寿命不確実性下の消費者行動について（Ⅱ）

加　藤　睦　洋

本誌前号掲載論文に於て筆者は，寿命不確実性下の消費者行動に関するYaariモデルから導き出される最適消費／貯蓄政策を，以下の仮定の下で分析した。

1．消費者は遺産を残さない。

2．相対的危険回避度は一定である。

3．死亡確率は指数分布に従う。

その結果判明した事は，生命保険一年金が利用可能であると否とにかかわらず，最適消費性向が時間を通じて不変に保たれるという事である。

本稿では，第Ⅳ節に於て前号論文への捕足を述べ，第Ⅴ節に於て寿命が確実な場合と不確実な場合の最適政策の相違を比較検討し，第Ⅵ節に於て平均寿命変化の効果を調べる。

Ⅳ．前号論文への捕足

最初に本節で前号論文で言い足りなかった事柄若干を書いておく。

1°　119頁の（$2-7$）の意味について。（$2-7$）を再掲すると

$$(2-7)\quad \overline{V}(c)=\int_0^T \pi(t)\int_0^t e^{-\beta\tau} g(c(\tau))\,d\tau\,dt$$

$$=\int_0^T \Omega(t)\ e^{-\beta t} g(c(t))\,dt$$

である。一行目の意味は自明。二行目の意味であるが，これは正確には

$$(4-1)\qquad \int_0^T [\Omega(t)\ e^{-\beta t} g(c(t)) + (1-\Omega(t))\ e^{-\beta t} g(o)]\ dt$$

と書かれるべきであろう。故に（$4-1$）が（$2-7$）に帰着するための条件は$g(o)=0$となることである。前号論文で我々は相対的危険回避度一定の効用関数

$$(3-1)\qquad g(c)=\frac{1}{1-a}c^{1-a},\qquad 0<a<1$$

を仮定したが，$0<a<1$に対しては$g(o)=0$である。（$a=1$即ち$g(c)=\log c$及び$a>1$に対しては$g(o)\to-\infty$になる。）

2°　生涯予算制約について。生命保険一年金が利用可能な場合の生涯予算制約式は，前号論文121頁の（$2-15$）であるが，これを書き換えて再掲すれば，

$$(2-15)\qquad \int_0^T \left\{exp\ [-\int_0^t r(x)dx]\right\} mdt = \int_0^T \left\{exp\ [-\int_0^t r(x)dx]\right\}\ c(t)dt$$

となる。本式の意味を前号では，貯蓄を生命保険一年金証券で運用したとき遺産がゼロであると説明したが，無論これは賃金所得流列の（生命保険一年金証券の利子率で割引かれた）現在価値の総和が消費流列の現在価値の総和に等しいと言い換えてもよい。このことは次のことを意味している。（$2-15$）は一生涯の間で収支の均衡がとれていればよいということであるから，異時点間の所得の移転が可能である，つまり貸付又は借入が可能であることを意味している。勿論このようなことが可能であるのは，消費者が生命保険一年金システムに加入しているからである。言う迄もなく（$2-15$）が成立している限り，生

命保険―年金システムの財政は健全である。

（$2-18$）に於て死亡確率（$1-\Omega(t)$）が落ちているのは，死亡しているときには所得を稼ぐことも，消費をすることもできない（$i.e., m=0$, $c=0$）からである。

3° 相対的危険回避度変化の効果について。前号論文第Ⅲ節に於て相対的危険回避度 a が変化したときの最適消費性向への効果を調べてみる。

生命保険―年金が利用不可能な場合の最適消費性向は，

$$1-\frac{j-\beta-\lambda}{ja}$$

で表わされる。a が大きくなるとこれは明らかに大きくなる。

次に生命保険―年金が利用可能な場合の最適消費性向は，

$$1-\frac{j-\beta}{(j+\lambda)a}$$

で表わされる。a が大きくなるとこれも又大きくなる。

結局生命保険―年金が利用可能であると否とにかかわらず，相対的危険回避度の上昇は最適消費性向を押し上げる効果を持つ。相対的危険回避度が大きくなるということは，安全に対する執着が強くなるということであるから，上記の結果は，a の増大は生きているうちに急いで消費を楽しんでしまおうとする傾向が強くなることを示している。

V．寿命不確実性の効果

本節では寿命不確実性の持つ意味について改めて考えてみたい。ここで取り上げる問題は，確実な寿命を持つ消費者と不確実な寿命を持つ消費者の最適消費／貯蓄政策にはどのような相違があるかを調べることである。より具体的に問題を

述べると，確実な寿命を持つ消費者の最適政策と，寿命は不確実であるがその平均寿命は前者の（確実な）寿命に等しい消費者の最適政策を比較することを試みる。更に寿命が不確実な消費者は，生命保険一年金を利用する場合としない場合の二通りがあるので，計三種類の場合を比較検討することになる。

そこでまずせねばならないことは，寿命が不確実な消費者の平均寿命を定義することである。これについては離散時間モデルを使って Levhari - Mirman（1977）が，次のような定義を採用している。（以下の紹介では記号は彼らと同一のものを使う。）t 期（$t=0, 1, \cdots\cdots T$）末に死ぬ確率を q_t とおく。明らかに

$$\sum_{t=0}^{T} q_t = 1$$

である。ここで

$$P_t = \sum_{i=t}^{T} q_i$$

とおく。これは生存確率を意味している。

ここで Levhari - Mirman は死亡確率分布の例として「超幾何分布」(hypergeometric distribution）を提示している。それは

$$q_t = (1-q)^t q, \quad t=0, 1, \cdots\cdots$$

即ち

$$q_0 = q, \ q_1 = (1-q)q, \ q_2 = (1-q)^2 q, \cdots\cdots$$

によって与えられる。（ここでは当然 $0<q<1$ と考えるべきであろう。）明らかに q_t は時間の推移につれて急速に小さくなるから，これは連続時間モデ

ルに於ける指数分布に対応するものと考えてよいであろう。生存確率はこのとき

$$P_t = \sum_{i=t}^{\infty} q_i = (1-q)^t$$

即ち

$$P_0 = 1,\ P_1 = 1-q,\ P_2 = (1-q)^2,\ \cdots\cdots$$

となる。

さて Levhari - Mirman は，平均寿命（期待寿命）μを

$$\mu = \sum_{i=1}^{\infty} P_i = \sum_{j=1}^{\infty} j q_j \left(= \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=i}^{\infty} q_j\right)$$

と定義する。（この定義ではμの中に$P_0 = 1$が含まれていないが，必要ならば含めても構わないと思う。）

以上の議論は離散時間の場合のものであるが，連続時間の場合にも類同的な定義が可能であろう。筆者の前号論文では，死亡年齢の確率分布の密度関数はπと表わされ，生存確率はΩと表わされた。我々の（連続時間）モデルに於ける平均寿命もμで表わそう。μの定義としては

$$(5-1) \qquad \mu = \int_0^{T} \Omega(t)dt,\quad 0 \leqq t \leqq \overline{T}$$

とすることが自然であろう。

ところで我々は前号論文で，Fwu - Ranq Chang によって利用された指数分布を使った。これは

$$\pi(t) = \lambda e^{-\lambda t},$$

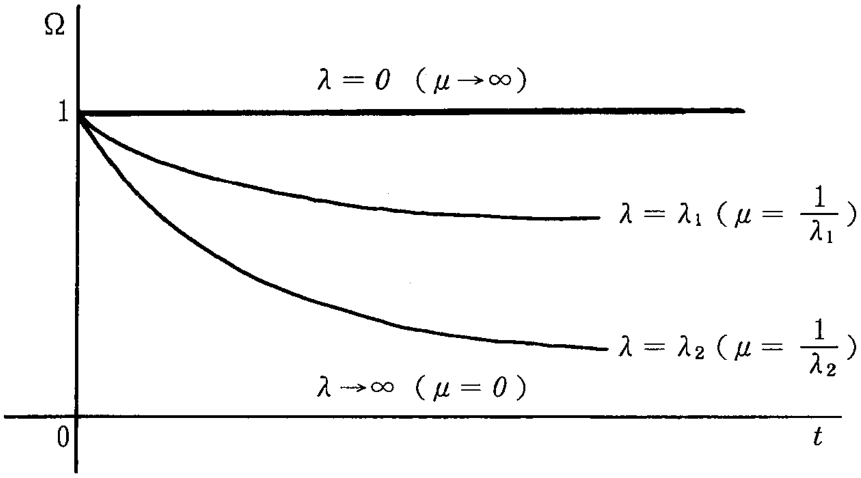

図5－1

$$\Omega(t)=e^{-\lambda t}$$

で表わされる。この分布の平均寿命を計算してみると

$$(5-2)\qquad \mu=\int_0^\infty e^{-\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}$$

となる。

λのいくつかの値に応ずる生存確率曲線を描いてみると図5－1を得る。$\lambda=0$のとき$\Omega=1$であり，これは不老不死を意味している。故に平均寿命は無限大になる。逆の極端が$\lambda\to\infty$であり，このときは$\Omega=0$であるから死産（又は出産時即死）を意味する。当然平均寿命は0となる。$0<\lambda<\infty$のときの例として$\lambda=\lambda_1$と$\lambda=\lambda_2$の二曲線が描かれている。（$\lambda_1<\lambda_2$）$\lambda=\lambda_1$の方が生存確率が高く平均寿命が長い。この図からも明らかなように，λの値と平均寿命μとは一対一に対応している。従って指数分布を仮定する限り，平均寿命を一定値に保ちながら分布の形を変えることはできないことに注意せねばならない。（故に我々のモデルでは所謂「平均寿命保存的危険変化」の効果の検討はできない。）なお$\lambda=0$（$\Omega=1$）及び$\lambda\to\infty$（$\Omega=0$）の場合は，寿命不確実性が存在しないことに注意されたい。

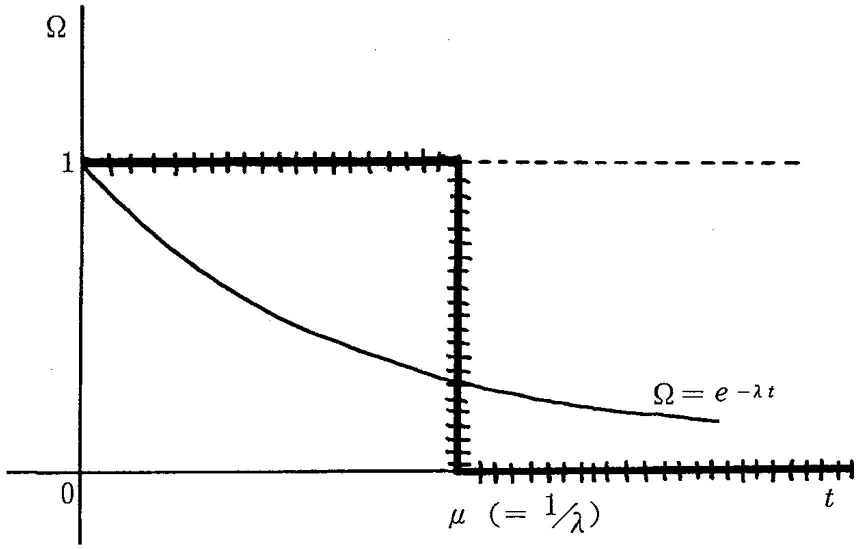

図５－２

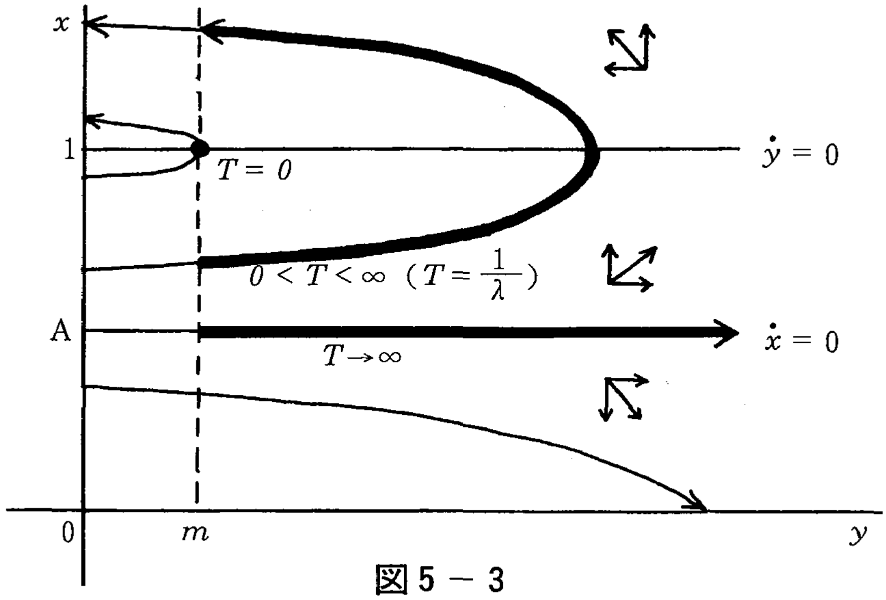

図５－３

$$A = 1 - \frac{j - \beta}{j\ a}, \quad j > \beta$$

さて本題に入る。死亡確率分布が指数分布であるとしてλ（$0<\lambda<\infty$）を特定の値に固定する。すると平均寿命μも特定の値$1/\lambda$をとる。このとき確実な寿命$T=1/\lambda$を持つ消費者を考える。寿命が確実な消費者の生存確率曲線と不確実な消費者のそれを図示すると図５－２の如くになる。図中のグラフ は，区間［0，$1/\lambda$］を確実に生き，$t=1/\lambda$のとき確実に死ぬ消費者の生存確率曲線を表わす。我々が調べたいのは，このような生存確率

曲線の相違の最適消費／貯蓄決定への影響である。

寿命が確実な場合の位相図（前号論文の図1－1）を再掲する。但し本稿では$j>\beta$を仮定する。図5－3がそれである。ここでは三つの最適経路が太い矢印で図示されている。座標（m，1）上の点は寿命$T=0$（死産）の場合であり，湾曲した径路は$0<T<\infty$(有限寿命)の場合であり$T=1/\lambda$とする。座標（m，A）から出発して真右に向う水平な径路は$T\to\infty$（不老不死）の場合であり，これは横断性条件

$$\lim_{t\to\infty} g'(c(t))\,e^{-\beta t}\geqq 0,\quad \lim_{t\to\infty} g'(c(t))\,e^{-\beta t}S(t)=0$$

を満たす。

寿命が不確実な場合の分析は前号論文第Ⅲ節で与えられている。結果は生命保険一年金が利用不可能な場合及び可能な場合の双方とも，最適消費性向が時間を通じて一定に保たれるということである。ここで生命保険一年金が利用不可能な場合の最適消費性向をM，利用可能な場合のそれをNとおく。これらはそれぞれ

$$(5-3)\qquad M=1-\frac{j-\beta-\lambda}{ja}$$

$$(5-4)\qquad N=1-\frac{j-\beta}{(j+\lambda)\,a}$$

で与えられる。但し（5－3）に於て$j-\beta-\lambda>0$，（5－4）に於て$j-\beta>0$を仮定する。ここでMとNのどちらが大きいかを調べてみる。

$$(5-5)\qquad M-N=\frac{\lambda\,(\beta+\lambda)}{ja\,(j+\lambda)}>0$$

となるから

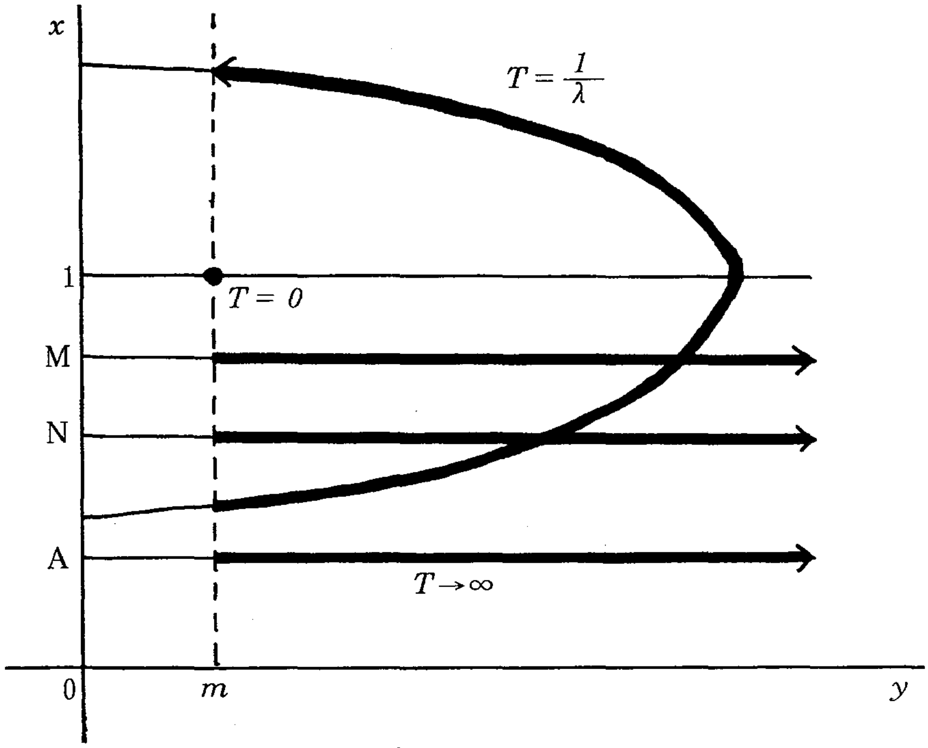

図５－４

$$(5-6)\quad M>N$$

を得る。次にNとAのどちらが大きいかを調べる。

$$(5-7)\quad N-A=\frac{\lambda\ (j-\beta)}{ja\ (j+\lambda)}>0$$

となるから

$$(5-8)\quad N>A$$

を得る。かくして

$$(5-9)\quad 1>M>N>A>0$$

が成立する。

図5－3に寿命が不確実な場合の最適径路を描き込んでみる。このとき言う迄もなく確実有限な寿命は1／λ(不確実な寿命の期待値)に設定されている。図5－4を見られたい。寿命が不確実な場合の最適径路は二つある。一つは生命保険一年金が利用不可能な場合のもので座標（m，M）から出発する水平な径路で，もう一つは生命保険一年金が利用可能な場合のもので（m，N）から出発する水平な径路である。両者とも最適消費性向は時間を通じて一定に保たれる点に特徴がある。明らかに生命保険一年金が利用不可能な場合の消費性向は，それが利用可能な場合のものより大きい。この理由としては，たとえ全く同一の死亡危険に直面していても生命保険一年金を利用しない場合の方が将来に対する不安感が大きいので，刹那主義的消費／貯蓄行動に打って出るからということになろう。自己の死亡時期を予め確実に知っており，しかもそれが寿命が不確実な場合の平均寿命1／λに等しい場合の最適径路は図中の湾曲した径路であり，前半生の貯蓄性向は正であるが後半生では負になる。要するに不確実な場合と違って最適消費性向は加齢と共に上昇し続ける点に特徴がある。参考までに死産の場合と不老不死の場合の最適径路も図示しておいた。

Ⅵ. 平均寿命変化の効果

死亡確率に指数分布を採用した我々のモデルでは，平均寿命は1／λになることは前節で述べた通りである。そこで本節では平均寿命増大即ちλ減少の効果を調べてみよう。

最初に最適消費／貯蓄決定への効果を見る。（$5-3$）に於てλの減少はMを小さくする。（$5-4$）に於てλの減少はやはりNを小さくする。故に平均寿命の増大は最適消費性向を小さくさせる効果を持つことが分る。これは長生きできるとの期待感の増大が、将来に備えた貯蓄の増大を引き起すからと考えられる。

次に生涯期待総効用への効果を見る。まず生命保険一年金が利用不可能な場合から。この場合の$\overline{V}(c)$を$\overline{V_M}(c)$と書くことにする。すると

$$(6-1) \quad \overline{V}_M(c) = \int_0^T \Omega(t)\, e^{-\beta t}\, g\,(c(t))\, dt$$
$$= \int_0^\infty e^{-\lambda t}\, e^{-\beta t} \frac{1}{1-a} \left\{ c(o) \exp\left(\frac{j-\beta-\lambda}{a} t \right) \right\}^{1-a} dt$$
$$0 < a < 1$$

ここで

$$(6-2) \quad x(o) = \frac{c(o)}{y(o)} = \frac{c(o)}{m} = M$$

より

$$(6-3) \quad c(o) = Mm$$

となる。計算の結果は，

$$(6-4) \quad \overline{V}_M(c) = \frac{1}{1-a}(Mm)^{1-a} \int_0^\infty e^{-jMt} dt$$
$$= \frac{1}{1-a}(Mm)^{1-a} \frac{1}{jM}$$
$$= \frac{m^{1-a}}{(1-a)\,j} M^{-a}$$

となる。λ の減少は $\overline{V}_M(c)$ を大きくさせることが分る。故に平均寿命の増大は生涯期待総効用を大きくさせることが分る。

次に生命保険一年金が利用可能な場合について。この場合の$\overline{V}(c)$を$\overline{V}_N(c)$と書くことにする。この場合の消費径路は

$$(6-5)\qquad c(t)=c(o)\,exp\left\{\frac{j-\beta}{a}\,t\right\},$$

$$(6-6)\qquad c(o)=Nm$$

である。期待効用を計算すると

$$(6-7)\qquad \overline{V}_N(c)=\frac{1}{1-a}(Nm)^{1-a}\int_0^{\infty}e^{-(j+\lambda)Nt}\,dt$$
$$=\frac{1}{1-a}(Nm)^{1-a}\frac{1}{(j+\lambda)N}$$
$$=\frac{m^{1-a}}{(1-a)(j+\lambda)}N^{-a}$$

となる。λの減少は$\overline{V}_N(c)$を大きくさせる。つまり平均寿命が伸びると生涯期待総効用は大きくなる。

最後に寿命不確実性に直面する消費者が生命保険一年金を利用することは本当に有利なのであろうか？　これを知るためには，$\overline{V}_M(c)$と$\overline{V}_N(c)$のどちらが大きいかを調べてみればよい。計算してみると確定的結果は得られないことが分る。直観的予想としては$\overline{V}_N(c)>\overline{V}_M(c)$が成立しそうに思われるが，事はどうもそう単純ではないようである。

参考文献

LEVHARI, DAVID and MIRMAN, LEONARD J. (1977). Savings and consumption with an uncertain horizon. *Journal of Political Economy*, 85, 265−81.