長生きをすると幸わせになれるか？

加　藤　睦　洋

Ⅰ. 序　　論

寿命即ち死亡時期が不確実な消費者（個人）を考える。このような消費者の期待寿命増大の生涯厚生への効果を検討することが本稿の目的である。分析にあたっては2期間モデルが利用される。このモデルは最も単純なものであるが，問題の本質を知るためには十分であると思われる。[1]

ここで今までの議論の経過を見ておく。Katz（1979）は次のような問題提起をした。寿命の不確実な消費者を考える。彼（又は彼女）は消費に由来する効用の期待値の一生涯に渡る総和を最大化すべく消費／貯蓄計画を練る。この際生命保険－年金が利用可能であるものとする。（この生命保険－年金証券は保険統計数理的に公正であるものと仮定する。）Katz は生存確率（期待寿命）の上昇が生涯期待総効用を低下させてしまうという信じがたい結果が出現しうると主張し，このことは期待効用仮説が寿命不確実性の問題の処理に適合しないという警告と見られるべきものかもしれないと断じた。氏の議論は次の如くである。（先にも述べたように2期間モデルが用いられる。）

第 i 期（$i=1$，2）の消費を c_i とし，これによる効用を $u(c_i)$ とおく。ここに $u'>0$，$u''<0$。最大可能な寿命を2期間とし，第1期は必ず生きており，第2期は生きているか死んでいるかは不確実とする。（第2期末には勿

1）この問題を連続時間モデルで考察した研究としては，Fwu－Ranq Chang（1991），加藤（1993）がある。しかしながら，連続時間モデルで明快な結果を得ようとすれば，効用関数や死亡確率分布に強い仮定をおかなければならない。

論必ず死んでいる。）それ故第１期の生存確率は１（死亡確率は０）である。第２期の生存確率を p（$0 < p < 1$）とおく。（故に第２期の死亡確率は $1-p$ ということになる。）第１期の所得を y_1 とおく。（これは確実に入手できる。）第２期の（生存を条件とした）所得を y_2 とおく。ここで簡単化のため，時差割引率と富（資産）の収益率をゼロと仮定する。

消費者の生涯期待効用は，

$$(1-1)\qquad V = u(c_1) + pu(c_2)$$

と書ける。生涯予算制約は，（生命保険－年金が利用可能であるとして）

$$(1-2)\qquad c_1 + pc_2 = y_1 + py_2$$

となる。最大化の一階条件は，

$$(1-3)\qquad u'(c_1) = u'(c_2)$$

であり，これより $c_1 = c_2$ を得る。$c_1 = c_2 = c$ とおくと，最適消費

$$(1-4)\qquad c = \frac{y_1 + py_2}{1+p}\left(= \frac{\text{生涯期待所得}}{\text{期待寿命}}\right)$$

を得る。

故に期待効用は，

$$(1-5)\qquad \overline{V} = u\left(\frac{y_1 + py_2}{1+p}\right) + pu\left(\frac{y_1 + py_2}{1+p}\right)$$

となる。これを生存確率 p で微分して

$$(1-6)\quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial p}=u\left(\frac{y_1+py_2}{1+p}\right)-\frac{y_1-y_2}{1+p}\,u'\left(\frac{y_1+py_2}{1+p}\right)$$

を得る。Katz はここでこの微係数の符号は曖昧であり，負になる可能性もありうるとする。

この「早死をすると幸わせになれる。」という驚くべき結果に対しては早速 Pelzman－Rousslang（1982）が批判を加えた。彼らは，Katz の仮定の下では第2期の所得が負になる場合を除いて，寿命の増大は個人の厚生を確実に改善すると主張する。彼らのコメントを見てみよう。生涯期待効用は，

$$(1-7)\quad V=u(c_1)+pu(c_2)+(1-p)u(o)$$

と書ける。[2] 最適化の結果期待効用は，

$$(1-8)\quad \overline{V}=u\left(\frac{y_1+py_2}{1+p}\right)+pu\left(\frac{y_1+py_2}{1+p}\right)+(1-p)u(o)$$

となる。これを p で微分して

$$(1-9)\quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial p}=u\left(\frac{y_1+py_2}{1+p}\right)-\frac{y_1-y_2}{1+p}\,u'\left(\frac{y_1+py_2}{1+p}\right)-u(o)$$

を得る。

非負の所得に対してこれは正になることを示す。まず

$$(1-10)\quad c=\frac{y_1+py_2}{1+p}\geq\frac{y_1-y_2}{1+p}$$

が言える。c を（1－9）に代入して

2）この表現の方が（1－1）よりも正しいことには Katz 自身も気付いている。勿論 $u(0)=0$ であれば両者は同じである。$u(0)\to-\infty$ となるような効用関数は具合が悪いことも直ちに分る。

$$(1-11)\quad u(c)-\frac{y_1-y_2}{1+p}u'(c)-u(o)\geqq u(c)-cu'(c)-u(o)$$
$$>0$$

を得る。ここでこの不等式の後半部分が成立することを示せば，Katz の結果に対する論駁になる。効用関数を最適消費の近傍でテイラー展開すれば，

$$(1-12)\quad u(t)=u(c)+(t-c)\,u'(c)+\frac{(t-c)^2}{2\,!}u''(c)$$
$$+\text{無視可能な項}$$

となる。$t=0$ とおけば，

$$(1-13)\quad u(c)-cu'(c)-u(o)=-\frac{c^2}{2\,!}u''(c)$$
$$>0$$

を得る。即ち長生きをすれば幸わせになれるという訳である。

さてこの Pelzman－Rousslang の議論は局所的（local）証明であって，数学的には不十分である。そこで大域的（global）な取り扱いをすることが望まれる。この方向での議論は加藤（1984）及び Fwu－Ranq Chang（1991）によってなされた。

拙論を本稿の記号と計算法に合わせて再述すると，最適政策が使われたときの期待効用は，

$$(1-14)\quad \overline{V}=(1+p)u(c)+(1-p)u(o)$$

である。これを p で微分して

$$(1-15)\quad \frac{\partial\overline{V}}{\partial p}=u(c)-u(o)-u'(c)\,(c-y_2)$$

但し

$$(1-16)\quad c-y_2=\frac{y_1-y_2}{1+p}$$

となる。（$y_1 \geqq 0$，$y_2 \geqq 0$である限り）$u(c)-u(0)>0$であるから，$y_1 \leqq y_2$であれば（$1-15$）は正。$y_1>y_2$のときは$u(\ )$の強凹性によってやはり（$1-15$）は正になる。（図1－1参照。$u(0)$は0でも負でもよいが，有限の大きさでなければならない。）

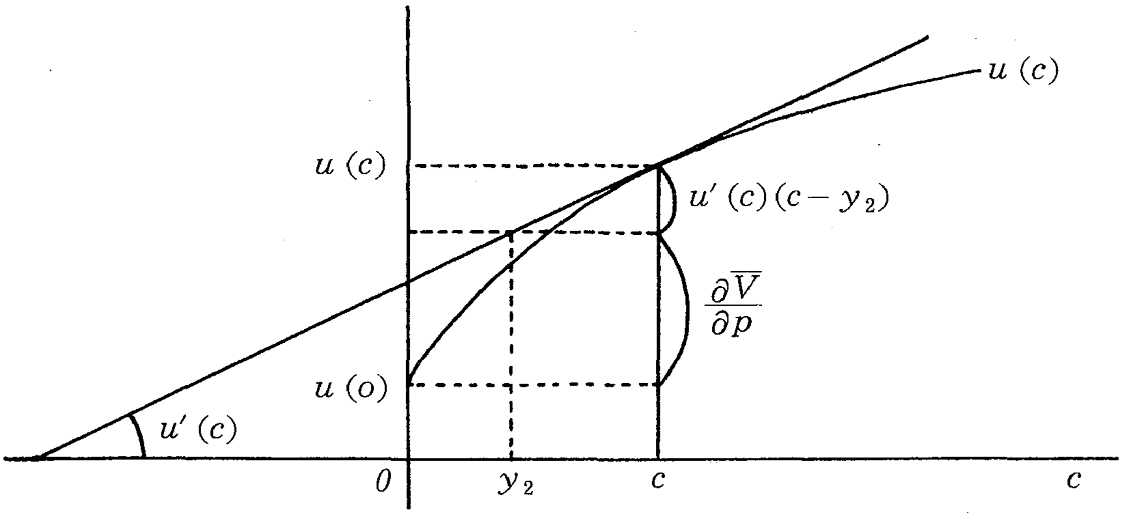

図1－1　$y_1>y_2$，$i.\ e.$，　$c>y_2$のとき

次に，Fwu－Ranq Chang は APPENDIX の中で Pelzman－Rousslang の証明の大域化を与えた。即ち平均値定理を使えば，（$1-11$）は，

$$(1-17)\quad u(c)-u(0)=u'(\theta c)(c-0)$$
$$>u'(c)\,c$$
$$0 \leqq \theta \leqq 1$$

となる。不等式は$u(\ )$の強凹性による。

以上が今迄の議論の経過である。これから直ちに次の事が分る。

1°（将来効用の）割引率及び（貯蓄された富の）利子率（収益率）が共に正である場合の検討がなされていない。

2°生命保険－年金が利用不可能な場合の検討がなされていない。

それ故次節以降でこれらの問題が順次取りあげられる。

Ⅱ．割引率及び利子率が共に正の場合（生命保険－年金が利用可能な場合）

生命保険－年金が利用可能で，時差割引率及び貯蓄収益率が共に正の場合のモデルは，次の如く定式化されうる。

$$(2-1)\qquad \max_{c_1,\ c_2}\quad V = u(c_1) + \delta\,[pu(c_2) + (1-p)\,u(0)]$$

$$(2-2)\qquad \text{s.t.}\quad c_1 + pc_2/r = y_1 + py_2/r$$

ここでδは割引因子であって$0<\delta<1$とする。rは通常利子因子で$1+$通常利子率（通常債券の収益率。これは生命保険－年金証券の収益率に生存確率の変化率を加えたもの。）である。

一階条件は，

$$(2-3)\qquad u'(c_1) = \delta ru'(c_2)$$

となる。

寿命増大の最適消費への効果を見てみよう。（2－2）及び（2－3）をpで微分して

$$(2-4)\quad \frac{\partial c_1}{\partial p} = \delta r \frac{u''(c_2)}{u''(c_1)} \frac{\partial c_2}{\partial p}$$

$$= \delta r \frac{u''(c_2)}{u''(c_1)} \frac{(y_2 - c_2)}{\left\{p + \delta r^2 \dfrac{u''(c_2)}{u''(c_1)}\right\}}$$

$$(2-5)\quad \frac{\partial c_2}{\partial p} = \frac{y_2 - c_2}{p + \delta r^2 \dfrac{u''(c_2)}{u''(c_1)}}$$

を得る。（2－2)，（2－4)，（2－5）から

$$\mathrm{sign}\left(\frac{\partial c_1}{\partial p}\right) = \mathrm{sign}\left(\frac{\partial c_2}{\partial p}\right) = \mathrm{sign}(c_1 - y_1) = \mathrm{sign}(y_2 - c_2)$$

であることが分る。故に期待寿命の変化は第1期及び第2期の最適消費を同一方向へ変化させる。

次に期待効用への効果について。最大化された期待効用を p で微分し，適当な代入を施して

$$(2-6)\quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial p} = \delta\,[u(c_2) - u(o) - u'(c_2)(c_2 - y_2)]$$

$$> 0$$

を得る。不等式は $u(\ )$ の強凹性によることは言うまでもない。かくて平均寿命の増大は個人の厚生を改善する。

ここで具体例を若干示す。

例1．相対的危険回避度一定の場合。

$$(2-7)\quad u(c_i) = \frac{1}{1-a} c_i^{1-a}, \quad 0 < a < 1, \quad i = 1, 2$$

とおく。このときの最適解及び期待効用は,

$$(2-8)\qquad c_1 = \frac{y_1 + py_2/r}{1+(p/r)(\delta r)^{1/a}}$$

$$(2-9)\qquad c_2 = \frac{(\delta r)^{1/a}(y_1 + py_2/r)}{1+(p/r)(\delta r)^{1/a}}$$

$$(2-10)\qquad \overline{V} = (1+(p/r)(\delta r)^{1/a})^a \frac{1}{1-a}(y_1 + py_2/r)^{1-a}$$

となる。

平均寿命増大の効果は,

$$(2-11)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial p},\ \frac{\partial c_2}{\partial p} \lesseqgtr 0 \quad \text{according as} \quad (\delta r)^{1/a} y_1 \gtreqless y_2$$

$$(2-12)\qquad \frac{\partial \overline{V}}{\partial p} = \frac{1}{r}\left[\frac{a}{1-a}(\delta r)^{1/a}\left(\frac{y_1 + py_2/r}{1+(p/r)(\delta r)^{1/a}}\right)^{1-a} + y_2\left(\frac{y_1 + py_2/r}{1+(p/r)(\delta r)^{1/a}}\right)^{-a}\right] > 0$$

となる。

例2．絶対的危険回避度一定の場合。

$$(2-13)\qquad u(c_i) = -\frac{1}{A}e^{-Ac_i} = -e^{-c_i}, \qquad i=1,\ 2$$

とおく。簡単化のため$A=1$とした。最適解と期待効用は,

$$(2-14)\qquad c_1 = \frac{y_1 + py_2/r - (p/r)\ln \delta r}{1+p/r}$$

$$(2-15)\qquad c_2 = \frac{y_1 + py_2/r + \ln \delta r}{1+p/r}$$

$$(2-16)\quad \overline{V}=-\delta\left[(p+r)e^{-c_2}+(1-p)\right]$$

$$=-\delta\left[(p+r)(\delta r)^{-\frac{1}{1+p/r}}\exp\left(-\frac{y_1+py_2/r}{1+p/r}\right)+(1-p)\right]$$

平均寿命増大の最適消費への効果は,

$$(2-17)\quad \frac{\partial c_1}{\partial p},\ \frac{\partial c_2}{\partial p}\ \lesseqgtr\ 0 \quad \text{according as} \quad y_1+\ln\ \delta r \gtreqless y_2$$

となる。期待効用への効果を見るために$\overline{V}$をpで微分して

$$(2-18)\quad \frac{\partial\overline{V}}{\partial p}=-\delta\left[e^{-c_2}\left\{1-\frac{y_2-y_1-\ln\ \delta r}{1+p/r}\right\}-1\right]$$

これが正であるためには

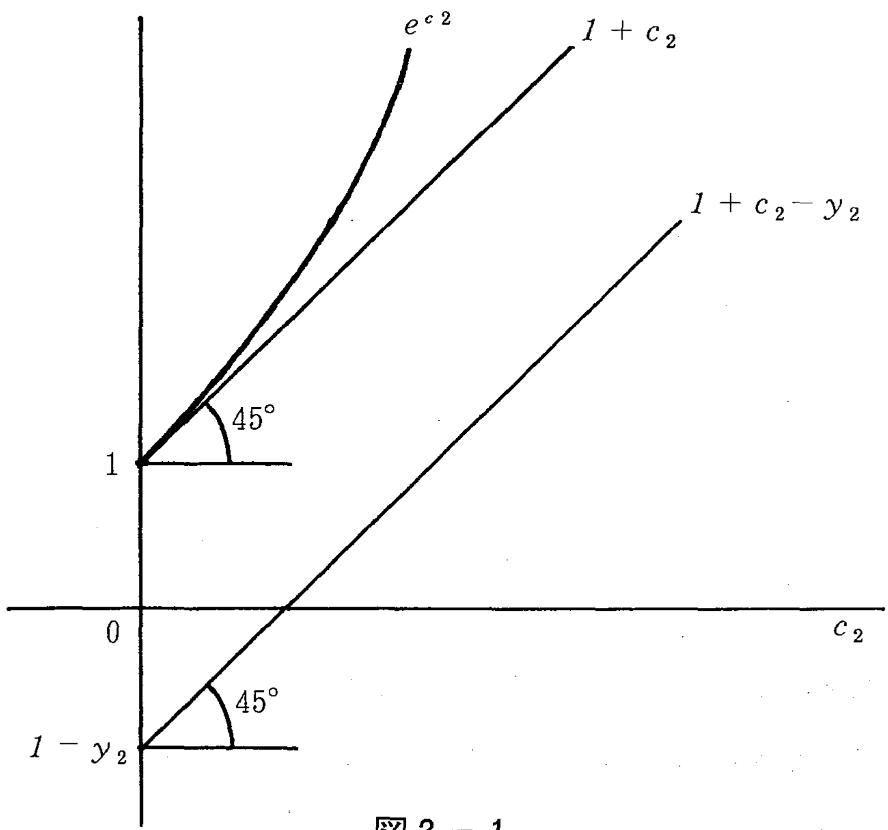

図2－1

$$1 - \frac{y_2 - y_1 - \ln \delta r}{1 + p / r} < e^{c2}$$

でなければならない。これは

$$1 + c_2 - y_2 < e^{c2}$$

と書ける。この不等式が常に満たされることは図２－１から明らか。

Ⅲ．生命保険－年金が利用不可能な場合

本節では生命保険－年金が利用不可能な場合の期待寿命増大の厚生効果を考察する。この場合のモデルは次のように書ける。

$$(3-1) \quad \max_{c_1,\ c_2} \ V = u(c_1) + \delta[pu(c_2) + (1-p)u(0)]$$

$$(3-2) \quad \text{s. t.} \ \ c_2 = W_2 + y_2,$$

$$(3-3) \quad W_2 = (W_1 + y_1 - c_1)r,$$

$$(3-4) \quad W_1 = \text{所与},$$

$$(3-5) \quad 0 \leqq c_1 \leqq W_1 + y_1,\ i.\ e.,\ W_2 \geqq 0.$$

ここで W_i $(i = 1,\ 2)$ は富（資産）を表わす。（3－2）は第2期末に遺産を残さないことを意味し，（3－3）は貯蓄による富の蓄積を表わし，（3－4）は初期条件を表わす。生命保険－年金が利用不可能な場合には借金ができない。（借金をすれば負債を残して死ぬ可能性があるから。）（3－2）は第2期に新たな借金をして $W_2 + y_2$ を上回る消費をしないことを意味してお

り，（$3-5$）は第1期に借金によってW_1+y_1を上回る消費をしないことを意味している。かくして富は非負に保たれる。なお第2期首に生存している確率はp，死亡している確率は$1-p$であるが，死亡している場合$y_2=0$，$c_2=0$であるからこの場合W_2は結果的に無駄なあるいは過剰な貯蓄となる。（遺産と見ることもできる）。しかし生命保険－年金が利用不可能な場合，pの大きさの如何にかかわらず第2期にも生存しているかもしれないという前提で貯蓄計画を立てなければならない。いずれにしても寿命が不確実なとき，生命保険－年金が利用不可能か又は利用可能であっても故意に利用しないのは不経済である。

さて上記モデルの解を求めてみる。もし第2期にも生存しているならば，第2期の最適消費は，

$$(3-6)\qquad c_2=W_2+y_2$$

となる。第1期の最適消費は次の一階条件を満たす。

$$(3-7)\qquad u'(c_1)=\delta p r u'(c_2)$$

これより直ちに

$$(3-8)\qquad c_1 \gtreqless c_2 \quad \text{according as} \quad \delta p r \lesseqgtr 1$$

を得る。

期待寿命増大の効果を見てみよう。まず最適消費への効果について。（$3-3$），（$3-6$），（$3-7$）をpで微分して計算することにより，

$$(3-9)\qquad \frac{\partial c_1}{\partial p}=\frac{\delta r u'(c_2)}{u''(c_1)+\delta p r^2 u''(c_2)}<0,$$

$$(3-10)\quad \frac{\partial c_2}{\partial p} = -r\,\frac{\partial c_1}{\partial p} > 0$$

を得る。前節での結果 $\mathrm{sign}(\partial c_1/\partial p)=\mathrm{sign}(\partial c_2/\partial p)$ との違いに注意。

次に最適政策が使われたときの生涯期待総効用への効果を見てみよう。最大化された期待効用 $\overline{V}$ を p で微分し，適当な代入を行なって，

$$(3-11)\quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial p} = \delta\,[u(c_2)-u(o)] > 0$$

を得る。即ち長生きをすると幸わせになれる。

以下に具体例を示す。

例1．相対的危険回避度一定の場合。

計算の便宜のため $y_1=y_2=0$ とする。このとき，

$$(3-12)\quad c_1 = \frac{1}{1+(\delta p r^{1-a})^{1/a}}\,W_1,$$

$$(3-13)\quad c_2 = \frac{(\delta p r^{1-a})^{1/a}}{1+(\delta p r^{1-a})^{1/a}}\,rW_1,$$

$$(3-14)\quad \overline{V} = [1+(\delta p r^{1-a})^{1/a}]^a\,\frac{1}{1-a}\,W_1^{1-a}$$

を得る。

明らかに，

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} < 0,\quad \frac{\partial c_2}{\partial p} > 0,\quad \frac{\partial \overline{V}}{\partial p} > 0$$

である。

例２．絶対的危険回避度一定の場合。

計算の便宜のため $W_1 = 0$ とする。このとき,

$$(3-15) \qquad c_1 = \frac{y_1 r + y_2 - \ln \delta pr}{1+r},$$

$$(3-16) \qquad c_2 = \frac{y_1 r + y_2 + r \ln \delta pr}{1+r},$$

$$(3-17) \qquad \overline{V} = -\delta\,[p(1+r)e^{-c2} + (1-p)]$$

$$= -\delta\left[p(1+r)(\delta pr)^{-\frac{r}{1+r}}\exp\left(-\frac{y_1 r + y_2}{1+r}\right) + (1-p)\right]$$

を得る。

延命の効果は,

$$\frac{\partial c_1}{\partial p} < 0, \qquad \frac{\partial c_2}{\partial p} > 0,$$

$$\frac{\partial \overline{V}}{\partial p} = -\delta(e^{-c2} - 1) > 0$$

となる。

Ⅳ. 結　　論

以上我々は２期間モデルを使って寿命増大の厚生効果を調べた。その結果は,生命保険－年金が利用可能であると否とにかかわらず,期待寿命の上昇(生存確率の増大）は生涯期待効用を改善するということであった。この結論は常識的には自明のことであるが，効用関数を特定化せず一般的に証明することに成功したことは，不確実性経済学に於ける一歩前進であると考える。

参考文献

Fwu－Ranq Chang. "Uncertain Lifetimes, Retirement and Economic Welfare." *Economica* 58, no. 230 (May 1991) : 215－32.

加藤睦洋.「不確実性下の消費者選択の理論 ―― 2期間分析の展望と解説 ――」. 商学討究35, no. 1 (1984年7月) : 55－85.

――― .「寿命不確実性下の消費者行動について (II)」. 商学討究44, no. 1－2 (1993年10月) : 181－92.

Katz, Eliakim. "A Note on Uncertain Lifetimes." *J. P. E.* 87, no. 1 (February 1979) : 193－95.

Pelzman, Joseph and Rousslang, Don. "A Note on Uncertain Lifetimes : A Comment." *J. P. E.* 90, no. 1 (Februay 1982) : 181－83.