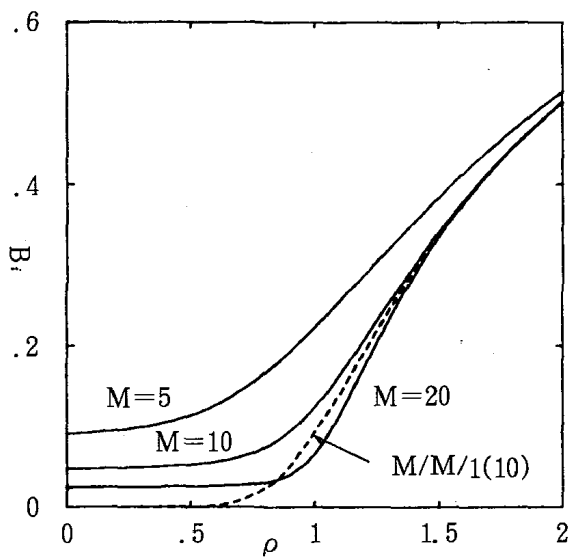
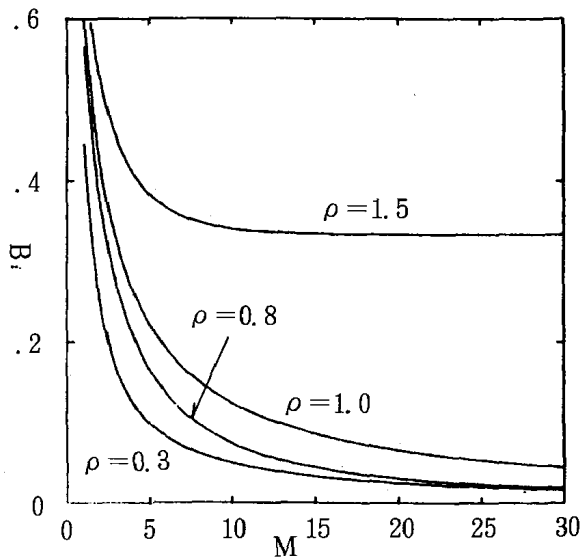
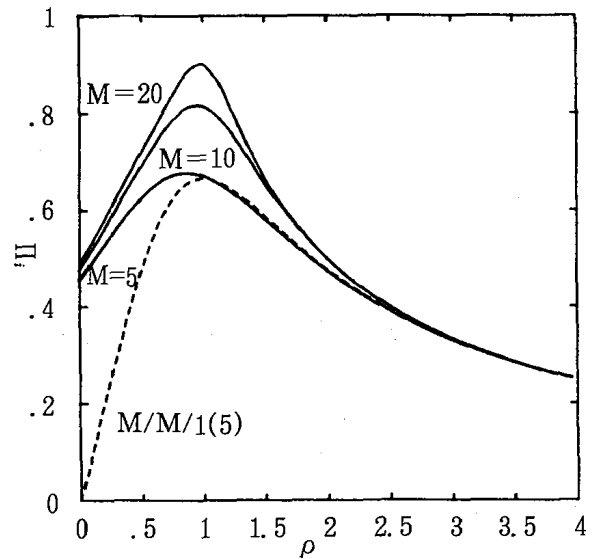


図4 平衡状態確率

 $\pi_{iA,m}, \pi_{iB,m}, \pi_{iT,m}$ 図5 A部, B部の平均客数 ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )図6 平均システム内容数 ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )図7 あふれ率 ( $\lambda_1 = \lambda_2, M = \text{一定}$ )

図8 あふれ率 ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ,  $\rho = \text{一定}$ )図9 待ち率 ( $\lambda_1 = \lambda_2$ )

## 5. 数 値 例

ここでは、対称システム ( $\lambda_1 = \lambda_2$ ) と非対称システム ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ ) とに分け、いくつかの数値例によりシステムの特性を考察する。

### 5. 1 対称システム

$\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  (即ち  $\rho_1 = \rho_2 = \rho = \lambda / \mu$ ) の対称システムの数値例を図4～図9に示す。

対称システムでは状態推移の対称性から、 $Q_1$  と  $Q_2$  の各特性量は等しくなる。

$$\pi_{1A,m} = \pi_{2A,m} \quad ; m=0, 1, 2, \dots, M \quad (20)$$

$$\pi_{1B,m} = \pi_{2B,m} \quad ; m=0, 1, 2, \dots, M \quad (21)$$

$$\pi_{1T,m} = \pi_{2T,m} \quad ; m=0, 1, 2, \dots, M \quad (22)$$

$$L_{1A} = L_{2A} \quad (23)$$

$$L_{1T} = L_{2T} \quad (24)$$



$$B_1 = B_2 \quad (25)$$

$$\Pi_1 = \Pi_2 \quad (26)$$

図4は $\rho = 0.5$ ,  $M = 10$ の場合の平衡状態確率 $\pi_{iA,m}$ ,  $\pi_{iB,m}$ ,  $\pi_{iT,m}$ の分布であり, 文献(2)のシミュレーション結果とほぼ一致している。表1は $\pi_{iB,m}$ と $M/M/1$  (M) の平衡状態確率 $p_m^{(8)}$ を比較したものである。 $\pi_{iB,m}$ は $p_m$ によく似た分布となる。これは文献(2)に示されているように, 対称システムの振舞いの定性的説明から明らかである。即ち, 確率的変動により $Q_2$ は空で,  $Q_1$ に何人かの客がいたとする。その後, しばらくの間 $Q_1$ が空にならなければ, その間 $Q_2$ はトラフィック密度 $\rho = \lambda / \mu$ の $M/M/1$  (M) の待ち行列として振舞う。この動作が $Q_1$ と $Q_2$ で交互に繰り返され,  $M/M/1$  (M) として振舞う方の客数がB部の客数となるからである<sup>(2)</sup>。表1より,  $\pi_{iB,m}$ は $m$ が大きいところでは $p_m$ よりも若干小さく, 逆に,  $m = 0, 1$ のような $m$ が小さいところではその分上回っている。A部に関しては文献(2)に詳細に述べられているので省略する。

トラフィック密度 $\rho$ に対する平均システム内客数 $L_{iA}$ ,  $L_{iB}$ の例を図5に,  $L_{iT}$ の例を図6に示す。又, 図6では比較のために $M/M/1$  (M) の例も示している。図5より,  $\rho$ が大きくなるにつれて, A部の客数は減少し, 逆にB部が増加する様子がわかる。これは,  $\rho$ が小さいときは相手方のトラフィック密度も小さいため, A部の占める割合が大きく, 逆に $\rho$ が大きくなると対になる割合が高まり, B部が増加するためである。A部は $\rho = 2$ の付近では待合室の容量に関係なく0に近づいている。B部の客数の変化の様子は図6の $M/M/1$  (M) によく似ているが, 一般にその値より若干小さい値をとる。これは $\pi_{iB,m}$ の分布から理解できる。図6の $L_{iT}$ は,  $\rho > 1$ では $M/M/1$  (M) に近い値となっている。これは図5からも明らかなように,  $\rho$ が大きくなるとA部の影響が少なくなるからである。

図7, 図8はあふれ率 $B_i$ の例である。図7では容量 $M$ を一定として $\rho$ を変化させ, 図8では逆に $\rho$ を一定とし,  $M$ を変化させている。比較のため, 図7には $M/M/1$  (10) を示している。図7より $B_i$ は $\rho$ と共に増加し,  $\rho > 1$ で

は増加の割合が大きくなる。 $M/M/1$  ( $M$ ) の値より一般に大きな値をとるが、 $\rho$ が増加するにつれて、その差は小さくなる。これも、 $L_{iT}$ と同様に $\rho$ が大きくなるにつれてA部の影響が少なくなるためと考えられる。又、 $M/M/1$  ( $M$ ) では $\rho$ が0に近づくと、あふれ率も0に近づくが、本システムのあふれ率は0には接近せず、待合室容量が小さいほど大きな値を持つ。これは、 $\rho$ が小さい場合は相手方のトラフィック密度も小さく、A部のみで待合室が満杯になる場合があるからである。図8の $\rho$ を一定にした場合では、当然ながら待合室容量が大きくなるにつれてあふれ率は減少する。

図9は待ち率 $\Pi_i$ の例である。比較のため、 $M/M/1$  (5) の場合の値も示した。 $\rho > 1$ の部分では $M/M/1$  ( $M$ ) に近い値をとるが、 $\rho < 1$ の部分では $M/M/1$  ( $M$ ) よりも大きくなる。又、 $\rho$ が0に近づいても0には接近しない。これは、あふれ率の場合と同様に、相手方が未到着のために待たなければならない場合があるからである。

なお、図6の平均システム内客数、図7のあふれ率は文献(6)の解析結果とほぼ一致している。

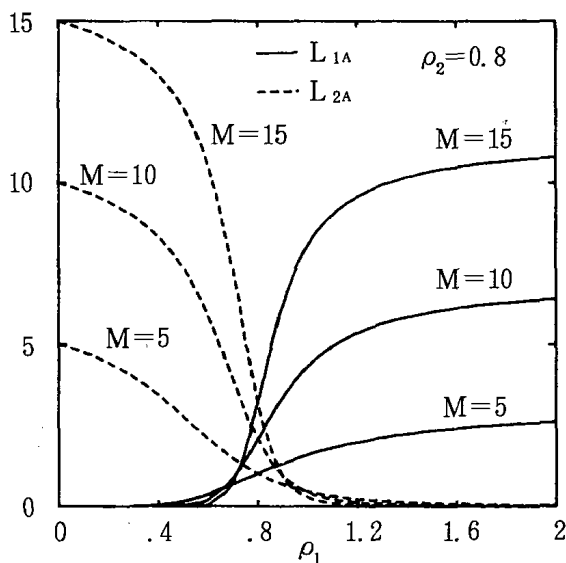


図10 A部の平均客数 ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

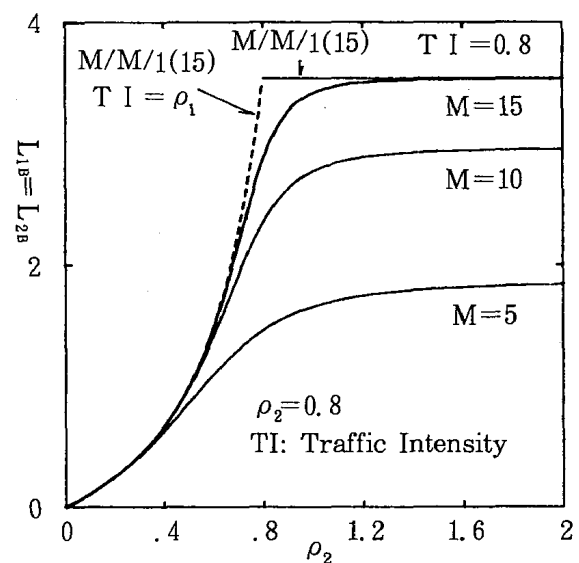


図11 B部の平均客数 ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

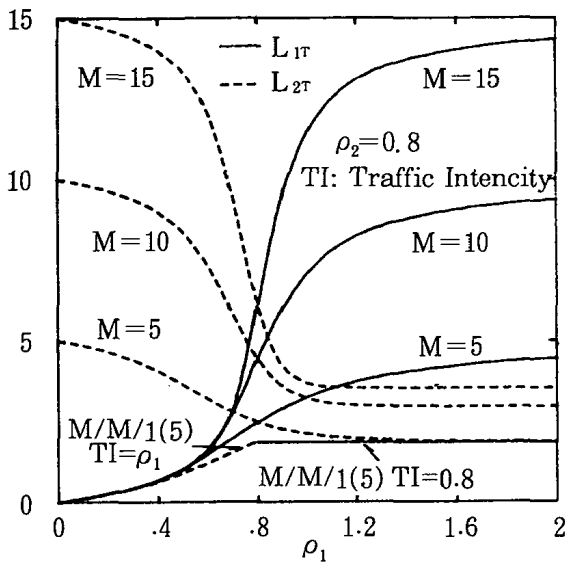


図12 平均システム平均客数  
( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

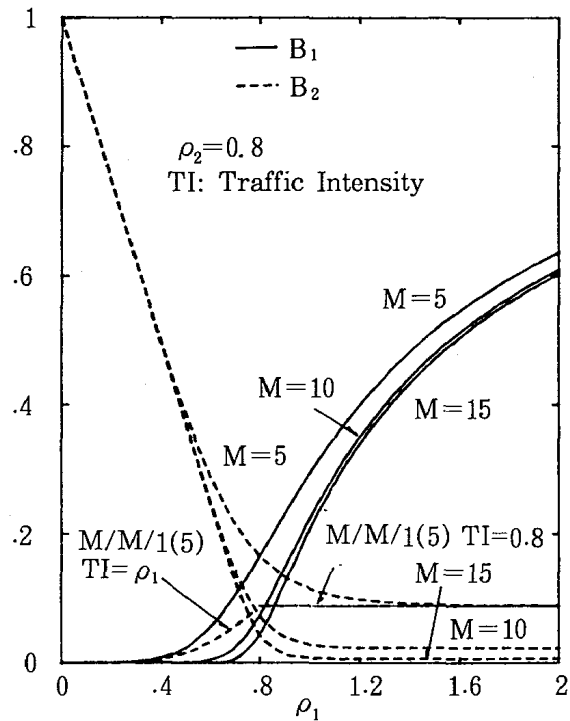


図13 あふれ率 ( $\lambda_1 \neq \lambda_2$ )

## 5. 2 非対称システム

$\lambda_1 \neq \lambda_2$  ( $\rho_1 \neq \rho_2$ ) の非対称システムの数値例を図10～図13に示す。これらにおいては、 $\rho_2=0.8$ に固定し、 $\rho_1$ を変化させている。

$Q_1$ ,  $Q_2$  のA部の平均客数  $L_{1A}$ ,  $L_{2A}$  の例を図10に示す。これより  $\rho_1 = \rho_2$  ( $=0.8$ ) を境に、トラフィック密度の大きい方の客数は増大し、逆にトラフィック密度の小さい方の客数が減少して0に近づいていく様子がわかる。 $L_{1A}$  を見ると、 $\rho_1 > \rho_2$  ( $=0.8$ ) の部分では待合室容量  $M$  の大きい場合の方が値が大きい、 $\rho_1$  がある程度以上  $\rho_2$  より小さくなると、これが逆転しているのがわかる。 $L_{2A}$  に関しても同様に、この逆転現象が起きている。これは待合室容量が大きいほどトラフィック密度の大きい方の待ち行列の客がたまり、そのためトラフィック密度の小さい方の待ち行列に到着した客は対となる割合が多く、A部は生成されにくいからである。

図11にB部の平均客数  $L_{1B} = L_{2B}$  の例を示す。これより、 $\rho_1 > \rho_2$  ( $=0.8$ ) のときはトラフィック密度  $\rho_2=0.8$  の  $M/M/1$  ( $M$ ) の値に近づき、 $\rho_1 < \rho_2$

ではトラフィック密度  $\rho_1$  の  $M/M/1$  (M) の値に接近するのがわかる。即ち、トラフィック密度の差がある程度以上大きい場合、B部の客数はトラフィック密度の小さい方の待ち行列に支配される。これは、トラフィック密度の小さい方の待ち行列が  $M/M/1$  (M) として振る舞うと考えられること<sup>(2)</sup>から明らかである。

図12は平均システム内客数  $L_{1T}$ ,  $L_{2T}$  である。二つの待ち行列のトラフィック密度の差が大きくなると、トラフィック密度の大きい方の客数が増大する様子がわかる。又、この差が大きい場合には、トラフィック密度の小さい方の待ち行列の客数は  $M/M/1$  (M) の客数に近づく。これは、前述したようにトラフィック密度の小さい方の待ち行列が  $M/M/1$  (M) のような動作をするため、図10, 11からも明らかなようにA部の客数が0に近づき、B部の客数のみが反映されるからである。

図13はあふれ率  $B_1$ ,  $B_2$  の例である。 $\rho_1 < \rho_2$  ( $=0.8$ ) では  $\rho_1$  が小さいほど  $B_1$  はトラフィック密度  $\rho_1$  の  $M/M/1$  (M) の値に近づき、 $\rho_1 > \rho_2$  では  $B_2$  がトラフィック密度  $\rho_2$  の  $M/M/1$  (M) の値に接近する。即ち、平均システム内客数の場合と同様に、トラフィック密度の差が大きくなると、トラフィック密度の小さい方のあふれ率は  $M/M/1$  (M) の値に近づく。

## 6. む す び

二つの到着過程を持つ有限容量同時サービス並進待ち行列を連続時間マルコフ連鎖としてモデル化し、解析した。平衡状態確率を計算することにより、平均システム内客数、あふれ率、待ち率を求めた。対称システムと非対称システムとに分け、数値例により、これらの諸量とトラフィック密度の関係等を考察した。この結果、到着率  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$  の対称システムにおける各特性量は、トラフィック密度  $\rho > 1$  では通常  $M/M/1$  (M) の値に近づき、 $\rho < 1$  の場合にのみ同時サービスの特徴が現れること、 $\lambda_1 \neq \lambda_2$  の非対称システムではトラフィック密度  $\rho_1$  と  $\rho_2$  の差がある程度以上大きければ、トラフィック密度の

小さい方の待ち行列の特性量は  $M/M/1/(M)$  の値に近づくことなどが明らかとなった。

今後の課題として、各待ち行列への到着客が待合室を共有するモデル、及び、到着過程が三つ以上の一般的なモデルの解析などが残されている。

## 文 献

- (1) J.M.Harrison : "Assembly-like queues", J.Applied Probability, 10, pp.354-367 (1973).
- (2) 福田明, 佐藤正二, 椋本介士 : "同時サービス並進待ち行列とその入力制御", 信学論 (A), J 69-A, 7, pp.829-839 (1986-07).
- (3) 福田明, 佐藤正二, 椋本介士 : "同時サービス並進待ち行列の入力制御", 信学論 (A), J 69-A, 11, pp.1310-1318 (1986-11).
- (4) 佐藤正二, 福田明 : "同時サービス並進待ち行列の入力制御における制御遅れ時間と周期観測の影響", 信学論 (A), J 70-A, 7, pp.1018-1027 (1987-07).
- (5) 佐藤正二, 福田明 : "途中放棄のある同時サービス並進待ち行列システムについて", 信学論 (A), J 70-A, 10, pp.1497-1500 (1987-10).
- (6) 能上慎也, 片山勁 : "データフロー制御方式における有限待合室をもつ同時処理モデルについて", 信学論 (B), J 70-B, 10, pp.1260-1262 (1987-10).
- (7) U.Narayan Bhat : "Finite Capacity Assembly-like queues", Queuing Systems, 1, pp.85-101 (1986).
- (8) 森村英典, 大前義次 : "応用待ち行列理論", pp.31-32, 日科技出版社 (1975).