高階古典論理の形式的体系の試作 I

兼 岩 龍 二

1．高階古典論理を我々は

対象領域	D（空でない集合）
真理値の集合	T＝{ϒ（true），⅄（false）}
オペレータ	μ（集合 A から集合 B への関数全体を $BA\mu$ で表す）

の3者の組み合わせで生ずる集合の上の算術とみなすことから始める。例えば TTμ は1変数真理関数全体からなる集合を表すので

$$\mathrm{TT}\mu = \{[\mathrm{p} \mid \mathrm{p}]\ (\text{恒等関数}),\ \neg\ (\text{not}),\ [\mathrm{p} \mid \Upsilon]\ (\Upsilon\text{の値をとる定値関数}),\ [\mathrm{p} \mid \perp]\ (\perp\text{の値をとる定値関数})\}$$

となる。ここで注釈が必要であろう。まず A から B への関数とは $A \times B$ の部分集合 f が「各々の $x \in A$ に対して，それぞれただ1つずつ

$$(x,\ y) \in f$$

となる y が存在する」という条件を満たすとき，この集合 f のことをいう。即ち通常，写像のグラフと呼んでいるものを我々は関数と呼ぶのである。従って関数そのものが全射かどうかというのは意味がない。また変域の指定された変数 x と x の式 $F(\mathrm{x})$ を用いて，$[\mathrm{x} \mid F(\mathrm{x})]$ で a に対して $F(a)$ を対応させる関数を表す。即ち変数 x の変域指定が A のとき

$$[\mathrm{x} \mid F(\mathrm{x})] = \{(a,\ F(a))\ ;\ a \in A\}$$

である。上記において変数 p の変域指定は T である。

他の例を見てみよう，TTμTμ は T から TTμ への関数全体であるから，これは2変数真理関数全体とみなすことができる。∨（either），∧（both），

$\Rightarrow$ (if) はこの集合の元でこれらをいれて $TT\mu T\mu$ には全部で16個の要素がある。α の関数 f による像を $f\alpha$ と書けば，$\vee$，$\wedge$，$\Rightarrow$ は

$$\vee\Upsilon = [p \mid \Upsilon], \qquad \vee\curlywedge = [p \mid p],$$
$$\wedge\Upsilon = [p \mid p], \qquad \wedge\curlywedge = [p \mid \curlywedge],$$
$$\Rightarrow\Upsilon = [p \mid p], \qquad \Rightarrow\curlywedge = [p \mid \Upsilon]$$

で特徴づけられる。ここに = はメタ理論(metathoery)としての等号である。メタ理論を，本稿においては普通の数学で展開する。

さらに1階1変数述語全体は $TD\mu$，1階2変数述語全体は $TD\mu D\mu$，1階3変数述語全体は $TD\mu D\mu D\mu$，2階の $TD\mu$ を対象領域とする1変数述語全体は $TTD\mu\mu$ となる。$\forall$ (全称記号)，$\exists$ (存在記号) は $TTD\mu\mu$ の元と考えることができる。そのようにすれば，通常 $\exists x \quad x > y$ と書かれるものは $\exists\ [x \mid > xy]$ と書かれることになる。ここに変数 x，y の変域指定は D，> は $TD\mu D\mu$ の元と考えている。従って順に

1. $>$ $\qquad\qquad \in TD\mu D\mu$,
2. $>x$ $\qquad\quad \in TD\mu$,
3. $>xy$ $\qquad \in T$,
4. $[x \mid >xy]$ $\in TD\mu$,
5. $\exists[x \mid >xy] \in T$

となる。$\forall$，$\exists$ は

$$\forall P = \Upsilon \text{ iff } P = [x \mid \Upsilon],$$
$$\exists P = \curlywedge \text{ iff } P = [x \mid \curlywedge]$$

で特徴づけられる。ここに変数 P の変域指定は $TD\mu$，変数 x の変域指定は D である。

我々は

$$D,\ T \in \mathfrak{A}, \qquad A,\ B \in \mathfrak{A} \text{ implies } BA\mu \in \mathfrak{A}$$

となる最小の集合 $\mathfrak{A}$ を D 上の論理集合と呼び，Log(D) で表すことにする。

文字 μ，D，T からなる文字列が Log(D) の元を表すための条件を求めてみよう。$\mathfrak{U} = \{\mu,\ D,\ T\}$ の元で生成される自由半群を $\mathfrak{L}$ (ここで μ は D,

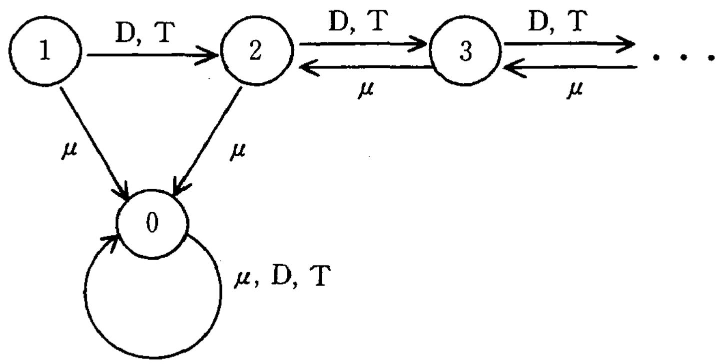

図 1

T 以外の適当な元と考えておく)，$\mathfrak{St}$ を

$$\mathfrak{St} = \{0,\ 1,\ 2,\cdot\cdot\cdot\}$$

とする。そこで $u \in \mathfrak{U}$，$s \in \mathfrak{St}$ に対して

$$\begin{aligned}\varphi(u,\ s) &= s + 1,\ \text{if } u \in \{\mathrm{D},\ \mathrm{T}\} \text{ and } s \geqq 1\,;\\ &= s - 1,\ \text{if } u = \mu \text{ and } s \geqq 3\,;\\ &= 0 \quad\ ,\ \text{otherwise}\end{aligned}$$

として $\mathfrak{U} \times \mathfrak{St}$ から $\mathfrak{St}$ への関数 φ を定義する。さらに関数 $\varphi(u,\ s)$ を基にして，帰納的に $\mathfrak{L} \times \mathfrak{St}$ から $\mathfrak{St}$ への関数 ψ を

$$\psi(\mathrm{E},\ s) = s,$$

$$\psi(Xu,\ s) = \varphi(u,\ \psi(X,\ s))$$

で定める。ここに E は $\mathfrak{L}$ の単位元，$X \in \mathfrak{L}$，$u \in \mathfrak{U}$，$s \in \mathfrak{St}$ である。このとき $X \in \mathfrak{L} \diagdown \{\mathrm{E}\}$ が Log(D) の元を表すための条件は

$$\psi(X,\ 1) = 2$$

である。$\psi(X,\ 1) \geqq 1$ なら $Y \in \mathfrak{L}$ が存在して XY は Log(D) の元を表す。$\psi(X,\ 1) = 0$ なら，このような Y は存在しない。

証明は $X \in \mathfrak{L} \diagdown \{\mathrm{E}\}$ の長さに関する帰納法で得られる。X の長さとは

$$X = u_1 u_2 \cdot\cdot\cdot u_n \quad (u_1,\ u_2,\cdot\cdot\cdot,\ u_n \in \mathfrak{U})$$

となる n のことである。

A，A'，B，B' が空でない集合で組 $(A,\ B)$ と $(A',\ B')$ が異なれば $BA\mu$ と $B'A'\mu$ は集合として異なるので

$$\{X \in \mathfrak{L}\,;\,\psi(X,\ 1) = 2\}$$

の異なる元はLog(D) の異なる元を表すことになる。従って

$$\mathrm{Log(D)} = \{X \in \mathfrak{L}\,;\,\psi(X,\ 1) = 2\} \subset \mathfrak{L}$$

と考えてよい。そのわけは，半群 $\mathfrak{L}$ の元でLog(D) の元に対応するものをLog(D) の元で置き換えた $\mathfrak{L}$ に対等な集合 $\mathfrak{L}'$ に $\mathfrak{L}$ と同型な半群構造を与え $\mathfrak{L}$ の代わりに考えることにより実現できるということによる。なおこれらのことはD＝T の場合にも当てはまるように議論を進めてきた。D＝T のときは $\mathfrak{U}$ が2元集合，従って $\mathfrak{L}$ が2元生成となるのである。

前に α の関数 f による像を $f\alpha$ と書いたが，これを我々はもう少し拡張して f と α の積のように思いたい。例をみることにしよう。

$$\mathrm{D} = \{0,\ 1,\ 2,\ \cdot\ \cdot\ \cdot\}$$

のとき c＞a＋b をポーランド記法で書けば＞c＋ab となる。

$$> \in \mathrm{TD}\mu\mathrm{D}\mu,\ \ + \in \mathrm{DD}\mu\mathrm{D}\mu$$

と考えられる。変数a，b，c の変域指定はDである。我々は意味として，

1．＞ $\in \mathrm{TD}\mu\mathrm{D}\mu$，c $\in$ D，
2．＞c $\in \mathrm{TD}\mu$，＋ $\in \mathrm{DD}\mu\mathrm{D}\mu$，
3．＞c＋ $\in \mathrm{TD}\mu\mathrm{D}\mu$，a $\in$ D，
4．＞c＋a $\in \mathrm{TD}\mu$，b $\in$ D，
5．＞c＋ab $\in$ T

と思うことができる。この例で2．から3．へのステップを除けば，例えば4．から5．へのステップで＞c＋a を f，b を α と思うことにより，＞c＋ab が f による α の像 $f\alpha$ となるように，すべて前の定義で説明できるが，2．から3．へのステップはそうはいかない。これを説明できるようにするため，少し準備しよう。

$A \in$ Log(D) に対して A の特定の元を表すために，我々は定数記号（constant）を用いる。既出のものでいえば，

$$\curlyvee,\ \perp,\ \neg,\ \vee,\ \wedge,\ \Rightarrow,\ \forall,\ \exists,\ >,\ +$$

がそうである。これに対して，A の不特定の元を表すために，変数記号（variable)を用いる。各変数記号はあらかじめ変域指定されているものとする。定数記号，変数記号は使われるときには品詞（Wortart (G)，wordclass）が決まっている。定数記号については，それが属しているとされる Log(D)の元，変数記号については，変域指定された Log(D) の元が品詞となる。定数（記号），変数（記号）および［変数｜句］の形のものを語（word）と呼ぶことにする。句は一定の文法に従った語の列である。語には Log(D) の元が品詞として決まっているものとする。t を語の列，α を語とする。また t の品詞が定められている状態を考える。t の品詞は Log(D) $\cup\{$E，$\mu\}$の元が想定されている。

まず語の列としての空列の品詞は E であるとする。

次に語列（word sequence）t の品詞が E で語 α の品詞が $A \in$ Log(D) のとき語列 $t\alpha$ の品詞は A であるとする。$t\alpha$ の意味は勿論，語列 t の後に語 α を継ぎ足した語列を意味する。

次に語列 t の品詞が $BA\mu$ (A，$B \in$ Log(D)) の形で語 α の品詞が AC ($C \in \mathfrak{L}$) の形に書けるとき $t\alpha$ の品詞を BC とする。このとき

$$\psi(A,\ 1) = \psi(AC,\ 1) = 2$$

より $\psi(C,\ 2) = 2$，また $\psi(B,\ 1) = 2$ であるから，

$$\psi(BC,\ 1) = 2$$

即ち BC は Log(D) の元である。このことの意味は次のようになる。C は $\psi(C,\ 2) = 2$ より，

$$C = C_r\mu\cdot\cdot\cdot C_2\mu C_1\mu\ (C_1,\ \cdot\cdot\cdot,\ C_r \in \mathrm{Log(D)},\ r \geqq 0)$$

と書けるから（図 1 参照），α は品詞が C_1，・・・，C_r であるような r 個の語 β_1，・・・，β_r を順に α の右に置くことにより，品詞が A になる。即ち α は A の元を値とする r 変数の関数としてのはたらきがある。t は A から B への関数とみれるので，$t\alpha$ はその合成関数と見なせる。特に $C =$ E の場合は前の定義と一致する。即ち $t\alpha$ は関数 t による α の像とみなせる。

最後に t と α が上記組み合わせ以外の品詞をとるとき $t\alpha$ の品詞は μ であるとする。

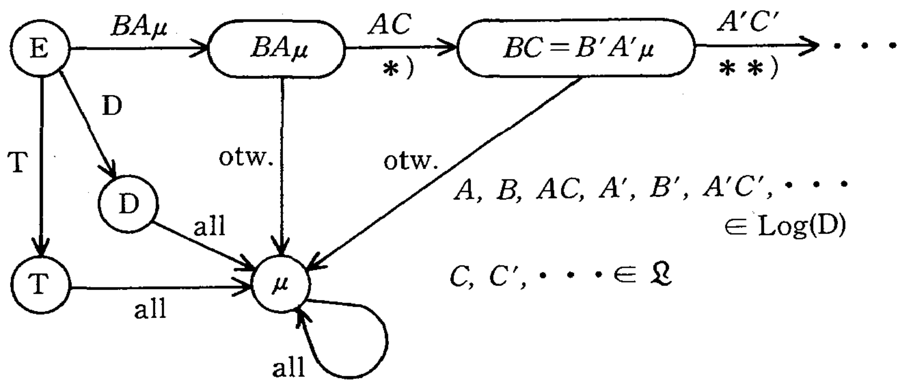

図 2

以上で語列の品詞が帰納的に決まる。語列はその品詞が Log(D) の元であるとき，句（phrase）と呼ばれる。句は品詞が D であるとき名詞句（noun phrase, substantive），T であるとき文 (sentence) と呼ばれる。また品詞の冒頭が D であるとき指名語（designate），T であるとき述語（predicate）であるという。名詞句は指名語の一種，文は述語の一種である。

ここで［変数｜句］の形の語の品詞を定めておこう。変数 v の品詞を A，句 t の品詞を B とするとき，[v｜t]の品詞を $BA\mu$ とするのである。この形の語を合成語（synthesis）と呼び，このとき t を合成語の語幹（stem），v を接頭変数（prefixed variable）と呼ぶことにする。

前に品詞の文法(μ 以外の品詞が T, D, μ をどのように並べて作られるか)をみたとき，ψ という関数を導入したが，これと同様に，今度は語列の文法をみるために関数 ψ_1 を導入しよう。品詞が A であるような語列 t_0 の右に語列 t を置いたときの語列 t_0t の品詞を $\psi_1(t,\ A)$ で表し，語列 t の A に対する相対品詞 (relative wordclass) と呼ぶことにしよう。勿論，A に対する相対品詞は，品詞が A でありさえすれば語列 t_0 のとり方によらない。

まず任意の語列 t に対して $\psi_1(t,\ A) \in \mathrm{Log(D)}$ となる品詞 A が存在することがわかる。なぜなら，t が語 $\alpha_1, \cdots, \alpha_r$ の列

---

*）BC ＝ D または T の場合，この矢線はⒹまたはⓉに入る。
**）$B'C'$ ＝ D または T の場合，この矢線はⒹまたはⓉに入る。

$$t = \alpha_1 \cdot\cdot\cdot \alpha_r$$

であるとき，C_1，・・・，C_r を各々 α_1，・・・，α_r の品詞，t_0 を品詞が

$$A = BC_r\mu \cdot\cdot\cdot C_1\mu \quad (B \in \mathrm{Log}(\mathrm{D}))$$

であるような句とすれば，

$$\psi_1(t_0 t,\ \mathrm{E}) = \psi_1(t,\ A) = B \in \mathrm{Log}(\mathrm{D})$$

となるからである。

このように絶対品詞（E に対する相対品詞，即ち品詞）が μ であるような語列も無意味というわけではない。今の場合 t_0 の右に t を置くことにより，品詞が B となるから t には $BC_r\mu \cdot\cdot\cdot C_1\mu$ から B への関数としての働きがある。即ち t は t_0 の右に置かれるとき，「働き」としては

$$BBC_r\mu \cdot\cdot\cdot C_1\mu\mu$$

の元のように振舞う。

このような，語列 t の「働き」の型は B を度外視しても一意的には定まらない。例をみよう。

$$t = \forall \mathrm{Px}$$

とする。ここに $\forall$ は品詞 $\mathrm{TTD}\mu\mu$ の定数，P は品詞 $\mathrm{TD}\mu$ の変数，x は品詞 D の変数である。$B \in \mathrm{Log}(\mathrm{D})$ とすれば，t はそれぞれ

1．$A_1 = B\mathrm{D}\mu\mathrm{TD}\mu\mu\mathrm{TTD}\mu\mu\mu$，

2．$A_2 = B\mathrm{T}\mu\mathrm{TTD}\mu\mu\mu$，

3．$A_3 = B\mathrm{D}\mu\mathrm{T}\mu$

に対して相対品詞が B となる。t_1，t_2，t_3 をそれぞれの品詞が A_1，A_2，A_3 であるような句とすれば，t_1，t_2，t_3 の右に t を置く「働き」の型はそれぞれ

1．$BB\mathrm{D}\mu\mathrm{TD}\mu\mu\mathrm{TTD}\mu\mu\mu\mu$，

2．$BB\mathrm{T}\mu\mathrm{TTD}\mu\mu\mu\mu$，

3．$BB\mathrm{D}\mu\mathrm{T}\mu\mu$

となる。

A を $\mathrm{Log}(\mathrm{D})$ の元，t を品詞 A の句で語の列 $\alpha_1 \cdot\cdot\cdot \alpha_r$ で出来ているものとしよう，いますべての $q < r$ に対して，

$$\psi_1(\alpha_1 \cdot \cdot \cdot \alpha_q,\ \mathrm{E}) = AC_q(\mathrm{E} \neq C_q \in \mathfrak{L})$$

となっているとき，t は純正(pure)であるという。純正な句，指名語，述語はそれぞれ純正句，純正指名語，純正述語と呼ばれる。語，名詞句，文は純正句である。

定理 1.1. A，AC，B を Log(D) の元 ($C \in \mathfrak{L}$)，t を品詞 AC の純正句とする。このとき t の $BA\mu$ に対する相対品詞は BC である。

証明. 語列 $t = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ を品詞 AC の純正句とすれば，$q < r$ に対して，

$$\psi_1(\alpha_1 \cdot \cdot \cdot \alpha_q,\ \mathrm{E}) = ACC_q(\mathrm{E} \neq C_q \in \mathfrak{L})$$

と置ける。このとき C_{q-1} は

$$C_{q-1} = H_k\mu \cdot \cdot \cdot H_2\mu H_1\mu\,(H_1, \cdot \cdot \cdot, H_k \in \mathrm{Log(D)},\ k \geqq 1)$$

の形だから，$C_{q-1} = GH\mu\,(H \in \mathrm{Log(D)},\ G \in \mathfrak{L})$ と置けば，

$$ACC_{q-1} = ACGH\mu\,(ACG \in \mathrm{Log(D)})$$

となり α_q は $HJ\,(J \in \mathfrak{L})$ の形の品詞をもたなければならない。このとき $C_q = GJ$ である。従って，s を品詞 $BA\mu$ の句とするとき

$$\psi_1(s\alpha_1 \cdot \cdot \cdot \alpha_{q-1},\ \mathrm{E}) = BCC_{q-1}$$

を仮定すれば，$BCC_{q-1} = BCGH\mu$ であるから

$$\psi_1(s\alpha_1 \cdot \cdot \cdot \alpha_q,\ E) = BCGJ = BCC_q$$

を得ることができる。$\psi_1(s\alpha_1,\ E) = BCC_1$ は見易いので，結局

$$\psi_1(s\alpha_1 \cdot \cdot \cdot \alpha_{r-1},\ E) = BCC_{r-1}$$

が得られる。また $\psi_1(t,\ \mathrm{E}) = AC$ であるから，

$$C_{r-1} = K\mu\,(K \in \mathrm{Log(D)}),$$

$$\psi_1(\alpha_r,\ \mathrm{E}) = K$$

とならねばならない。よって

$$\psi_1(t,\ BA\mu) = \psi_1(st,\ \mathrm{E}) = BC$$

となる。証明終り。

この定理は「純正句は文法上，語のように振舞う」ということを意味して

いる。即ち t が純正句ならば，任意の句 s にたいして，

(＊) for all $\alpha \in$ Word,

$$\psi_1(\alpha,\ \mathrm{E}) = \psi_1(t,\ \mathrm{E}) \text{ implies } \psi_1(s\alpha,\ \mathrm{E}) = \psi_1(st,\ \mathrm{E})$$

が成り立つ。ここに Word は語全体からなる集合を表す。しかし

定理 1.2. t が純正でない句の場合は (＊) が成立しない句 s が存在する。

これを示しておこう。$t = \alpha_1 \cdots \alpha_r$ が品詞 A の純正でない句のときは，ある $q < r$ に対して

$$\text{for some } C_1 \in \mathfrak{L} \setminus \{\mathrm{E}\},\ \psi_1(\alpha_1,\ \mathrm{E}) = AC_1\ ;$$

$$\cdots\cdots\cdots ;$$

$$\text{for some } C_{q-1} \in \mathfrak{L} \setminus \{\mathrm{E}\},\ \psi_1(\alpha_1 \cdots \alpha_{q-1},\ \mathrm{E}) = AC_{q-1}\ ;$$

$$\text{for all } C \in \mathfrak{L} \setminus \{\mathrm{E}\},\ \psi_1(\alpha_1 \cdots \alpha_q,\ \mathrm{E}) \neq AC$$

となる。このとき $C_{q-1} = K\mu\,(K \in \mathrm{Log}(\mathrm{D}))$，$\psi_1(\alpha_q,\ \mathrm{E}) = K$

と置ける。さもなくば

$$\text{for some } C \in \mathfrak{L} \setminus \{\mathrm{E}\},\ \psi_1(\alpha_1 \cdots \alpha_q,\ \mathrm{E}) = AC$$

となってしまうからである。そこで前述の定理の証明と同様にして

$$\psi_1(\alpha_1 \cdots \alpha_{q-1},\ \mathrm{T}A\mu) = \mathrm{T}C_{q-1} = \mathrm{T}K\mu$$

が得られるので，

$$\psi_1(\alpha_1 \cdots \alpha_q,\ \mathrm{T}A\mu) = \mathrm{T}.$$

したがって $\psi_1(t,\ \mathrm{T}A\mu) = \mu$. α を品詞 A の語，s を品詞 $\mathrm{T}A\mu$ の句とすれば $\psi_1(s\alpha,\ \mathrm{E}) = \mathrm{T}$ であるが $\psi_1(st,\ \mathrm{E}) = \mu$ となる。これで (＊) が成立しない句 s の存在が示された。

2. 形式的体系. 前節では意味を考えながら高階古典論理の形式を模索してきたが，ここでは [,] の 2 つの記号の列を考える。即ち {[,]} で生成される自由半群 $\mathfrak{N}$ の元をあつかう。まず，

$$| = [\,],\ \mu = [[\,]],\ \mathrm{T} = [[[\,]]],\ \mathrm{D} = [[\,][\,]]$$

とする。｜は区切り記号（terminator）として，μ，T，D は前節の $\mathfrak{U}$ の元として扱うが，もはやその意味は前面に出さないことにする。ここでは $\mathfrak{L}$ は $\mathfrak{U}=\{\mu, \mathrm{T}, \mathrm{D}\}$ で生成される $\mathfrak{N}$ の部分半群*) である。即ち $\mathfrak{L}=\langle\mathfrak{U}\rangle$.

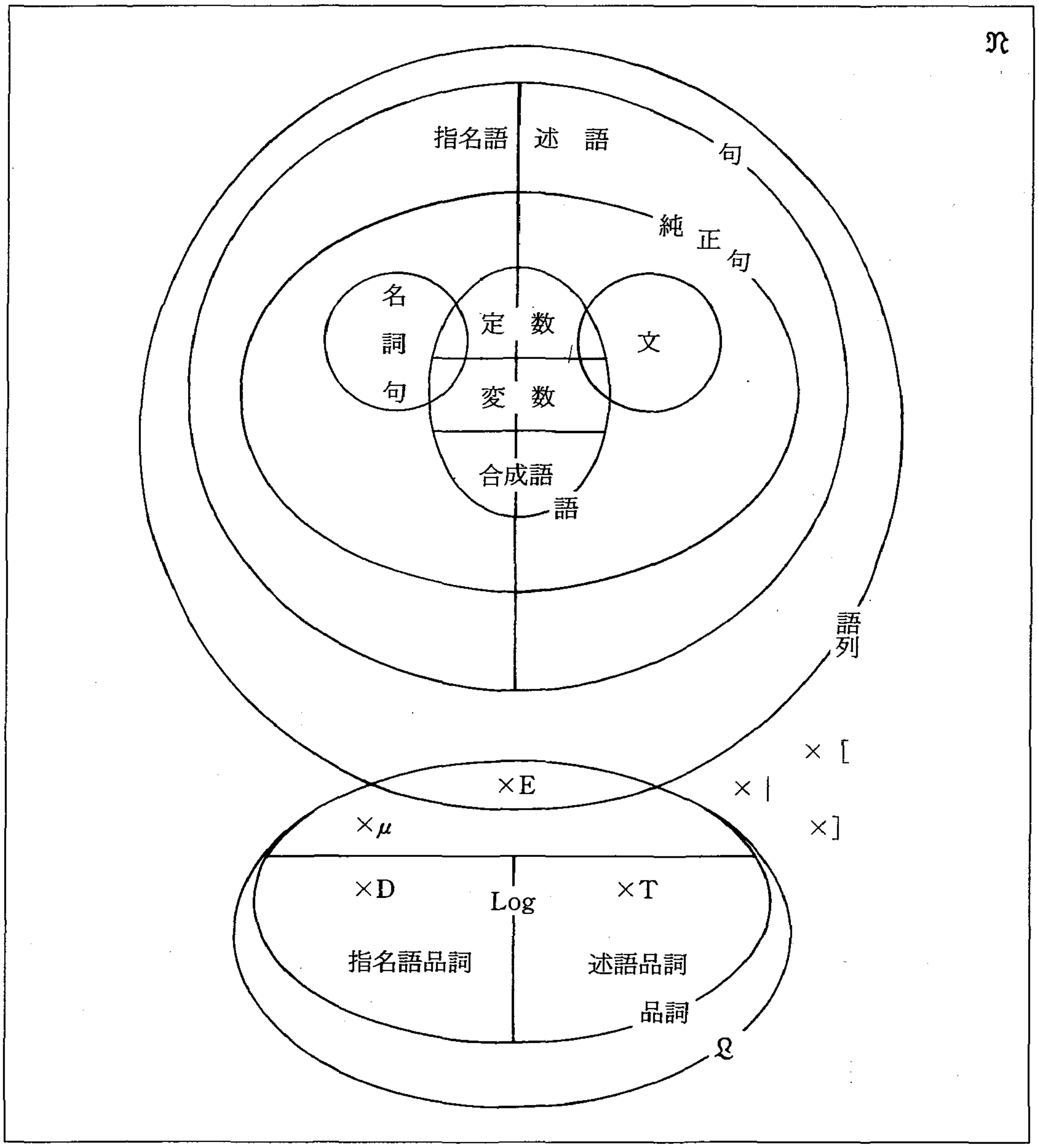

図 3

*）本稿では単位元をもつ半群を単に半群と呼ぶ。

前節で Log(D) と書いたものを，以降 Log と書くことにする。即ち

$$\mathrm{Log} = \{X \in \mathfrak{L}\ ;\ \psi(X,\ 1) = 2\}.$$

定数とは，ここでは

$$[A \mid B]\quad (A \in \mathrm{Log},\ B \in \mathfrak{L})$$

の形の $\mathfrak{N}$ の元で，A でその品詞を表し，B はコードとして使うことにする。即ち，定数全体を Const で表せば，

$$\mathrm{Const} = \{[A \mid B]\ ;\ A \in \mathrm{Log},\ B \in \mathfrak{L}\}.$$

変数も同様で，

$$\mathrm{Var} = \{[\ \mid A \mid B]\ ;\ A \in \mathrm{Log},\ B \in \mathfrak{L}\}$$

として Var の元を変数と呼ぶ。以下 Syn（合成語全体），Word（語全体），Wdsq（語列全体），wcf（品詞関数）：$\mathfrak{N} \to \mathfrak{N}$，Phr（句全体）が次のようにして帰納的に定まる：

$$\mathrm{Syn} = \{[\mathrm{x} \mid s]\ ;\ \mathrm{x} \in \mathrm{Var},\ s \in \mathrm{Phr}\}\ ;$$

$$\mathrm{Word} = \mathrm{Const} \cup \mathrm{Var} \cup \mathrm{Syn}\ ;$$

$$\mathrm{Wdsq} = \langle \mathrm{Word} \rangle\ ;$$

$$\text{if } A \in \mathrm{Log} \text{ and } B \in \mathfrak{L},\ \mathrm{wcf}\ ([A \mid B]) = A\ ;$$

$$\text{if } A \in \mathrm{Log} \text{ and } B \in \mathfrak{L},\ \mathrm{wcf}\ ([\ \mid A \mid B]) = A\ ;$$

$$\text{if } \mathrm{x} \in \mathrm{Var} \text{ and } s \in \mathrm{Phr},\ \mathrm{wcf}([\mathrm{x} \mid s]) = \mathrm{wcf}(s)\ \mathrm{wcf}(\mathrm{x})\ \mu\ ;$$

$$\text{if not } J \in \mathrm{Wdsq},\quad \mathrm{wcf}(J) = \mu\ ;$$

$$\mathrm{wcf}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}\ ;$$

$$\begin{aligned} &\text{if } s \in \mathrm{Wdsq} \setminus \{\mathrm{E}\} \text{ and } \alpha \in \mathrm{Word},\\ &\qquad \mathrm{wcf}(s\alpha) = AC,\ \text{if for some } A,\ B \in \mathrm{Log} \text{ and } C \in \mathfrak{L},\\ &\qquad\qquad\qquad\qquad \mathrm{wcf}(s) = AB\mu \text{ and } \mathrm{wcf}(\alpha) = BC \in \mathrm{Log}\ ;\\ &\qquad\qquad\quad = \mu,\quad \text{otherwise}\ ; \end{aligned}$$

$$\mathrm{Phr} = \{s \in \mathfrak{N}\ ;\ \mathrm{wcf}(s) \in \mathrm{Log}\}.$$

関数 wcf は前節で出てきた $s \in \mathrm{Wdsq}$ の関数 $\psi_1(s, \mathrm{E})$ の定義域を $\mathfrak{N}$ に拡張したものに他ならない。前節の言い方をすれば $\mathrm{wcf} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ である。

$X \in \mathfrak{L}$ の関数 $\psi(X,\ 1)$ についても同様な扱いができる。

$$[\ =1,\quad]=2$$

とし，$\mathfrak{N}$の元即ち[，]の列を数字1，2による2進法展開とみる。特に空列Eについては，これを0とみる。従って，右辺では通常の10進法を使うことにすれば，

$$\mathrm{E}=0,\ [\ =1,\ ]=2,\ [[\ =3,\ [\,]=4,\ ][\ =5,\ ]]=6,$$
$$[[[\ =7,\ [[\,]=8,\cdots$$

となる。このようにして，$\mathfrak{N}$と$\mathfrak{St}=\{0,1,2,\cdots\}$を同一視した上で，関数$\psi(X,1)$の定義域を$\mathfrak{L}$から$\mathfrak{N}$に拡張し，not $X\in\mathfrak{L}$のときは，値をE＝0としたものを，trnと記せば，$\mathrm{trn}\in\mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$,

$$\mathrm{Log}=\{X\in\mathfrak{N}\,;\,\mathrm{trn}(X)=\,]\}$$

となる。

2.1. 推論. 文全体をSentとすれば

$$\mathrm{Sent}=\{\sigma\in\mathfrak{N}\,;\,\mathrm{wcf}(\sigma)=\mathrm{T}\}$$

である。Stsq＝〈Sent〉とし，Stsqの元を文列と呼ぶことにする。今，文列Γ，Δに対して

$$\Gamma=\Gamma_1\cdots\Gamma_r,$$
$$\Delta=\Delta_1\,\Gamma_1\,\Delta_2\,\Gamma_2\cdots\Delta_r\,\Gamma_r\,\Delta_{r+1}$$

となるような

$$\Gamma_1,\cdots,\Gamma_r,\ \Delta_1,\cdots,\Delta_{r+1}\in\mathrm{Stsq}$$

があるとき，ΓをΔの部分文列と呼ぶ。空列は任意の文列の部分文列である。また文列Γは文列Γの部分文列である。部分文列が文のとき，我々はこれを部分文と呼ぶことにする。

次に

文［文列］文・・・［文列］文

の形，即ち

$$\tau[\Gamma_1]\sigma_1\cdots[\Gamma_r]\sigma_r$$
$$(\Gamma_1,\cdots,\Gamma_r\in\mathrm{Stsq},\ \sigma_1,\cdots,\sigma_r,\ \tau\in\mathrm{Sent})$$

の形の $\mathfrak{N}$ の元を我々は推論 (inference) と呼ぶ。これは次のように「解釈できる」ことを前提としてデザインされている：

「Γ_1 の部分文たちを仮定すると文 σ_1 が得られ,

・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・・,

Γ_r の部分文たちを仮定すると文 σ_r が得られるならば；

それらから文 τ が推論できる」。

文列 Γ_1, ・・・, Γ_r は空（= E）であることが許され, $r = 0$ であることも許されている。$\Gamma_q = \mathrm{E}$ の場合, $[\Gamma_q]\ \sigma_q$ の部分は $[\,]\ \sigma_q$ と書いても, $[\,] = |$ だから $|\ \sigma_q$ と書いても同じことである。modus ponens という推論は

$$\tau \mid \sigma \mid\Rightarrow \sigma\tau \quad (\sigma,\ \tau \in \mathrm{Sent})$$

と書くことができる。$r = 0$ の場合, 推論は文となるが, 文 τ の推論としての解釈は

「前提無しに文 τ が推論できる」

である。

2.2. 推論の 3 変形・演繹図. まず推論の 3 種類の変形, 合成推論・部分推論・消去推論について説明する。

I) **合成推論.** 2 つの推論

$$\iota = \tau_q\ [\Gamma_1]\ \sigma_1 \cdots [\Gamma_r]\ \sigma_r,$$

$$\kappa = \upsilon\ [\Delta_1]\ \tau_1 \cdots [\Delta_q]\ \tau_q \cdots [\Delta_s]\ \tau_s$$

があるとき,

$$\lambda = \upsilon\ [\Delta_1]\ \tau_1 \cdots [\Delta_q \Gamma_1]\ \sigma_1 \cdots [\Delta_q \Gamma_r]\ \sigma_r \cdots [\Delta_s]\ \tau_s$$

とする。このとき λ は ι を上部, κ を下部とする ι と κ の合成推論であるという。また文 τ_q は合成の key と呼ばれる。

$\Delta_q = \mathrm{E}$ のとき,「推論 ι, κ が正しければ, 推論 λ も正しい」ことを認めるのに異存はないであろう。$\Delta_q = \mathrm{E}$ でないときを考える。このとき, ι によれば τ_q を推論するのに, 前提としては

「Γ_1（Γ_1 の部分文たち）を仮定すると σ_1」,

$\cdots\cdots\cdots$,「Γ_r を仮定すると σ_r」

しか要らない。ところが κ の前提の１つとして τ_q を導くのに Δ_q を仮定してよいのだから,「$\sigma_1\cdots\sigma_r$ を導くのに Δ_q も仮定してよい」というのが合成推論を定義する理由である。

II）**部分推論.** $\varDelta_1, \cdots, \varDelta_r$ がそれぞれ $\Gamma_1, \cdots, \Gamma_r$ の部分文列であるとき,

$$\kappa = \tau\ [\varDelta_1]\ \sigma_1\cdots[\varDelta_r]\ \sigma_r$$

を

$$\iota = \tau\ [\Gamma_1]\ \sigma_1\cdots[\Gamma_r]\ \sigma_r$$

の部分推論という。「推論 ι が正しければ，推論 κ も正しい」ことは，もともと ι において「σ_q を導くとき，Γ_q のすべての部分文を使わなくてもよい」ことから，承認されなければならない。

III）**消去推論.** σ_q が Γ_q の部分文であるとき,

$$\kappa = \tau[\Gamma_1]\sigma_1\cdots[\Gamma_{q-1}]\sigma_{q-1}[\Gamma_{q+1}]\sigma_{q+1}\cdots[\Gamma_r]\sigma_r$$

を

$$\iota = \tau[\Gamma_1]\ \sigma_1\cdots[\Gamma_r]\ \sigma_r$$

の消去推論という。「推論 ι が正しければ，推論 κ も正しい」ことは，ι において $[\Gamma_q]\ \sigma_q$ の部分が「自明な前提」となっていることから，認めざるを得ないであろう。また，推論 ι から消去を繰り返して得られる推論も ι の消去推論と呼ぶことにしよう。

少し例をみることにする。

$$\iota(\sigma,\ \tau,\ \upsilon) = \Rightarrow \sigma\upsilon \mid \Rightarrow \sigma\tau \mid \Rightarrow \tau\upsilon \qquad (\sigma,\ \tau,\ \upsilon \in \mathrm{Sent}),$$

《三段論法》

$$\kappa(\sigma,\ \tau) = \Rightarrow \sigma\tau\ [\sigma]\tau \qquad (\sigma,\ \tau \in \mathrm{Sent}),$$

《⇒導入》

$$\lambda(\sigma) = \sigma \mid \Rightarrow \Upsilon\ \sigma \qquad\qquad (\sigma \in \mathrm{Sent})$$

《Υ除去》

とする。

$$\lambda(\tau) = \tau \mid \underline{\Rightarrow \Upsilon\ \tau}$$

を下部，

$$\iota(\Upsilon,\ \sigma,\ \tau) = \underline{\Rightarrow \Upsilon\ \tau} \mid \Rightarrow \Upsilon\ \sigma \mid \Rightarrow \sigma\tau$$

を上部として合成推論を作れば，

$$\tau \mid \underline{\underline{\Rightarrow \Upsilon\ \sigma}} \mid \Rightarrow \sigma\tau.$$

この推論の上部に

$$\varkappa(\Upsilon,\ \sigma) = \underline{\underline{\Rightarrow \Upsilon\ \sigma}}[\Upsilon]\sigma$$

を合成すれば，

$$\tau[\Upsilon]\sigma \mid \Rightarrow \sigma\tau.$$

$$\lambda\,\frac{\iota\,\dfrac{\varkappa\,\dfrac{[\Upsilon]\sigma}{\mid\Rightarrow \Upsilon\ \sigma} \mid \Rightarrow \sigma\tau}{\mid\Rightarrow \Upsilon\ \tau}}{\tau}$$

この部分推論をとって

$$\pi(\sigma,\ \tau) = \tau \mid \sigma \mid \Rightarrow \sigma\tau$$

即ち modus ponens が得られた。これを図にすれば右上のようになる。

また $\varkappa$《$\Rightarrow$導入》と π《modus ponens》から

$$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon$$

が次のようにして得られる：

1．$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon]\Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon$
　《$= \varkappa(\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon,\ \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon)$》，

2．$\Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon[\tau]\Rightarrow \sigma\upsilon$　《$= \varkappa(\tau,\ \Rightarrow \sigma\upsilon)$》，

3．$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon\ \ \tau]\Rightarrow \sigma\upsilon$　《1．と 2．の合成》，

4．$\Rightarrow \sigma\upsilon[\sigma]\upsilon$　《$= \varkappa(\sigma,\ \upsilon)$》，

5．$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon\ \ \tau\ \ \sigma]\upsilon$　《3．と 4．の合成》，

6．$\upsilon \mid \tau \mid \Rightarrow \tau\upsilon$　《$= \pi(\tau,\ \upsilon)$》，

$\underline{\qquad}$，$\underline{\underline{\qquad}}$部は key sentence.

7．$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \quad \tau \quad \sigma]\tau[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \quad \tau \quad \sigma]\Rightarrow \tau\upsilon$ 《5．と6．の合成》,

8．$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \quad \tau \quad \sigma]\Rightarrow \tau\upsilon$ 《7．の消去推論》,

9．$\Rightarrow \tau\upsilon \mid \sigma \mid \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon$ 《$=\pi(\sigma,\ \Rightarrow \tau\upsilon)$》,

10．$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \quad \tau \quad \sigma]\sigma[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \quad \tau \quad \sigma]\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon$ 《8．と9．の合成》,

11．$\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon$ 《10．の消去推論》.

図にすると，右下のようになる。図式の中で極上部にある文は左隣りか文の位置より下部の［　］内に同文があるとき消去できる。このような図を演繹図あるいは証明図という。

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{\cfrac{\overset{\text{消去}}{|\tau} \qquad \cfrac{\overset{\text{消去}}{|\sigma} \quad \overset{\text{消去}}{|\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon}}{|\Rightarrow \tau\upsilon}\ \pi}{[\sigma]\ \upsilon}\ \pi}{[\tau] \Rightarrow \sigma\upsilon}\ \kappa}{[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon] \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon}\ \kappa}{\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\upsilon \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\upsilon}\ \kappa$$

ここで演繹図とは何かを定義しておこう。1）推論

$\tau[\Gamma_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Gamma_r]\sigma_r$

があるとき，これに対応する図式

$$\frac{[\Gamma_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Gamma_r]\sigma_r}{\tau}$$

は演繹図である。$[\Gamma_1]\sigma_1, \cdots, [\Gamma_r]\sigma_r$ をこの演繹図の極上部前提という。極上部前提には左から順に順位をつけることができる。2）Λ が演繹図で，Λ の極上部前提を左から順に

$$[\Delta_1]\tau_1, \cdot\cdot\cdot, [\Delta_q]\tau_q, \cdot\cdot\cdot, [\Delta_s]\tau_s$$

とする。このとき推論 $\tau_q[\Gamma_1]\sigma_1\cdots[\Gamma_r]\sigma_r$ があれば，Λ の極上部前提 $[\Delta_q]\tau_q$ の上に図形

$$\frac{[\Gamma_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Gamma_r]\sigma_r}{}$$

をつけ加えてできる図式 Λ' も演繹図である。演繹図 Λ' の極上部前提は左から順に

$[\varDelta_1]\tau_1$, ・・・, $[\varDelta_{q-1}]\tau_{q-1}$, $[\varGamma_1]\sigma_1$, ・・・$[\varGamma_r]\sigma_r$, $[\varDelta_{q+1}]\tau_{q+1}$, ・・・, $[\varDelta_s]\tau_s$

である。3） 1）で与えられる図式を基に 2）を繰り返し適用してできる図式が演繹図である。

演繹図が与えられれば，その演繹図に出てくる推論を次々と合成してできる最終の合成推論 ν が何になるかをみることができる。

$$\nu = v[\varDelta_1]\tau_1 \cdot\cdot\cdot [\varDelta_s]\tau_s$$

とする。演繹図の極上部前提のうち，一番左にあるものを[文列]τ とすれば，$\tau_1 = \tau$ である。$\varDelta_1$ は τ の左隣りか τ の位置より下部の［　］内にでてくる文列を，下にでてくるものから順に並べてできる文列である。$[\varDelta_2]\tau_2$ 以下も同様で，s は演繹図の極上部前提の数となる。v は演繹図の一番下にある文である。合成推論 ν が得られれば，消去推論によって，無駄な前提を省き，必要ならさらにその部分推論をとることもできる。

演繹図を $\mathfrak{N}$ の元として表現することも可能である。例えば，次のようにすればよい。1）まず，演繹図にでてくるすべての前提および最下部の文に，下方優先・左方優先の順位をつけて

$$\dfrac{\alpha_2 \qquad \dfrac{\alpha_4 \qquad \dfrac{\alpha_6 \qquad \overline{\alpha_7}}{\alpha_5} \qquad \alpha_8}{\alpha_3}}{\alpha_1}$$

のようにする。ここに α_1 は文，α_2, ・・・は［文列］文の形の $\mathfrak{N}$ の元（前提，premise と呼ぶ）である。2）上昇記号↑ = T = [[[ ]]] = 70，下降記号↓ = D = [[ ][ ]] = 74 を用いて，

（＊）　　$\alpha_1 \uparrow \alpha_2\alpha_3 \uparrow \alpha_4\alpha_5 \uparrow \alpha_6\alpha_7 \uparrow \downarrow \downarrow \alpha_8 \downarrow \downarrow$

のようにして演繹図を表すのである。

（＊）のような $\mathfrak{N}$ の元を演繹図と呼んでもよい。それでは

$\alpha_1 \in$ Sent,

α_2, ・・・$\alpha_r \in$ Premise = $\{[\varGamma]\sigma\ ;\ \Gamma \in$ Stsq, $\sigma \in$ Sent$\}$

のとき，列 $\alpha_1\alpha_2\cdots\alpha_r$ にどのように記号↑，↓を挟み込んだものが演繹図なのかという問いが残るが，これは前に述べた演繹図の定義と同様に考えればよい。即ち 1）$\alpha_1 \in \mathrm{Sent}$；$\alpha_2, \cdots, \alpha_r \in \mathrm{Premise}$ のとき

$$\Lambda = \alpha_1 \uparrow \alpha_2 \cdots \alpha_r \downarrow$$

は演繹図である。左から順に $\alpha_2, \cdots, \alpha_r$ が Λ の極上部前提である。
2）$\Lambda = A\alpha B\,(A, B \in \mathfrak{N}$；$\alpha \in \mathrm{Premise})$ が演繹図で α が Λ の極上部前提，$\beta_1, \cdots, \beta_s \in \mathrm{Premise}$ のとき，

$$\Lambda' = A\alpha \uparrow \beta_1 \cdots \beta_s \downarrow B$$

も演繹図である。Λ の極上部前提を左から順に

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_q (= \alpha), \cdots, \alpha_r$$

とすれば，Λ の極上部前提は左から順に

$$\alpha_1, \cdots, \alpha_{q-1}, \beta_1, \cdots, \beta_s, \alpha_{q+1}, \cdots, \alpha_r$$

である。3）1）で与えられる演繹図を基に 2）を繰り返し適用して演繹図とされるものが演繹図（deduction map）である。

演繹図は冒頭が文で以下↑，↓と前提の列であるが，この列から冒頭の文および列にでてくるすべての前提たちを除き，↑と↓だけの列 Ξ を作れば，Ξ はいわゆる↑，↓の proper pairing になっている。ここで pairing についてふれておこう。$\mathfrak{N}$ から $\mathfrak{N}$ への関数 trnp が

$$\mathrm{trnp}(\mathrm{E}) = 2 = \,];$$
$$\text{if } X \in \mathfrak{N} \text{ and } \mathrm{trnp}(X) \geqq 2,\ \mathrm{trnp}(X[) = \mathrm{trnp}(X) + 1;$$
$$\text{if } X \in \mathfrak{N} \text{ and } \mathrm{trnp}(X) \geqq 4,\ \mathrm{trnp}(X]) = \mathrm{trnp}(X) - 1;$$
$$\text{if } X \in \mathfrak{N} \text{ and } \mathrm{trnp}(X) \in \{2, 3\},\ \mathrm{trnp}(X]) = \mathrm{trnp}(X) - 2;$$
$$\text{if } X \in \mathfrak{N} \text{ and } \mathrm{trnp}(X) \in \{0, 1\},\ \mathrm{trnp}(X[) = \mathrm{trnp}(X]) = 0$$

で定義されるとき，

$$\mathrm{Pprng} = \{X \in \mathfrak{N} ; \mathrm{trnp}(X) = 1\}$$

の元を（[,] の）proper pairing,

$$\mathrm{Prng} = \langle \mathrm{Pprng} \rangle$$

の元を（[,] の）pairing という。また η が半群 $\mathfrak{N}$ から半群 $\mathfrak{N}$ への単射準同

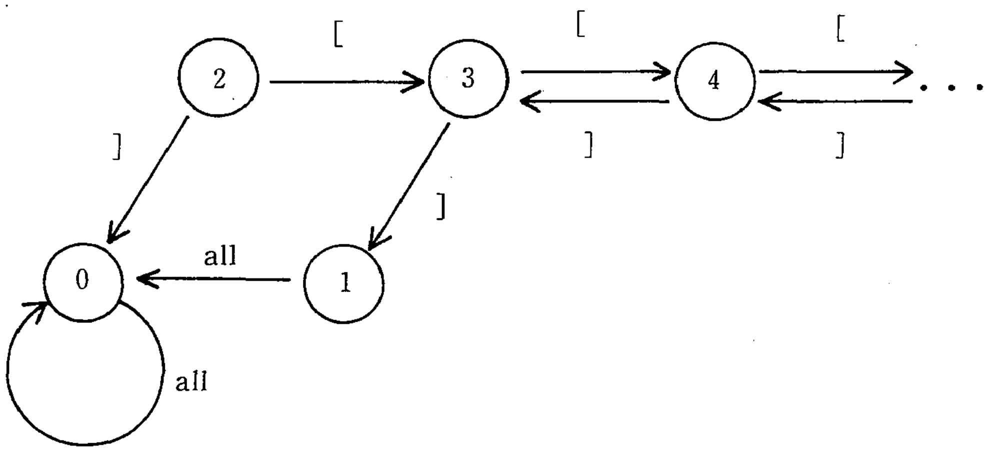

図 4

型のとき，それぞれ

$$\eta(\mathrm{Pprng}),\ \eta(\mathrm{Prng})$$

の元を $\eta([)$，$\eta(])$ の proper pairing，$\eta([)$，$\eta(])$ の pairing という。$\mathfrak{N}\to\mathfrak{N}$ なる準同型 η は組（$\eta([)$，$\eta(])$）で決まるので，

$$\eta = (\eta([)\ ;\ \eta(]))$$

と書くことにする。このとき

定理 2.2.1. $X, Y \in \mathrm{Pprng}, X \neq Y$ ならば $(X\ ;\ Y)$ は単射準同型である。

が成立する（次の定理 2.2.2 の系として得られる）ので，前述の「Ξ はいわゆる↑，↓の proper pairing になっている。」の意味は明瞭であろう。即ち $\Xi \in (\uparrow\ ;\ \downarrow)(\mathrm{Pprng})$ を意味する。このことは演繹図の定義から明らかであろう。逆に $(\uparrow\ ;\ \downarrow)(\mathrm{Pprng})$ の元 Ξ が勝手に与えられたとき，↑と↓の列 Ξ に文，前提を挟み込んで演繹図を作ることが可能なことも，演繹図の定義から了解されるであろう。

すでに読者は｜，μ，$\mathrm{T} = \uparrow$，$\mathrm{D} = \downarrow$ および語が Pprng の元で，語列，文列，前提，推論，演繹図などが Prng の元であることに気付いていることと思うが，このように定義したのは，それらを $\mathfrak{N}$ の元とみたときの読み方の一意性を保証するためで，それは次の定理による。

定理 2.2.2. $X_1, \cdots, X_r, Y_1, \cdots, Y_s \in \mathrm{Pprng}$ に対して
$X_1 \cdots X_r = Y_1 \cdots Y_s$ ならば

$$r = s, \ X_1 = Y_1, \cdots, X_r = Y_r.$$

この定理は「$XY = XZ$ ならば $Y = Z$」と Pprng の定義を用いて r に関する帰納法で得られる(図4参照)。これは pairing を proper pairing の列とみたときの一意性である。同様に文列を文の列とみたときの一意性も成立する(図2参照)。また

$$\mathrm{Radical} = \mathrm{Sent} \cup \mathrm{Premise} \cup \{\uparrow, \downarrow\}$$

とすれば，$\langle\mathrm{Radical}\rangle$ の元を Radical の元の列とみたときの一意性が成立する。推論，演繹図は $\langle\mathrm{Radical}\rangle$ の元であるから，これらを Radical の元の列として読む読み方の一意性が保証される。

話を演繹図にもどそう。演繹図 Λ を Radical の元の列とみて，これから冒頭文(最下部の文)とすべての前提を取り除いて↑，↓だけの列 $\Xi(\Lambda)$ を作れば

$$\Xi(\Lambda) \in (\uparrow ; \downarrow)(\mathrm{Pprng})$$

で，逆に勝手な $(\uparrow ; \downarrow)(\mathrm{Pprng})$ の元 Π をとれば $\Xi(\Lambda) = \Pi$ となる演繹図 Λ が存在することは前にふれたが，Π にどのように文，前提を挟み込めば演繹図となるかということには触れていなかった。これは次の条件を満たすように挟み込めばよいことがわかる。

条件D. $\Lambda = X_1 \cdots X_r$ $(X_1, \cdots, X_r \in \mathrm{Radical})$ のとき
1) $r \geqq 3$, $X_1 \in \mathrm{Sent}$, $X_2 = \uparrow$, $X_r = \downarrow$;
$X_3, \cdots, X_{r-1} \in \mathrm{Premise} \cup \{\uparrow, \downarrow\}$;
2) $X_q = \uparrow$ ならば $X_{q-1} \in \mathrm{Sent} \cup \mathrm{Premise}$.

Λ が演繹図のとき条件Dが満たされることは，定義より明らかである。逆に「$\Lambda \in \langle\mathrm{Radical}\rangle$ が $\Xi(\Lambda) \in (\uparrow ; \downarrow)(\mathrm{Pprng})$ と条件Dを満たせば演繹図

である」ことは，列 Λ に含まれる $\uparrow$ の数に関する帰納法で得られる。

2.3. 語列への定数，変数の関連. 定数，変数を原始語（primitive word）という。語列は文字どうり語の列であるが，合成語の部分を分解して［，変数，｜，句，］に分けることができる。さらに句の部分を語に分け，合成語がその中にでてきたら，また分解する。このような操作を続けると語列は最終的に原始語，［，］，｜の列に分解される。語列 t をこのようにして

$$t = \alpha_1 \cdot\cdot\cdot \alpha_r\,;$$

$$\alpha_1, \cdot\cdot\cdot, \alpha_r \in \{\,[\,,\ ]\,, |\} \cup \mathrm{Const} \cup \mathrm{Var}$$

と分解したものを語列 t の原始語分解と呼ぶ。

今，2つの関数 change, $\mathrm{xi} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を定義しておく。即ち

$$\begin{aligned}\mathrm{change}(X) &= |\,,\ \text{if } X = [\,;\\ &= \uparrow,\ \text{if } X = |\,;\\ &= \downarrow,\ \text{if } X =]\,;\\ &= X,\ \text{otherwise},\end{aligned}$$

if not $X \in \mathrm{Prng}$, $\mathrm{xi}(X) = \mathrm{E}$；

$\mathrm{xi}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}$；

if $X \in \mathrm{Prng}$, $\mathrm{xi}(X\uparrow) = \mathrm{xi}(X)\uparrow$；

if $X \in \mathrm{Prng}$, $\mathrm{xi}(X\downarrow) = \mathrm{xi}(X)\downarrow$；

if $X \in \mathrm{Prng}$ and $Y \in \mathrm{Pprng} \setminus \{\uparrow, \downarrow\}$, $\mathrm{xi}(XY) = \mathrm{xi}(X)$.

サブセクション2.2の $\Xi(\Lambda)$ は関数 xi を用いて $\mathrm{xi}(\Lambda)$ と書ける。

語列 t の原始語分解（$\alpha_1, \cdot\cdot\cdot, \alpha_r$）から

$$\Lambda = \Lambda(t) = \mathrm{change}(\alpha_1) \cdot\cdot\cdot \mathrm{change}(\alpha_r)$$

を作れば

$$\Lambda \in \langle \mathrm{Radical2} \rangle,\ \mathrm{xi}(\Lambda) \in (\uparrow\,;\,\downarrow)(\mathrm{Prng})$$

である。ここに

$$\mathrm{Radical2} = \mathrm{Primitive} \cup \mathrm{Prev} \cup \{\uparrow, \downarrow\},$$

$$\mathrm{Primitive} = \mathrm{Const} \cup \mathrm{Var},$$

$$\mathrm{Prev} = \{\ |\, \mathrm{v}\ ;\ \mathrm{v} \in \mathrm{Var}\}$$

とする。このようにすれば，$\Lambda(t)$を Radical2 の元の列とみたときの一意性が成立する。$\Lambda(t)$ を語列 t の構造図という。例えば，通常

$$\forall \mathrm{x}(\mathrm{x} > 0 \Rightarrow \exists \mathrm{y} \quad \mathrm{y}^2 = \mathrm{x})$$

と書かれる文は，ここでは

$$\forall [\mathrm{x} \mid \Rightarrow > \mathrm{x}\ 0\ \exists [\mathrm{y} \mid \equiv \cdot\ \mathrm{yyx}]]$$

と書かれる。その構造図は

$$\forall \mid \mathrm{x} \uparrow \Rightarrow > \mathrm{x}\ 0\ \exists \mid \mathrm{y} \uparrow \equiv \cdot\ \mathrm{yyx} \downarrow \downarrow$$

で，演繹図と同様に図でしめせば

$$\forall \frac{\Rightarrow > \mathrm{x}\ 0\ \exists \dfrac{\equiv \cdot\ \mathrm{yyx}}{\mid \mathrm{y}}}{\mid \mathrm{x}}$$

となる。ここに

$\forall$，$\exists$，$\Rightarrow$，$>$，$\equiv$，$\cdot$，$0 \in \mathrm{Const}$，

x，$\mathrm{y} \in \mathrm{Var}$ $(\mathrm{x} \neq \mathrm{y})$，

$\mathrm{wcf}(\forall) = \mathrm{wcf}(\exists) = \mathrm{TTD}\mu\mu$，

$\mathrm{wcf}(\Rightarrow) = \mathrm{TT}\mu\mathrm{T}\mu$，

$\mathrm{wcf}(>) = \mathrm{wcf}(\equiv) = \mathrm{TD}\mu\mathrm{D}\mu$，

$\mathrm{wcf}(\cdot) = \mathrm{DD}\mu\mathrm{D}\mu$

$\mathrm{wcf}(0) = \mathrm{wcf}(\mathrm{x}) = \mathrm{wcf}(\mathrm{y}) = \mathrm{D}$

であるものとする。

関数 invchange $\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を

$$\begin{aligned}\mathrm{invchange}(X) &= [,\ \text{if } X = \mid;\\ &= \mid,\ \text{if } X = \uparrow;\\ &=],\ \text{if } X = \downarrow;\\ &= X,\ \text{otherwise}\end{aligned}$$

で定義すれば，

$$t \in \mathrm{Wdsq},\ \Lambda = \Lambda(t),$$

$$\Lambda = X_1 \cdot\cdot\cdot X_r \ (X_1, \cdot\cdot\cdot, X_r \in \mathrm{Radical2})$$

のとき，

$$t = \mathrm{invchange}(X_1) \cdot\cdot\cdot \mathrm{invchange}(X_r)$$

となり語列 t の構造図 Λ から語列 t を再生させることができる。

Λ が語列の構造図であるとき

条件S． $\Lambda = X_1 \cdot\cdot\cdot X_r \ (X_1, \cdot\cdot\cdot, X_r \in \mathrm{Radical2})$ ならば
1）$\mathrm{xi}(\Lambda) \in (\uparrow ; \downarrow)(\mathrm{Prng})$，2）$X_q \in \mathrm{Prev}$ ならば $X_{q+1} = \uparrow$，
3）$X_q = \uparrow$ ならば $X_{q-1} \in \mathrm{Prev}$，$X_{q+1} \in \mathrm{Prev} \cup \mathrm{Primitive}$.

が満たされる。しかし $\Lambda \in \langle \mathrm{Radical2} \rangle$ が条件Sを満たすからといって Λ が語列の構造図になるとは限らない。合成語が［変数｜句］の形をしていなければいけないからである。語列の構造図全体を我々はStrmで表し，この元を単に構造図（structure map）と呼ぶことにする。関数 lambda $\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{lambda}(t) &= \mathrm{E}, \text{ if not } t \in \mathrm{Wdsq}; \\ &= \Lambda(t), \text{ if } t \in \mathrm{Wdsq} \end{aligned}$$

と定義すれば

$$\mathrm{Strm} = \mathrm{lambda}(\mathrm{Wdsq})$$

である。また関数 invlambda $\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{invlambda}(\Lambda) &= \mathrm{invchange}(X_1) \cdot\cdot\cdot \mathrm{invchange}(X_r), \\ &\quad \text{if } \Lambda \in \mathrm{Strm} \text{ and} \\ &\quad \text{for some } X_1, \cdot\cdot\cdot, X_r \in \mathrm{Radical2}, \ \Lambda = X_1 \cdot\cdot\cdot X_r; \\ &= \mathrm{E}, \text{ otherwise} \end{aligned}$$

で与えれば，

$$\begin{aligned} \mathrm{invlambda}(\mathrm{lambda}(X)) &= X, \text{ if } X \in \mathrm{Wdsq}; \\ &= \mathrm{E}, \text{ otherwise}, \\ \mathrm{lambda}(\mathrm{invlambda}(X)) &= X, \text{ if } X \in \mathrm{Strm}; \\ &= \mathrm{E}, \text{ otherwise} \end{aligned}$$

となる。

$t \in$ Wdsq, lambda$(t) = X_1 \cdot \cdot \cdot X_r(X_1, \cdot \cdot \cdot, X_r \in$ Radical2) とする。原始語 α が $X_1, \cdot \cdot \cdot, X_r$ の中にあるとき，α は語列 t に関連するという。また $\alpha = X_q$ が列 $X_1 \cdots X_r$ の中で左から数えて s 番目の Prev $\cup$ Primitive の元であるとき，α は s 番目で t に関連するという。

さきほどの例

$t = \forall[$x $|\Rightarrow>$x 0 $\exists[$y $|\equiv\cdot$ yyx$]]$

について，関連の表を作れば

	∀	[	x	|	⇒	>	x	0	∃	[	y	|	≡	・	y	y	x	]	]
	1		2		3	4	5	6	7		8		9	10	11	12	13		
∀	○																		
∃									○										
⇒					○														
>						○													
≡													○						
・														○					
0								○											
x							○										○		
y															○	○			

のようになる。変数 x についていえば，x は 5 番目と 13 番目で t に関連する。

原始語 α が s 番目で t に関連し，構造図 lambda(t) において s 番目の位置より下部に $|\alpha(\in$ Prev $= \{|$v ; v $\in$ Var$\})$がないなら，α は s 番目で t に真に関連する，または自由関連するという。| 定数 は Prev の元となり得ないので，定数の関連はいつも真の関連である。例

$$t = \forall[\mathrm{x}\,|\Rightarrow\ >\mathrm{x}\ 0\ \exists[\mathrm{y}\,|\equiv\cdot\,\mathrm{yyx}]]$$

において真の関連をする変数はない。

$$t = \Rightarrow\ >\ \mathrm{x}\ \ 0\ \ \exists[\mathrm{y}\ |\equiv\ \cdot\ \ \mathrm{y}\ \ \mathrm{y}\ \ \mathrm{x}]$$
$$1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\quad 7\ 8\ 9\ 10\ 11$$

において x は 3 番目と 11 番目で真に関連する。

紙面の都合上，つづきは次回に譲りたい。