寿命不確実性下の消費者行動について

加　藤　睦　洋

本稿の目的は，寿命（死亡年齢）の不確実性に直面しながら生涯消費／貯蓄計画を立案する消費者の異時的最適化を，位相図によって分析することである。但しここに寿命以外の不確実性の源泉は存在しないものとする。使用するモデルの特徴のうち重要なものは：

1．時間は連続変数である。

2．効用関数は時間的に加法分離的である。即ち，生涯総効用は効用積分（Ramsey積分）（の期待値）で表現される。

3．遺贈動機を持たない。

等である。（本文中で更に細かな仮定が追加される。）

第Ⅰ節では寿命不確実性が存在しない場合が分析される。第Ⅱ節では，標題の分野の先駆的研究であるYaariのモデルが紹介される。以上の予備的説明の後に，第Ⅲ節で筆者自身の考察が述べられる。

Ⅰ．不確実性が存在しない場合

寿命不確実性の消費者行動への影響を調べる前に，先ず不確実性の全く存在しない場合（deterministic case）を分析する。不確実性の意義を理解する上で，何と言ってもこの場合が基本となるからである。言葉で説明するよりも定式化を先に実行した方が分り易いと思われるので，モデルを提示する。なお読者の便宜を考えて，記号とモデルはYaari（1965）となるべく同じものを

使うよう心掛ける。(しかし完全に同じという訳にはいかない。)

(1－1)　$\underset{c(t)}{\mathrm{Max}}\ V(c)=\int_0^T \alpha(t)\ g\ [c\ (t)]\ dt$

(1－2)　s.t.　$S(t)=\int_0^t\left\{exp\int_\tau^t j(x)\ dx\right\}\left\{m\ (\tau)\ -c\ (\tau)\right\}d\tau$

(1－3)　$S(O)=0$

(1－4)　$S(T)=0$

記号の意味は：

$V(c)$＝生涯総効用，α＝割引関数，$g(c)$＝瞬時的効用関数，c＝消費，S＝資産（一種類），j＝利子率，m＝労働（賃金）所得，t＝時間（$t=0$が出生年齢，Tが死亡年齢。ここではTは確率変数ではない。）

モデルの意味は，（1－1）が最大化すべき効用積分で制御変数は消費である。以下で我々は通例に従って

(1－5)　$\alpha(t)=e^{-\beta t}$

とする。gは連続，増加的（$g'>0$），強凹（$g''<0$）とする。勿論$c\geqq0$である。（1－2）は資産畜積方程式である。我々はここで単純化のために，j及びmを時間を通じて一定と仮定する。すると（1－2）は

(1－6)　$S(t)=\int_0^t e^{j(t-\tau)}\left\{m-c\ (\tau)\right\}d\tau$

となる。これを微分方程式の形に書き直せば，

(1－7)　$\dot{S}(t)=y(t)-c(t)$

但し

(1－8)　$y(t)=m+jS(t)$,

(1－9)　$y(o)=m$

(1－10)　$y(T)=m$

となる。（文字の上の点は時間に関する導関数を表わす。$i.e.$ $\dot{S}=dS/dt$）ここにyは所得を表わす。(1－3)又は(1－9)は初期条件，(1－4)又は(1－10)は富制約（期末条件）であり，これは要するに素寒貧（ないしは無一文又は裸一貫）で生まれて素寒貧で死ぬことを意味する。$S(O)>0$としても問題はないが，$S(O)$が非常に大きければ親からもらった遺産を食いつぶして死ぬという，全然面白くない最適解が発生する可能性がある。$S(T)$は遺産であるから，(1－4)は子供に遺産を残さずに死ぬことを意味する。なお(1－4)は

(1－11)　$$\int_0^T e^{j(T-t)}\left\{m-c(t)\right\}dt=0$$

とも書ける。

ここで一言注意しておくが，寿命不確実性がないということは，自分が何時死ぬかを確実に知っているということであり，死ぬ迄に返済可能ならば負債を負ってもよいことを意味している。それ故にSは負になってもよい。従って所得yも負であってもよい。

最適消費は次の Euler 方程式を満たす。

(1－12)　$$\frac{\dot{c}}{c}=\frac{j-\beta}{a(c)}$$

但し

(1－13)　$$a(c)=-c\frac{g''(c)}{g'(c)}$$

であり，これは限界効用の弾力性を意味する。（a は後出の相対的危険回避度と同じものである。）もしa=一定ならばg（c）は

$$(1-14)\quad g(c)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-a}c^{1-a}, & a \neq 1,\ a>0;\\[2ex] \log c, & a=1\end{cases}$$

となる。すぐに分ることであるが，a=一定を仮定すると最適解の図示に甚だ都合がよい。従って我々は以後a=一定を仮定する。すると最適消費の変化率は，時間を通じて一定に保たれ，最適消費は指数的に変化する。最適消費の時間的変化率は（1－12）で与えられるから

$$(1-15)\quad \frac{\dot{c}}{c}\begin{cases}>0, & \text{if } j>\beta\\ =0, & \text{if } j=\beta\\ <0, & \text{if } j<\beta\end{cases}$$

となる。勿論最適消費の時間径路は

$$(1-16)\quad c(t)=c(o)\ exp\left\{\left(\frac{j-\beta}{a}\right)t\right\}$$

となる。（但しここで c（o）は未知数である。）

位相図によって最適消費の時間的推移を理解するには，（$S-c$）平面に図示するよりも次のようにした方がよい。今迄はcを制御変数と見てきたが，これに代って消費性向

$$(1-17)\quad x=\frac{c}{y}$$

を新たな制御変数にする。又これに伴い状態変数をSからyに改める。即ち

我々は（$y-x$）平面に位相図を描く。

まずyに関する状態方程式を求める。（1－8）を微分して

（1－18）　$\dfrac{\dot{y}}{y}=j\ (1-x)$

を得る。次にcに関するEuler方程式をxに関する表現に改める。（1－17）から

（1－19）　$$\begin{aligned}\frac{\dot{x}}{x}&=\frac{\dot{c}}{c}-\frac{\dot{y}}{y}\\&=\frac{j-\beta}{a}-j\ (1-x)\end{aligned}$$

を得る。

$j \gtreqless \beta$に応じて三種類の位相図が描ける。以下にこれを図示する。（図1－1，2，3）　なお$y<0$が許されることから，$x<0$も許されるが，第3象限の図示はしない。（第2及び第4象限には解は存在しない。）

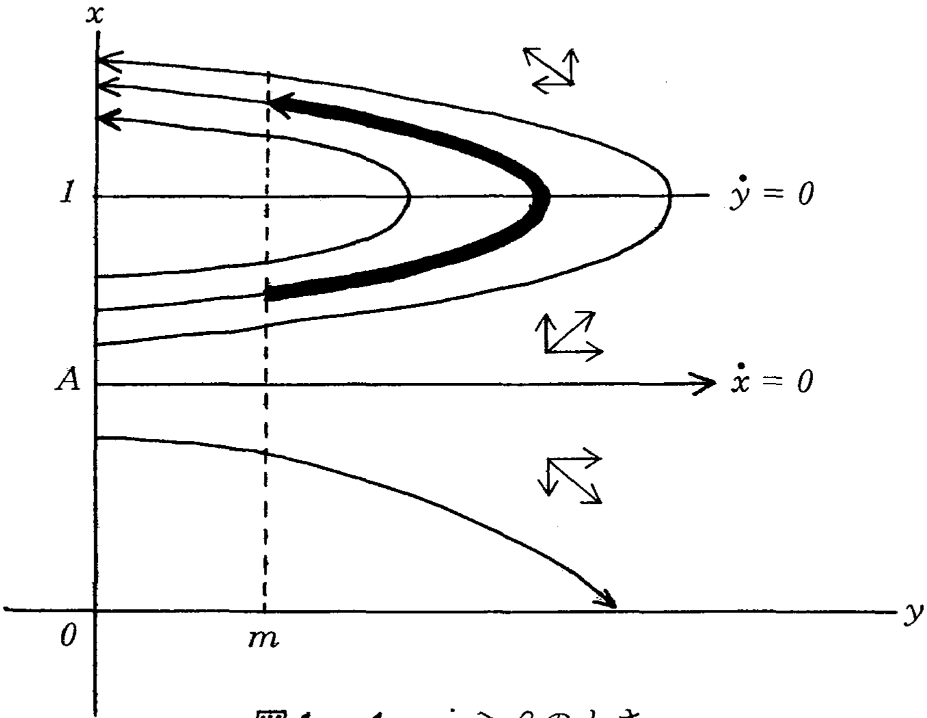

図1－1　$j>\beta$のとき

$\left(A=1-\dfrac{j-\beta}{ja}\right)$

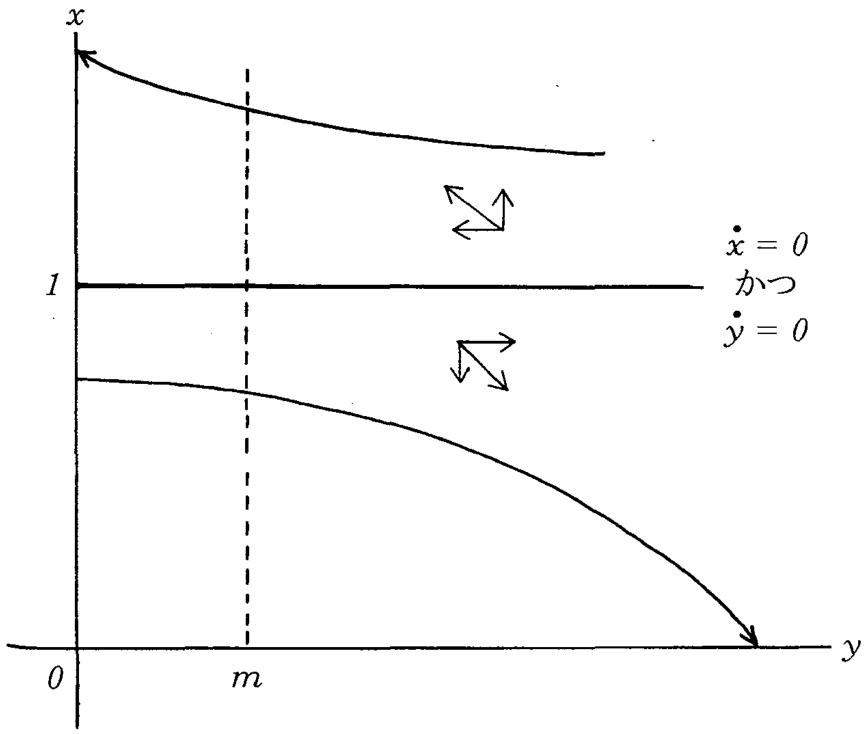

図1－2　$j = \beta$のとき

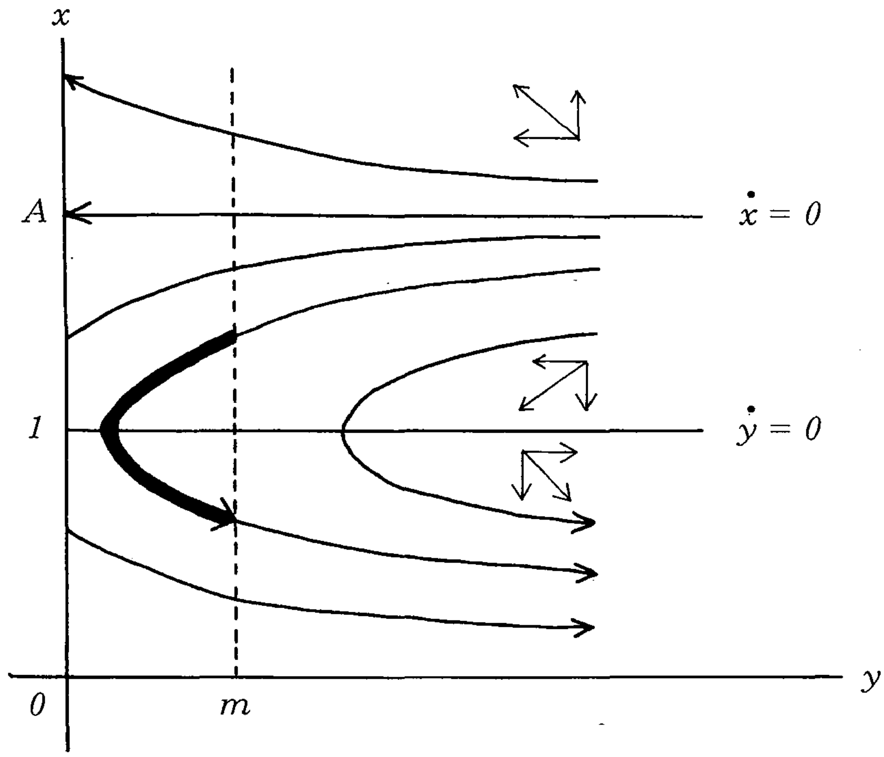

図1－3　$j < \beta$のとき（Aの値は同じ）

図１－１では最適径路は太い矢印の曲線で示されている。これによれば初期値 y（o）$=m$ に於いて $A<x(o)<1$ から出発し，正の貯蓄をしながら消費性向を次第に高めてゆき，ある年齢に達した後貯蓄の食いつぶしを始め，T 年の寿命を全うして y（T）$=m$ となってあの世へ旅出つのがベストであることが分る。図１－２では最適解が存在しないことが分る。図１－３では $1<x(o)<A$ から出発し借金して消費をし，ある年齢に達した後消費を切り詰め正の貯蓄をして借金を返済し，借金を完済して死ぬのがベストであることが分る。

以上のことから，$j>\beta$ のときは後で楽をする堅実型人生が最適戦略となり，$j<\beta$ のときは逆に最初は浪費にふけり，しかる後爪に火をともす生活をして死ぬ人生が最適戦略となる。割引率 β が大きいということは将来を過少評価し，現在を過大評価する刹那主義の表われであるから，この結果は当然予想されるところである。

以上の位相図を（$S-c$）平面に描き直すと，図１－４，５，６の如くとなる。（太い矢印の径路が最適径路である。）

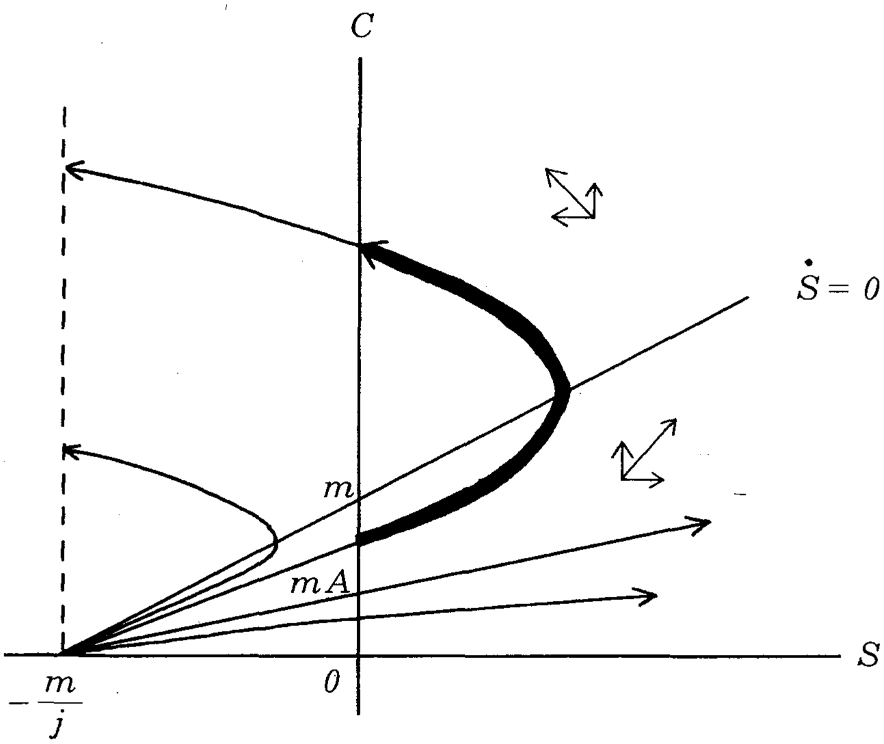

図１－４　$j>\beta$ のとき

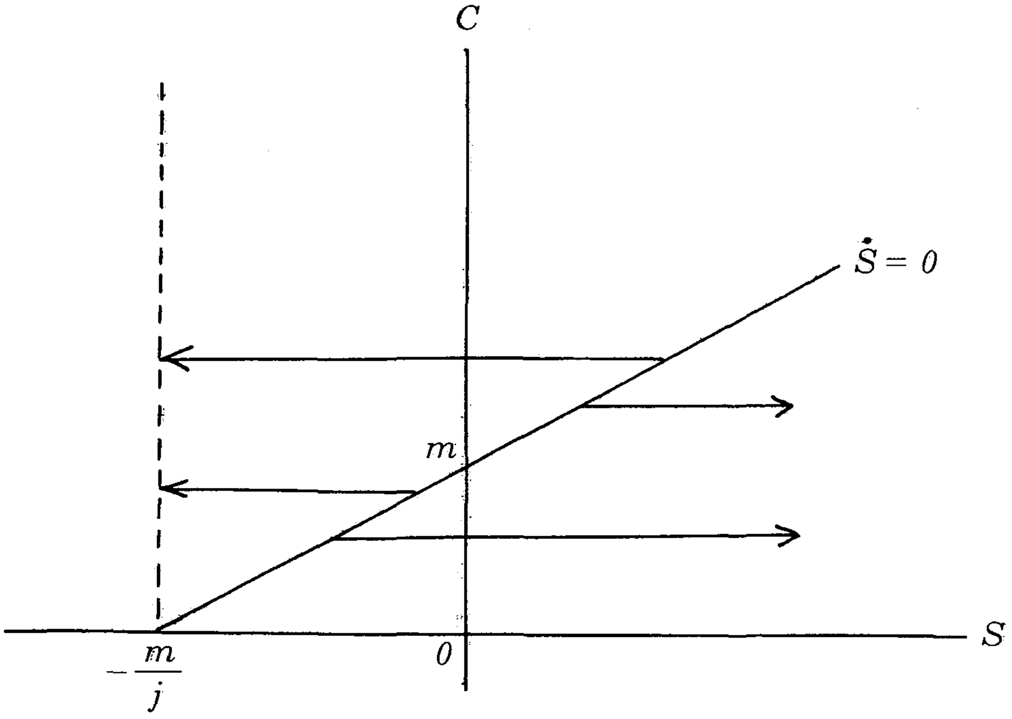

図1－5　$j=\beta$のとき

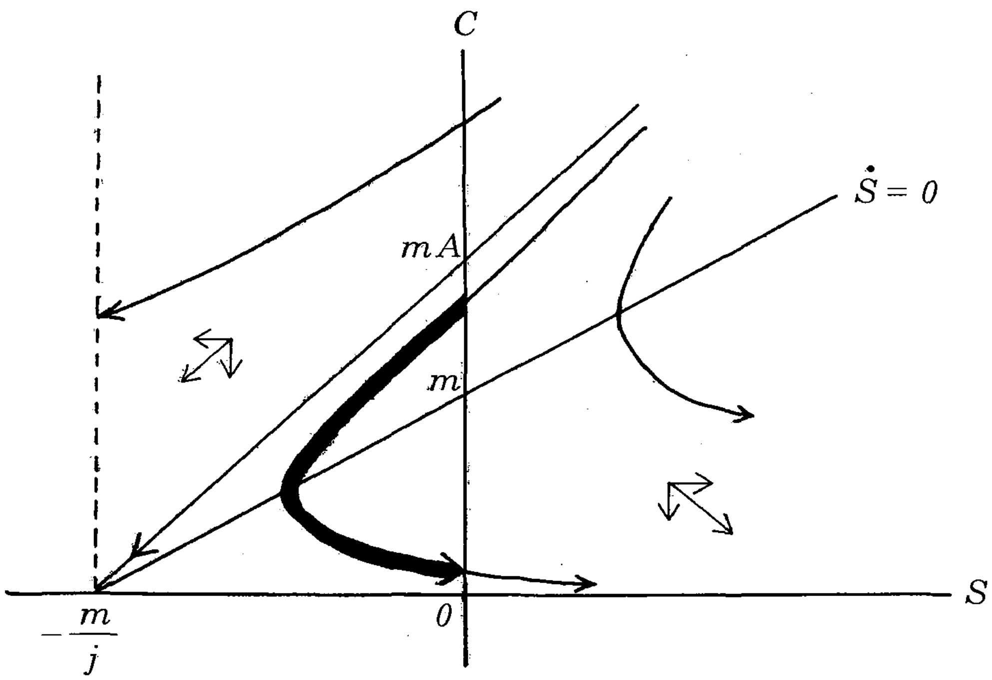

図1－6　$j<\beta$のとき

なお本節の記述に際しては，Atkinson（1971），Sheshinski（1974），宇沢（1969），Yaari（1964）等を参考にした。

II．寿命不確実性下の最適消費／貯蓄決定
—— Yaari の分析 ——

本節では，不確実な寿命が消費者の動学的最適化に及ぼす影響を本格的に定式化した最初の研究である Yaari（1965）を紹介する。この論文は，この分野の研究の出発点となった記念碑的労作である。Yaari は個人が遺贈動機を持つ場合と持たない場合の双方を分析しているが，ここでは遺贈動機を持たない場合のみを扱う。更に Yaari は生命保険一年金が利用可能な場合と不可能な場合の双方を分析している。(故に Yaari は四種類のケースを扱っている。) 従って本稿で検討するケースは二種類ということになる。それでは早速モデルの紹介にとりかかる。

1．生命保険一年金が利用不可能な場合（Yaari の *Case A*）

寿命 T を確率変数とする。T は $0 \leqq T \leqq \overline{T}$ とする。$T=0$ は死産の場合であり，$T=\overline{T}$ は最大可能な長生きをした場合である。T の分布は密度関数 π によって表現される。明らかに

$$\pi(t) \geqq 0, \qquad (2-1)$$
$$\int_0^{\bar{T}} \pi(t)\,dt = 1$$

である。次に Ω 及び π_t を次のように定義する。

$$(2-2) \qquad \Omega(t) = \int_t^{\bar{T}} \pi(\tau)\,d\tau, \quad 0 \leqq t \leqq \overline{T}$$

$$(2-3)\quad \pi_t(\tau)=\frac{\pi(\tau)}{\Omega(t)},\quad 0\leqq t\leqq \tau\leqq \overline{T},\ t\neq \overline{T}$$

$\Omega(t)$ は消費者がt歳時に生存している確率を表す。図２－１を見られたい。π は仮説的死亡確率密度関数である。（Yaari 自身は π について何らの特定化もしていない。）$\pi(t)$ はt歳時に死ぬ確率の密度関数である。t歳迄生存できたということは，死ぬのは t 歳以降ということだから，t 歳以降に死ぬ確率 Ω が t 歳時の生存確率ということになる。明らかに

$$(2-4)\quad \Omega(0)=1,\ \Omega(\overline{T})=0,\ 0\leqq\Omega\leqq 1$$

である。即ち生まれたての赤ん坊の生存確率は１（死産児が生涯最適化計画を立てることはありえないことに注意。），生物学的限界迄生き伸びた場合の生存確率は０である。Ω の導関数を求めてみると

$$(2-5)\quad \dot{\Omega}(t)=\frac{d}{dt}\int_t^{\overline{T}}\pi(\tau)\,d\tau$$
$$=-\pi(t)$$

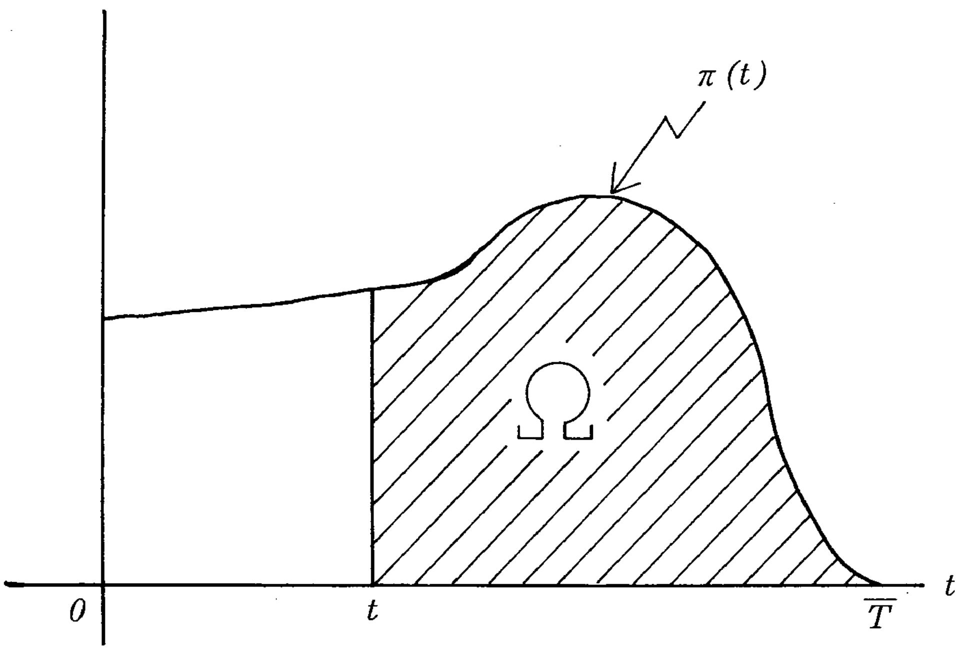

図２－１

となる。従って

$$(2-6)\quad \frac{\dot{\Omega}(t)}{\Omega(t)}=-\frac{\pi(t)}{\Omega(t)}$$
$$=-\pi_t\ (t)$$

となる。

消費計画 c の生涯期待総効用 $\overline{V}(c)$ は

$$(2-7)\quad \overline{V}(c)=\int_0^{\overline{T}}\pi(t)\int_0^t e^{-\beta\tau}g\,(c\,(\tau))\,d\tau\,dt$$
$$=\int_0^{\overline{T}}\Omega(t)\,e^{-\beta t}g\,(c\,(t))\,dt$$

と書ける。

我々は遺贈動機を持たない個人を考えているから

$$(2-8)\quad \mathrm{prob}\left\{S\,(T)\geqq 0\right\}=1$$

である。生命保険一年金を利用しない場合には借金が許されない。というのは寿命が不確実ということは，何時死ぬか全く分からないことを意味しており，負債を残して死ぬことが許されないとするならば，常に資産を非負に保っておかねばならない。それ故に

$$(2-9)\quad S\,(t)\geqq 0$$

でなければならない。そして

$$(2-10)\quad S\,(\overline{T})=0$$

である。

Euler方程式は

$$(2-11)\quad \frac{\dot{c}}{c}=\frac{j-\beta-\pi_t(t)}{a(c)}$$

$$=\frac{j-\beta+\dot{\Omega}/\Omega}{a(c)}$$

となる。（Yaariは相対的危険回避度 a（c）＝一定を仮定していない。）この結果を不確実性が存在しない場合（1－12）と比較してみると，（2－11）で分子に $\dot{\Omega}$／Ωが付け加わっているのが相違であることが分る。

$$(2-12)\quad \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}<0$$

と考えるのが理にかなっているであろうから，寿命不確実性は割引率を大きくするのと同等の効果を持つことが分る。生命保険一年金が利用できない場合，寿命不確実性は単に割引率を大きくするだけの効果しか持たないと考えるのは誤りである。なぜなら，不確実性がないときには死ぬ迄に返済可能な範囲内で債務を負うことが許されるが，何時死ぬか分らないときには一瞬たりとも借金できないからである。

2．生命保険一年金が利用可能な場合（Yaariの *Case C*）

この場合消費者が保有可能な資産は，生命保険－年金証券（actuarial notes）と通常債券（regular notes）の二種類となる。生命保険一年金証券は，当の消費者に限り，しかもその消費者が生存中のみ有効で，死亡後は自動的に無効となる。これに対して通常債券は他人（子孫であろうがなかろうが）にとっても有効である。生命保険一年金証券の利子率を r とおき，通常債券（その保有量は S で表わされる）の利子率を j とおく。勿論 $r>j$ でなければお話にならない。生命保険一年金証券が保険統計数理的に公正であれば

$$(2-13)\quad r(t)=j(t)+\pi_t(t)$$
$$=j(t)-\frac{\dot{\Omega}(t)}{\Omega(t)}$$

が成り立つから，消費者が存命中に限り

$$(2-14)\quad r(t)>j(t),\ \ 0\leqq t\leqq T$$

となって寿命不確実性に直面する消費者は，通常債券を保有するよりも生命保険一年金証券を保有した方が有利となる。即ちこの場合消費者は，すべての資産及び負債を生命保険一年金証券によって保有し，通常債券を保有することはない。（つまり生命保険一年金証券と通常債券の間のポートフォリオ選択は，corner solution になる。）（2－13）の意味は次の如くである。今1円のお金を一年間生命保険一年金証券で運用したときの収益が r 円である。但し一年間経過後実際に r 円を入手することができるのは1年後に生存していた場合に限られる。その期待収益は $r+\dot{\Omega}/\Omega$ であり，これは通常債券の市場利子率 j と等しくなければならないはずである。それ故に（2－13）が成り立つ。たとえ j が一定でも，$r(t)$ は一般には一定にならないことに注意。

予算制約式は

$$(2-15)\quad \int_0^T \left\{exp\left[-\int_0^t r(x)\,dx\right]\right\}(m-c(t))\,dt=0$$

と書ける。この意味するところは，貯蓄を生命保険一年金証券で運用したとき遺産がゼロということである。

最大化すべき目的関数は，生命保険一年金が利用可能であるか否かには関係ない。

Euler 方程式は

$$(2-16)\quad \frac{\dot{c}}{c}=\frac{r(t)-\beta+\dot{\Omega}/\Omega}{a(c)}=\frac{j-\beta}{a(c)}$$

となる。これは寿命不確実性のない場合と同じである。（最適解は勿論同じにはならない。）

（2－6）を解いて

$$(2-17)\quad \Omega(t)=\Omega(o)\,exp\left[-\int_0^t \pi_x(x)\,dx\right]=exp\left[-\int_0^t \pi_x(x)\,dx\right]$$

を得る。すると（2－15）は，$r(x)=j+\pi_x(x)$ を使って，通常債券のタームでは

$$(2-18)\quad \int_0^{\bar{T}} \Omega(t)\,e^{-jt}\,(m-c(t))\,dt=0$$

となる。この意味は，生涯期待労働所得の（通常利子率で割引かれた）現在価値は生涯期待消費のそれに等しいということである。更にこれは通常債券のタームで

$$(2-19)\quad \int_0^{\bar{T}} \pi(T)\,S(T)\,e^{-jT}\,dT=0$$

とも書ける。これは期待遺産の現在価値はゼロということである。

以上が遺贈動機を持たない場合の Yaari の定式化と分析である。

Ⅲ. 相対的危険回避度が一定で，死亡確率が指数分布に従う場合の最適消費／貯蓄決定

前節で紹介したYaariの分析はまことにお見事と言うほかはないが，しかし唯一画龍点睛を欠くのは，彼が割引関数，効用関数，死亡確率分布等を何ら特定化していないため，最適解の挙動の具体的イメージが必ずしも明快でないことである。そこで本節ではこれらの特定化を行い，位相図を描いて読者の視覚に訴えたい。

まず割引関数であるが，これは既述の通り $\alpha(t)=e^{-\beta t}$ とおく。

次に効用関数は相対的危険回避度一定の関数形を採用する。即ち

$$(3-1)\quad g(c)=\frac{1}{1-a}c^{1-a},\quad 0<a<1$$

である。$0<a<1$ を仮定したのは，$u(0)\to-\infty$ を排除するためである。

最後に死亡確率分布について。これについては今迄にいくらかの言及がある。Davies(1981)によれば逆ロジスティック曲線(inverse logistic curve)が生存確率曲線に良く当てはまるという。（p.573の*Fig.* 2に描かれている1971年のカナダ人男性の生存確率のグラフ参照。これによれば，50歳位迄は生存確率は非常に高いが，これを過ぎると90歳位迄は急低下をすることが分る。）統計的に計測して彼は次の結果を得た。

$$\Omega(t)=\frac{(1+1.00031)\ exp\ (0.002114\,t)}{1+1.00031\ \ exp\ (0.14651\,t)}$$

$$R^2=0.999$$

Hurd (1989) は二つの分布例を挙げている。一つは一様分布でその密度関数は

$$(3-2)\qquad \pi(t)=\frac{1}{\overline{T}},\quad 0\leqq t\leqq \overline{T}$$

で与えられる。勿論これは死亡確率が時間を通じて一定ということを意味している。これに対応する生存確率は

$$(3-3)\qquad \Omega(t)=\frac{\overline{T}-t}{\overline{T}}$$

であり，従って

$$(3-4)\qquad \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}=-\frac{1}{\overline{T}-t}$$

を得る。もう一つは人口学者御愛用の分布で

$$(3-5)\qquad \pi(t)=\delta\,\theta\,exp\,(\delta-\delta e^{\theta t}+\theta t),$$

$$(3-6)\qquad \Omega(t)=e^{\delta}exp\,(-\delta e^{\theta t}),$$

$$(3-7)\qquad \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}=-\delta\,\theta\,e^{\theta t}$$

$$\delta<1$$

である。

Fwu－Ranq　Chang (1991) は最近の論文で指数分布を使った。即ち

$$(3-8)\qquad \pi(t)=\lambda e^{-\lambda t},$$

$$(3-9)\qquad \Omega(t)=e^{-\lambda t},$$

$$(3-10)\qquad \frac{\dot{\Omega}}{\Omega}=-\lambda$$

とおいた。（3－8）の如き分布はしばしば観察される（例：放射性元素の崩

壊）が，人間の死亡確率分布にうまく当てはまるというわけではない。しかしながら（３－10）の性質は非常に便利なので，我々は以下で指数分布を仮定する。この分布では $\overline{T} \to +\infty$, 即ち最大可能な年齢が無限大となる。（３－８）に於て

$$(3-11) \quad \int_0^\infty \pi(t)\, dt = 1$$

であるから，λ が大きくなることは，ある年齢より若い時の死亡の危険が増大し，それより老いた時の死亡の危険が減少することを意味する。他方 λ が大きくなることは，生存確率曲線を下にシフトさせるから，平均寿命は縮む。

さていよいよ図解分析にとりかかろう。

１．生命保険一年金が利用不可能な場合

この場合資産は通常債券の形で保有される。無論借金はできない。Euler 方程式は

$$(3-12) \quad \frac{\dot{c}}{c} = \frac{j - \beta - \lambda}{a}$$

となる。ここで我々は $j - \beta - \lambda > 0$ の場合のみを考察する。明らかに寿命不確実性は最適消費の成長率を下げる。

最適消費は

$$(3-13) \quad \frac{\dot{x}}{x} = \frac{j - \beta - \lambda}{a} - j\,(1 - x)$$

$$(3-14) \quad \frac{\dot{y}}{y} = j\,(1 - x)$$

を満たす。ここに $x = c / y$ であり，初期条件は

(3 −15)　$y\,(o)=m$,　$(S\,(O)=0)$

終端点条件は

(3 −16)　$\lim_{\overline{T}\to\infty} y\,(\overline{T})=m$,　$(\lim_{\overline{T}\to\infty} S\,(\overline{T})=0)$

となる。

位相図を描いてみると図3－1の如くとなる。最適径路は図中の太い矢印で示されている径路であり，これは無限視野の場合の最適径路そのものである。太い矢印の径路の上の方に描かれている湾曲した反転径路は，寿命が有限の場合の最適径路である。（右側のものほど寿命が長い。）最適解がこのようになるのは，この場合消費者が生命保険一年金システムに加入していないことの結果である。なぜかというと，生命保険一年金を利用しない以上，消費者は仮に最大限の長生きをしたとしても困らないように計画を立てなければならない。この場合 $\overline{T}\to\infty$ であるから，消費者は無限視野の計画を立てなければならない。もしこの消費者が無限の長生きをすることができず有限期間で死亡したな

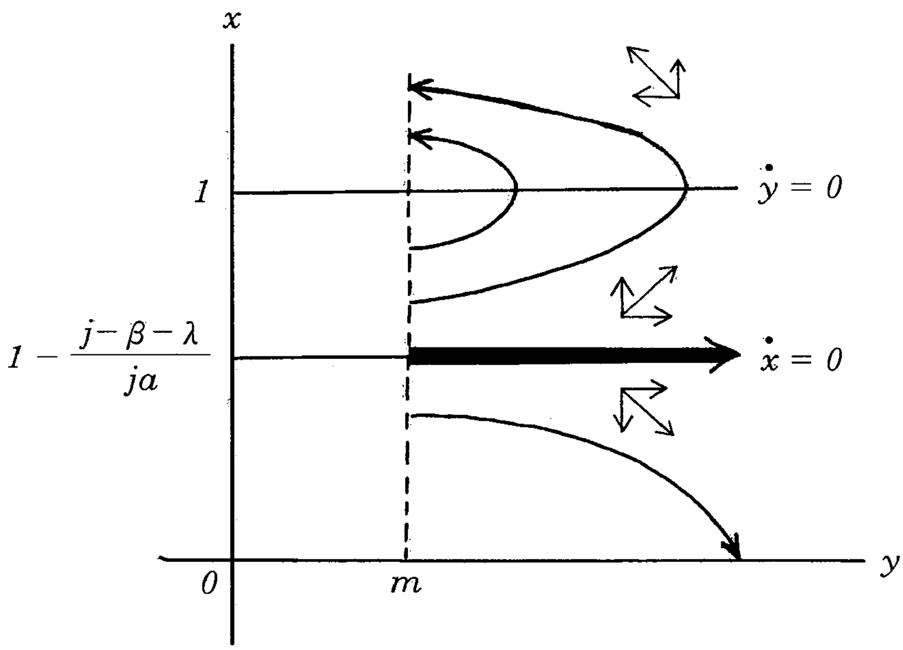

図3－1

らば，結果的には無駄な貯蓄をしたことになる。実はこれが寿命不確実性に直面しながら，生命保険一年金制度に加入しないことの不利益である。なお図中の太い矢印の径路は，（3－16）を満たしていないのではないかという疑問が湧く。しかしこれは次のように考えれば矛盾ではないと（筆者は）思う。寿命が有限であれば，図中の反転径路が最適解になり，$y(o)=m$ から出発し $y(T)=m$ で死亡する。寿命 T が長くなればなるほど，出生時の消費性向 $x(o)$ は小さくなり死亡時のそれ $x(T)$ は大きくなることが図から読みとれる。そして $T\to\infty$ になると出生時の消費性向は

$$(3-17) \qquad x(o)=1-\frac{j-\beta-\lambda}{ja}$$

にまで低下し，無限の時間をかけて無限の彼方から反転し $lim_{T\to\infty} \; x(T)\to\infty$ となって $y=m$（遺産ゼロ）に回帰してくると解釈できる。

2．生命保険一年金が利用可能な場合

この場合資産は生命保険一年金証券の形で保有される。借り入れが認められる点がこれまでと違う。Euler 方程式は

$$(3-18) \qquad \frac{\dot{c}}{c}=\frac{j-\beta}{a}$$

となり λ を含まない。それ故最適消費の成長率は，不確実性がない場合と全く同じである。ここで我々は $j>\beta$ を仮定する。

さて位相図による分析にとりかかろう。予算制約式は

$$(3-19) \qquad y(t)=m+r(t)Q(t)$$

となる。ここに Q は生命保険一年金証券の保有量であり，r はその利子率である。ところで $r=j-\dot{\Omega}/\Omega$ かつ $\dot{\Omega}/\Omega=-\lambda$ であるから

$$y=m+(j+\lambda)Q \tag{3-20}$$

となる。依って

$$\dot{y}=(j+\lambda)\dot{Q} = (j+\lambda)(y-c) \tag{3-21}$$

であるから,

$$\frac{\dot{y}}{y}=(j+\lambda)(1-x) \tag{3-22}$$

を得る。次に $x=c/y$ の挙動は

$$\frac{\dot{x}}{x}=\frac{j-\beta}{a}-(j+\lambda)(1-x) \tag{3-23}$$

で表わされる。かくて位相図は図3－2の如くとなる。

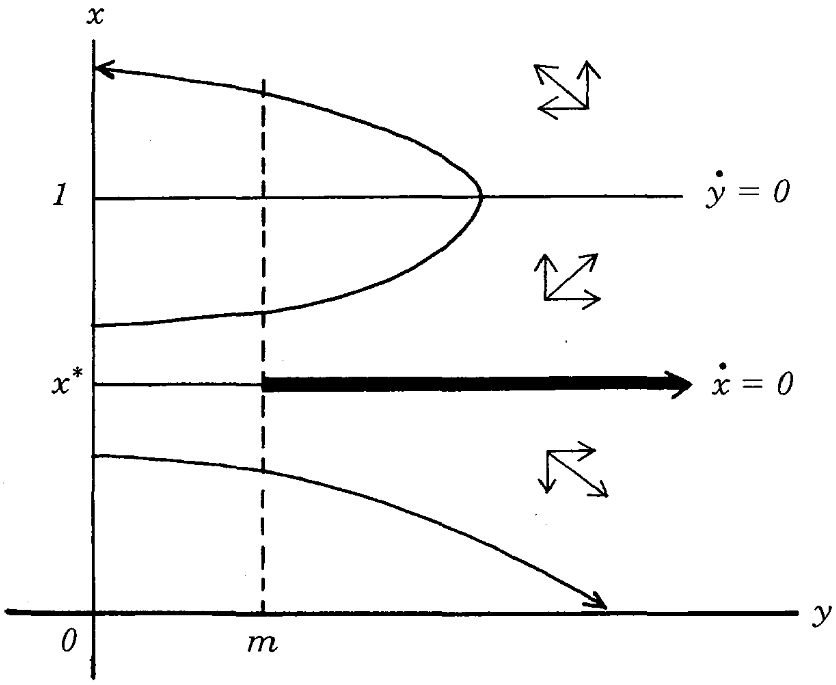

図3－2

ここで

$$(3-24)\qquad x^{*}=1-\frac{j-\beta}{(j+\lambda)a}$$

である。初期条件は

$$(3-25)\qquad y\ (0)=m,\quad (Q\ (0)=0)$$

である。最後に最適解が満たすべき制約条件は（2－18）である。これを計算してみると

$$(3-26)\qquad \frac{m}{j+\lambda}=\int_0^{\infty} e^{-(j+\lambda)t}\ c\,(t)\ dt$$

となる。ここで（3－18）から

$$(3-27)\qquad c\ (t)=c\ (0)\ exp\left(\frac{j-\beta}{a}\,t\right)$$

であるから

$$(3-28)\qquad \frac{m}{j+\lambda}=c\ (0)\int_0^{\infty} exp\left[\left\{\frac{j-\beta}{a}-(j+\lambda)\right\}\ t\ \right]dt$$

となる。$m/(j+\lambda)<\infty$であるから,

$$\frac{j-\beta}{a}-(j+\lambda)<0$$

であることに注意して

$$(3-29)\qquad c\ (0)=-\frac{m\ \{(j-\beta)-a\,(j+\lambda)\}}{a\,(j+\lambda)}$$

を得る。これを使ってxの初期値を求めると，

$$(3-30)\qquad x\ (0)=\frac{c\,(0)}{y\,(0)}$$

$$=\frac{c\,(0)}{m}$$

$$=1-\frac{j-\beta}{a(j+\lambda)}$$

$$=x^{*}$$

となる。故に図3－2の太い矢印で描いた水平な径路がこの場合の最適径路であることが分る。太線以外の径路では寿命が有限に押えられるので不適であることは了解できるが（$T\to\infty$を想起すべし），太線で示される最適径路では死亡すれば結果的に遺産を残すことになるのが一見奇妙に思われるかもしれない。実際（2－18）と（3－25）を満たす計画は貯蓄性向ゼロを要求するかの如く見える。(貯蓄性向がゼロなら資産は蓄積されず，利子所得はゼロとなる。)しかしながらこのような直観は正しくない。最適消費は（3－18）を満たす以上（$j-\beta$）／$a>0$の率で不断に拡大する。労働所得mが一定なのに無期限にこのようなことが可能となるのは，利子所得が不断に増加する即ち資産が不断に蓄積されるからにほかならない。実際最適貯蓄性向は

$$\frac{j-\beta}{a(j+\lambda)}>0$$

であってこれはゼロではない。

参考までに（$y-c$）平面に位相図を描いておく。(図3－3）これを見る

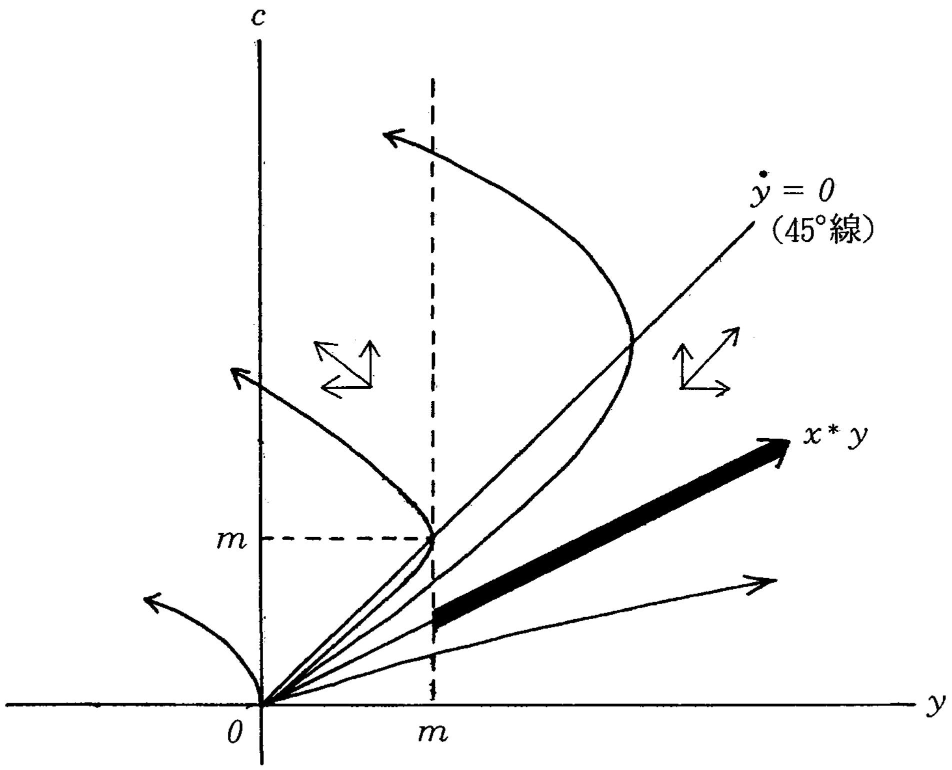

図３－３

と $c(0)=m$ から出発すると限りなく負債が累積していく破目に陥ることが明らかである。

参 考 文 献

ATKINSON, A. B. (1971). Capital taxes, the redistribution of wealth and individual savings. Review of Economic Studies, 38, 209−27.

DAVIES, JAMES B. (1981). Uncertain lifetime, consumption, and dis-saving in retirement. Journal of Political Economy, 89, 561−77.

FWU−RANQ CHANG (1991). Uncertain lifetimes, retirement and economic welfare. Economica, 58, 215−32.

HURD, MICHAEL D. (1989). Mortality risk and bequests. Econometrica, 57, 779−813.

SHESHINSKI, EYTAN (1974). Short and long run effects of interest−income and estate taxes. Metroeconomica, 26, 109−29.

宇沢弘文（1969). 最適経済成長理論の再検討：解説．季刊理論経済学，20，No.2，1−15.

YAARI, MENAHEM E. (1964). On the consumer's lifetime allocation process. International Economic Review, 5, 304−17.

―――――― (1965). Uncertain lifetime, life insurance, and the theory of the consumer. Review of Economic Studies, 32, 137−50.