高階古典論理の形式的体系の試作II

兼 岩 龍 二

前回までの目次

2.4. 標準木. サブセクション2.2〜3において，演繹図・構造図が定義された。そこで上部，下部，極上部などの言葉が現れたが，それらの意味は演繹図・構造図を実際に図に書いたときは視覚的に理解できるであろうが，$\mathfrak{N}$ の元として演繹図・構造図をみるとき必ずしも明快とはいえないであろう。ここでそのことに触れておこう。

$$\mathfrak{L} = \langle \mathfrak{U} \rangle (\mathfrak{U} = \{\mu, \mathrm{T}, \mathrm{D}\} = \{\mu, \uparrow, \downarrow\}) \text{ の元}$$
$$\Pi = X_1 \cdot\cdot\cdot X_r (X_1, \cdot\cdot\cdot, X_r \in \mathfrak{U})$$

が条件

1）$\mathrm{xi}(\Pi) \in (\uparrow ; \downarrow)(\mathrm{Prng})$,

2）$X_q = \uparrow$ ならば $X_{q-1} = \mu (q \in \{1, \cdot\cdot\cdot, r\},\ X_0 = \mathrm{E})$

を満たすとき，Π は標準木（normal tree）であるという。また

$$X_1, \cdot\cdot\cdot, X_r$$

の中に出てくる μ の個数を標準木 Π の位数という。空列Eは位数0の標準木である。

今，２変数関数 $\mathrm{ex} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu\mathfrak{N}\mu$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{ex}(X,0) &= \mathrm{E}\,; \\ \mathrm{ex}(X,\,Y+1) &= \mathrm{ex}(X,\,Y)Z,\ \text{if for some } Z \in \mathrm{Pprng} \text{ and } W \in \mathfrak{N}, \\ &\qquad\qquad X = \mathrm{ex}(X,\,Y)ZW\,; \\ &= \mathrm{ex}(X,\,Y),\ \text{otherwise} \end{aligned}$$

で，$\mathrm{exx} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu\mathfrak{N}\mu$ を

$$\begin{aligned} \mathrm{exx}(X,0) &= \mathrm{E}\,; \\ \mathrm{exx}(X,\,Y+1) &= Z,\ \text{where } Z \text{ is only one element of } \mathfrak{N} \text{ such that} \\ &\qquad \mathrm{ex}(X,\,Y+1) = \mathrm{ex}(X,\,Y)Z \end{aligned}$$

で定義する。X が pairing のとき，$\mathrm{exx}(X,q)$ は X を proper pairing の列と考えたときの第 q 番目の proper pairing である。従って，

$$\Pi = X_1 \cdot\cdot\cdot X_r (X_1, \cdot\cdot\cdot, X_r \in \mathfrak{U})$$

なら

$$\begin{aligned} \mathrm{exx}(\Pi,q) &= X_q,\ \text{if } q \in \{1, \cdot\cdot\cdot, r\}\,; \\ &= \mathrm{E},\ \text{otherwise} \end{aligned}$$

である。また t が語列のとき，$\mathrm{exx}(t,q)$ は t における第 q 番目の語，$\mathrm{ex}(t,q)$ は第 q 番目までの語を順にならべてできる語列である。

次に，関数 $\mathrm{plength} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$, $\mathrm{app} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu\mathfrak{N}\mu\mathfrak{N}\mu$ を

$$\begin{aligned} &\text{if not} X \in \mathrm{Prng},\ \mathrm{plength}(X) = 0\,; \\ &\text{if } X \in \mathrm{Prng}, \\ &\qquad \mathrm{plength}(X) = \text{minmum of } p \text{ such that } X = \mathrm{ex}(X,p)\,; \\ &\text{if not}(X \in \mathrm{Prng} \text{ and } Y \in \mathrm{Pprng}),\ \mathrm{app}(X,\,Y,Z) = 0\,; \\ &\text{if } X \in \mathrm{Prng} \text{ and } Y \in \mathrm{Pprng},\ \mathrm{app}(X,\,Y,0) = 0\,; \\ &\text{if } X \in \mathrm{Prng} \text{ and } Y \in \mathrm{Pprng}, \\ &\mathrm{app}(X,\,Y,Z+1) = \text{minimum of } q \text{ such that} \\ &\qquad\qquad q > \mathrm{app}(X,\,Y,Z) \text{ and } \mathrm{exx}(X,q) = Y, \\ &\qquad\qquad\qquad \text{if there exists such } q\,; \\ &\qquad = \mathrm{plength}(X)+1,\ \text{otherwise} \end{aligned}$$

で定義する。X が pairing のとき，$\mathrm{plength}(X)$ は X を proper pairing の列

と考えたときの長さである。Π が標準木のとき，$\mathrm{app}(\Pi,\mu,p)$ は $\mathfrak{U}$ の元の列としての Π の中で第 p 番目の μ が第何番目に現れるかを表している。ただし p が Π の位数より大きいときは

$$\mathrm{app}(\Pi,\mu,p) = \mathrm{plength}(\Pi)+1$$

となるように定義してある。また標準木 Π の位数は

$$\mathrm{order}(X) = \mathrm{plength}(X) \dot{-} \mathrm{plength}(\mathrm{xi}(X))$$

で定義される関数 $\mathrm{order} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を用いて $\mathrm{order}(\Pi)$ で表される。ここに $X \dot{-} Y$ は

$$X \dot{-} Y = X - Y,\ \mathrm{if} X \geqq Y\ ;$$
$$= 0,\ \mathrm{otherwise}$$

で与えられるものとする。しかしながら，上記の order の定義において $\mathrm{plength}(\mathrm{xi}(X))$ が $\mathrm{plength}(X)$ を越えることはない。

さて今，位数 n の標準木 Π が与えられると集合 $\{1,\cdots,n\}$ にある種の順序が導入される。即ち p，$q \in \{1,\cdots,n\}$ に対して，p が q の下部にある（または q が p の上部にある）とは，

$$\mathrm{ex}(\Pi,m) = \mathrm{ex}(\Pi,\mathrm{app}(\Pi,\mu,p))\uparrow W\downarrow,$$
$$\mathrm{xi}(W) \in (\uparrow\ ;\ \downarrow)(\mathrm{Prng}),$$
$$\mathrm{app}(\Pi,\mu,p) < \mathrm{app}(\Pi,\mu,q) < m$$

となる $W \in \mathfrak{L}$，$m \in \mathfrak{N}$ が存在することをいう。このとき $\uparrow W \downarrow$ は $\mathfrak{U}$ の元の列として Π の一部分であるから

$$\mathrm{exx}(W,q) = \uparrow \text{ implies } \mathrm{exx}(W,q \dot{-} 1) = \mu$$

が成立し W もまた標準木でなければならない。

Nt を標準木全体，即ち

$$\mathrm{Nt} = \{\Pi \in \mathfrak{L}\ ;\ \mathrm{xi}(\Pi) \in (\uparrow\ ;\ \downarrow)(\mathrm{Prng}) \text{ and for all } q \in \mathfrak{N},$$
$$\mathrm{exx}(\Pi,q) = \uparrow \text{implies } \mathrm{exx}(\Pi,q \dot{-} 1) = \mu\}$$

とする。また $\mathrm{lower} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}\mu)^3 = \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu\mathfrak{N}\mu\mathfrak{N}\mu$ を「標準木 Π において p が q の下部にある」の特性関数とする。即ち，値 $\mathrm{lower}(\Pi,p,q)$ を $\Pi \in \mathrm{Nt}$ かつ Π において p が q の下部にあるとき 1，そうでないとき 0 とする。そこで

$$\mathrm{lower}(\Pi, p, q) = 1,$$

$$\text{for all } r \in \mathfrak{N},\ \mathrm{lower}(\Pi, p, r) \cdot \mathrm{lower}(\Pi, r, q) = 0$$

が成り立つとき，Π において p は q の親（q は p の子）という。Π，p，r の 3 変数述語「Π において p は q の親である」の特性関数を $\mathrm{parent} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}\mu)^3$ とする。

次に「Π において p は極上」（特性関数：$\mathrm{treetop} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}\mu)^2$）を定義する。$\Pi$ において p は極上，とは

$$\Pi \in \mathrm{Nt},$$

$$\text{for all } q \in \mathfrak{N},\ \mathrm{lower}(\Pi, p, q) = 0,$$

$$\mathrm{exx}(\Pi,\ \mathrm{app}(\Pi, \mu, p)+1)\mathrm{exx}(\Pi,\ \mathrm{app}(\Pi, \mu, p)+2) \neq \uparrow\downarrow$$

が満たされることをいう。言い換えれば，Π が標準木で，p が上部（或いは子）をもたず，$\mathfrak{U}$ の元の列 Π において p 番目の μ のすぐ後ろに列 $\uparrow\downarrow$ が現れないとき $\mathrm{treetop}(\Pi, p)$ の値を 1 とし，そうでないときは 0 とするのである。

演繹図全体を Ddctm としよう。即ち，$\langle$Radical$\rangle$ の元 Λ で

$$\mathrm{xi}(\Lambda) \in (\uparrow\,;\,\downarrow)(\mathrm{Pprng})$$

とサブセクション 2.2 の条件 D を満たすものの全体を Ddctm とする。関数 muchange，$\mathrm{pi} \in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を定義しておく。即ち

$$\mathrm{muchange}(X) = X,\ \text{if } X \in \{\uparrow, \downarrow\}\,;$$

$$= \mu,\ \text{otherwise},$$

$$\text{if not } X \in \langle\mathrm{Radical}\rangle,\ \mathrm{pi}(X) = \mathrm{E}\,;$$

$$\mathrm{pi}(\mathrm{E}) = \mathrm{E}\,;$$

$$\text{if } X \in \langle\mathrm{Radical}\rangle \text{ and } Y \in \mathrm{Radical},$$

$$\mathrm{pi}(XY) = \mathrm{pi}(X)\mathrm{muchange}(Y).$$

このとき，$\Lambda \in \mathrm{Ddctm}$ ならば $\mathrm{pi}(\Lambda)$ は標準木である。即ち，

$$\mathrm{pi}(\mathrm{Ddctm}) \subset \mathrm{Nt}.$$

さらに

$$\mathrm{pi}(\mathrm{Ddctm}) = \{\Pi \in \mathrm{Nt}\,;\ \mathrm{ex}(\Pi, 2) = \mu\uparrow,\ \mathrm{exx}(\Pi,\ \mathrm{plength}(\Pi)) = \downarrow\}$$

が成り立つ。Λ が演繹図のとき pi(Λ)を演繹図 Λ の型という。また関数 pi2 $\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を

$$\text{if not } X \in \langle\text{Radical2}\rangle,\ \text{pi2}(X) = \text{E};$$
$$\text{pi2(E)} = \text{E};$$
$$\text{if } X \in \langle\text{Radical2}\rangle \text{ and } Y \in \text{Radical2},$$
$$\text{pi2}(XY) = \text{pi2}(X)\text{muchange}(Y).$$

で定義すれば,

$$\text{pi2(Strm)} = \{\Pi \in \text{Nt};\ \text{for all } q,$$
$$\text{exx}(\Pi, q) = \uparrow \text{implies exx}(\Pi, q+1) = \mu\}$$

となる。Λ が構造図のとき pi2(Λ) を構造図 Λ の型 (type) という。

次に関数 lchange, list, list2 $\in \mathfrak{N}\mathfrak{N}\mu$ を

$$\text{lchange}(X) = \text{E},\ \text{if} X \in \{\uparrow, \downarrow\};$$
$$= [X],\ \text{otherwise},$$
$$\text{if not } X \in \langle\text{Radical}\rangle,\ \text{list}(X) = \text{E};$$
$$\text{list(E)} = \text{E};$$
$$\text{if } X \in \langle\text{Radical}\rangle \text{ and } Y \in \text{Radical},$$
$$\text{list}(XY) = \text{list}(X)\text{lchange}(Y);$$
$$\text{if not } X \in \langle\text{Radical2}\rangle,\ \text{list2}(X) = \text{E};$$
$$\text{list2(E)} = \text{E};$$
$$\text{if} X \in \langle\text{Radical2}\rangle \text{ and } Y \in \text{Radical2},$$
$$\text{list2}(XY) = \text{list2}(X)\text{lchange}(Y)$$

で定義する。Λ が演繹図のとき list(Λ)を, Λ' が構造図のとき list2(Λ')をそれぞれ Λ, Λ' の内容 (contents) という。

例えば,

$$\Lambda = \tau\uparrow \mid \Rightarrow \Upsilon\tau\uparrow \mid \Rightarrow \Upsilon\sigma\uparrow \mid [\Upsilon]\sigma\downarrow \mid \Rightarrow \sigma\tau\downarrow\downarrow$$

のとき, 演繹図 Λ の型は

$$\mathrm{pi}(\Lambda) = \underset{1}{\mu} \overset{1}{\uparrow} \underset{2}{\mu} \overset{2}{\uparrow} \underset{3}{\mu} \overset{3}{\uparrow} \underset{4}{\mu} \overset{3}{\downarrow} \underset{5}{\mu} \overset{2}{\downarrow} \overset{1}{\downarrow},$$

$$\text{height}: \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 2$$

Λ の内容は

$\mathrm{list}(\Lambda) = [\tau][\,|\Rightarrow \Upsilon\tau][\,|\Rightarrow \Upsilon\sigma][[\Upsilon]\sigma][\,|\Rightarrow \sigma\,\tau]$ となる。ここに

$$\sigma, \tau \in \mathrm{Sent};$$

$$\Upsilon, \Rightarrow \in \mathrm{Const};$$

$$\mathrm{wcf}(\Upsilon) = \mathrm{T},\ \mathrm{wcf}(\Rightarrow) = \mathrm{TT}\mu\mathrm{T}\mu$$

とする。

この例において，標準木 pi(Λ) における（親,子,・・・,子）の組をすべて書き出せば，

$$(1,2),\ (2,3,5),\ (3,4)$$

となる。一般に標準木 pi(Λ) における（親,子,・・・,子）の組の1つを

$$(Y, X_1, \cdots, X_r)$$

（ただし Y は pi(Λ) において極上でないもの，$X_1 < \cdots < X_r$ は Y のすべての子）とし，これから

σ_q = (exx(list(Λ), X_q) から左端の［と，右端の］を除いたもの)，

τ = (exx(list(Λ), Y) から左端の［と，右端の］を除き，もしその冒頭に［文列］の形があればそれも除いたもの)

とおいて列 $\tau\,\sigma_1 \cdots \sigma_r$ を作ることができる。この操作を，標準木 pi(Λ) における（親,子,・・・,子）の組（家族（family）という）のすべてについて行えば，演繹図 Λ に使われたすべての推論を得ることができる。この例についていえば，家族

$$(1,2),\ (2,3,5),\ (3,4)$$

に対応する推論は，それぞれ

$$\tau\,|\Rightarrow \Upsilon\tau,\quad \Rightarrow \Upsilon\tau\,|\Rightarrow \Upsilon\sigma\,|\Rightarrow \sigma\,\tau,\quad \Rightarrow \Upsilon\sigma[\Upsilon]\sigma$$

となり，これらが演繹図 Λ に使われたすべての推論（Λ の使用推論という）である。

またこの例で，pi(Λ)において極上なるものは4と5である。これに対応してΛの極上部前提は（exx(list(Λ),4) から左端の［と，右端の］を除いたもの）＝$[\Upsilon]\sigma$と（exx(list(Υ),5) から左端の［と，右端の］を除いたもの）＝ $|\Rightarrow\sigma\tau$の2つである。一般に「αが演繹図Λの極上部前提であるための条件は

α = (exx(list(Λ),p) から左端の［と，右端の］を除いたもの)

かつpi(Λ)においてpが極上であるような$p\in\mathfrak{N}$が存在することである」がRadicalの元の列Λに含まれる↑の数に関する帰納法で得られる。

今，pi(Λ)において極上なるものpが与えられると，その親その親と辿って親をもたなくなるまで遡ることができる。そこでそれらの数を逆にならべて

$$(u_0,\cdot\cdot\cdot,u_r)$$

とする。ここに1）u_0は親をもたない，2）$q\in\{1,\cdot\cdot\cdot,r\}$に対して$u_q$は$u_{q-1}$の子，3）$u_r=p$が成り立つものとする。一般に標準木$\Pi$において1）～3）が満たされるとき$(u_0,\cdot\cdot\cdot,u_r)$を$\Pi$における$p$の系譜（pedigree）という。さらに$q\in\{1,\cdot\cdot\cdot,r\}$に対して

α_q = (exx(list(Λ),u_q)から左端の［と，右端の］を除いたもの),

β_q = (exx(α_q,1) から左端の［と，右端の］を除いたもの),

γ = ($\alpha_r\in$ Prngから冒頭のproper pairing exx(α_r,1) を除いたもの),

$\delta=\delta(p)=[\beta_1\cdot\cdot\cdot\beta_r]\gamma$

の様にして前提$\delta(p)$を作ることができる。pi(Λ)において極上なるものが小なる順に$p_1,\cdot\cdot\cdot,p_s$のとき

ε = (exx(list(Λ),1) から左端の［と，右端の］を除いたもの)

とおいて，

$$\mathrm{conclusion}(\Lambda)=\varepsilon\ \ \delta(p_1)\cdot\cdot\cdot\delta(p_s)$$

を作れば，これは演繹図Λの最終合成推論（結論という）である。例

$$\Lambda=\tau\uparrow|\Rightarrow\Upsilon\tau\uparrow|\Rightarrow\Upsilon\sigma\uparrow[\Upsilon]\sigma\downarrow|\Rightarrow\sigma\tau\downarrow\downarrow$$

でいえば4と5の系譜はそれぞれ（1,2,3,4），（1,2,5）で，

$$\varepsilon = \tau,\ \delta(4) = [\Upsilon]\sigma,\ \delta(5) = \ | \Rightarrow \sigma\,\tau,$$

$$\mathrm{conclusion}(\Lambda) = \tau[\Upsilon]\sigma \mid \Rightarrow \sigma\,\tau$$

となる。もう１つの例

$$\Lambda = \Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\, v \uparrow [\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v] \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\, v \uparrow [\tau] \Rightarrow \sigma\, v$$
$$\uparrow [\sigma] v \uparrow \mid \tau \mid \Rightarrow \tau\, v \uparrow \mid \sigma \mid \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow \downarrow$$

についていえば,

$$\mathrm{list}(\Lambda) = [\Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma v][[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v] \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\, v]$$
$$[[\tau] \Rightarrow \sigma\, v][[\sigma] v][\,\mid \tau][\,\mid \Rightarrow \tau\, v][\,\mid \sigma]$$
$$[\,\mid \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v],$$

$$\mathrm{pi}(\Lambda) = \underset{1}{\mu} \overset{1}{\uparrow} \underset{2}{\mu} \overset{2}{\uparrow} \underset{3}{\mu} \overset{3}{\uparrow} \underset{4}{\mu} \overset{4}{\uparrow} \underset{5}{\mu}\underset{6}{\mu} \overset{5}{\uparrow} \underset{7}{\mu}\underset{8}{\mu} \overset{5}{\downarrow} \overset{4}{\downarrow} \overset{3}{\downarrow} \overset{2}{\downarrow} \overset{1}{\downarrow}$$

height： 0 1 2 3 44 55

でpi(Λ) における家族は

$$(1,2),\ (2,3),\ (3,4),\ (4,5,6),\ (6,7,8)\ ;$$

極上者の系譜は

$$(1,2,3,4,5),\ (1,2,3,4,6,7),\ (1,2,3,4,6,8)\ ;$$

Λ の結論は

$$\mathrm{conclusion}(\Lambda) = \Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\, v[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v\ \tau\, \sigma]\tau$$
$$[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v\ \tau\, \sigma]\sigma[\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v\ \tau\, \sigma] \Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v$$

となる。一般に推論ιから消去推論によって「無駄な前提」をすべて取り去ったものをsimp(ι) で表せば，この例の場合，

$$\mathrm{simp}(\mathrm{conclusion}(\Lambda)) = \Rightarrow\Rightarrow \sigma \Rightarrow \tau\, v \Rightarrow \tau \Rightarrow \sigma\, v$$

となる。

また例 $\Lambda = \sigma \uparrow \downarrow$ についていえば，家族は(１)のみ，極上者はない。従って，使用推論は σ のみ，結論も conclusion(Λ) = σ となる。

標準木 Π における家族，標準木 Π における p の系譜等は $\mathfrak{N}$ の元の組

$$(u_0, \cdot\cdot\cdot, u_r) \quad (u_q \in \mathfrak{N})$$

であるが，これを再び $\mathfrak{N}$ の元として扱うことは容易である。我々は

$$(u_0, \cdot\cdot\cdot, u_r) = [(\uparrow ; \downarrow)(u_0)] \cdot\cdot\cdot [(\uparrow ; \downarrow)(u_r)]$$

と定義することにしよう。例えば

$$\begin{aligned}(0,1,2) &= [\ ][\uparrow][\downarrow] \\ &= [\ ]\ [\ [\ [\ [\ ]\ ]\ ]\ ]\ [\ [\ [\ ]\ [\ ]\ ]\ ] \\ &= 4\cdot 2^{16} + 270\cdot 2^8 + 278 \\ &= 331542\end{aligned}$$

である。

語列における原始語の真の関連についても触れておこう。「語列 t において原始語 α が q 番目で真に関連する」を言い換えれば「

1) $t \in \mathrm{Wdsq}$, $\alpha \in \mathrm{Primitive}$;

2) $\mathrm{exx}(\mathrm{list2}(\mathrm{lambda}(t)), q) = [\alpha]$;

3) pi2(lambda (t) における q の系譜を $(u_1, \cdot\cdot\cdot, u_r)$ とするとき

$$\mathrm{exx}(\mathrm{list2}(\mathrm{lambda}(t)), u_1) \neq [\mid \alpha],$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot,$$

$$\mathrm{exx}(\mathrm{list2}(\mathrm{lambda}(t)), u_{r-1}) \neq [\mid \alpha]$$

が成立する」となる。

語列 t において真の関連をする原始語を Radical2 の元の列 lambda (t) の中で出てくる順に(1度出てきた語は次にリストアップしない)

$$\alpha_1, \cdot\cdot\cdot, \alpha_r$$

とするとき列

$$\alpha_1 \cdot\cdot\cdot \alpha_r \in \langle \mathrm{Primitive} \rangle$$

を list21 (t) で表すことにする。t が語列でないときは

$$\mathrm{list21}(t) = \mathrm{E}$$

と約束する。また語列 list21 (t) の中の定数だけを選び出して作った部分語列を list21c (t), 変数だけを選び出して作った部分語列を list21v (t) で表すことにする。我々は部分文列, 部分文をサブセクション 2.1 で定義したが, これと同様に, subpairing, proper subpairing を定義することができる。ここでは語列の subpairing, proper subpairing をそれぞれ部分語列, 部分語と呼ん

でいる。

語列 t と語列 list21(t) の部分語 α について，t において α が真の関連をする番号を順に $u_1, \cdot\cdot\cdot, u_r$ とするとき組

$$(u_1, \cdot\cdot\cdot, u_r)$$

を list22(t, α) で表すことにする。t が語列でない場合や，α が list21(t) の部分語でない場合即ち，

$$\text{not}\ (t \in \text{Wdsq and } \alpha \in \text{Primitive}$$
$$\text{and for some } q \in \mathfrak{N},\ \text{exx}(\text{list21}(t), q) = \alpha)$$

の場合は list22$(t, \alpha) = \text{E}$ と約束する。

例をみよう，

$$t = \Rightarrow > \text{x}0\exists[\text{y} \mid \equiv\cdot\text{yyx}]$$

のとき，

$$\begin{aligned}
\text{lambda}(t) &= \Rightarrow > \text{x}0\exists \mid \text{y}\uparrow \equiv\cdot\text{yyx}\downarrow, \\
\text{pi2}(\text{lambda}(t)) &= \mu\mu\mu\mu\mu\ \ \mu\uparrow \mu\mu\mu\mu\mu\downarrow, \\
\text{list2}(\text{lambda}(t)) &= [\Rightarrow][>][\text{x}][0][\exists] \\
&\quad\ [\mid \text{y}][\equiv][\cdot][\text{y}][\text{y}][\text{x}], \\
\text{list21}(t) &= \Rightarrow > \text{x}0\exists\equiv\cdot, \\
\text{list21c}(t) &= \Rightarrow > 0\exists\equiv\cdot, \\
\text{list21v}(t) &= \text{x},
\end{aligned}$$

α	$\Rightarrow$	$>$	x	0	$\exists$	$\equiv$	$\cdot$	y
list22(t, α)	(1)	(2)	(3, 11)	(4)	(5)	(7)	(8)	E

となる。

標準木 Π における q の高さ (height) についても述べておこう。高さ height(Π, q) を以下に定義する：

$$\text{if } q = 0 \text{ or not } \Pi \in \text{Nt},\ \text{lheight}(\Pi, q) = 0\ ;$$

$$\text{if } \Pi \in \text{Nt},$$

$$\begin{aligned}
\text{lheight}(\Pi, q+1) &= \text{lheight}(\Pi, q) + 1, \text{ if exx}(\Pi, q+1) = \uparrow\ ; \\
&= \text{lheight}(\Pi, q) \dot{-} 1, \text{ if exx}(\Pi, q+1) = \downarrow\ ;
\end{aligned}$$

$$= \mathrm{lheight}(\Pi, q), \text{ otherwise};$$

$$\mathrm{height}(\Pi, q) = \mathrm{lheight}(\Pi, \mathrm{app}(\Pi, \mu, q)).$$

このとき次の定理が成り立つ（証明は容易であろう）：

定理 2.4. 標準木 Π において p が q の親（q が p の子）であるための条件は

1） $0 < p < q \leqq \mathrm{order}(\Pi)$,

2） $\mathrm{height}(\Pi, q) = \mathrm{height}(\Pi, p) + 1$,

3） $p < r < q$ ならば $\mathrm{height}(\Pi, p) < \mathrm{height}(\Pi, r)$

が成り立つことである。

このサブセクションの最後として，標準木と「内容」から演繹図，構造図を再生させる関数を導入しておく。まず自然数 $X \in \mathfrak{N}$ の [と] による 2 進法展開の長さ $\mathrm{length}(X)$ は

$$\mathrm{length}(X) = (\text{minimum of } q \in \mathfrak{N} \text{ such that } X + 2 \leqq 2^q) \dot{-} 1$$

となる。$X \in \mathrm{Pprng}$ に対してその一番外側の [　] を取り去って得られる pairing $\mathrm{core}(X)$ は

$$\mathrm{core}(X) = \mathrm{quot}(X \dot{-} 2^{\mathrm{length}(X) \dot{-} 1} \dot{-} 2, 2)$$

と表せる。ここに

$$\mathrm{quot}(Y, Z) = (\text{minimum of } q \in \mathfrak{N} \text{ such that } Z \cdot q > Y) \dot{-} 1,$$

$$\text{if} Z \neq 0;$$

$$= 0, \text{ if} Z = 0$$

即ち Y を Z で割った商（ただし $Z = 0$　のときは 0）を $\mathrm{quot}(Y, Z)$ とする。また $X \in \mathfrak{N}$ に対して，$X = \mathrm{ex}(X, p) Y$ となるような $Y \in \mathfrak{N}$ がただ 1 つ存在するので，これを $\mathrm{coex}(X, p)$ と表すことにする。そこで $\mathrm{comp} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}\mu)^2$ を以下のように帰納的に定義する：

if not$(X \in \mathfrak{L}$ and $Y \in \langle \mathrm{Pprng} \setminus \{[\,]\} \rangle$ and

$\mathrm{order}(X) = \mathrm{plength}(Y))$,

$$\mathrm{comp}(X, Y) = \mathrm{E};$$

if $X \in \mathfrak{L}$ and $\mathrm{order}(X) = 0$,

$$\mathrm{comp}(X, E) = X;$$

if $X \in \mathfrak{L}$ and $Y \in \langle \mathrm{Pprng} \setminus \{4\} \rangle$ and

$$\mathrm{order}(X) = \mathrm{plength}(Y) > 0,$$

$$\mathrm{comp}(X, Y) =$$

$$\mathrm{comp}(\mathrm{ex}(X, \mathrm{app}(X, \mu, \mathrm{order}(X)) \dot{-} 1)), \mathrm{ex}(Y, \mathrm{order}(X) \dot{-} 1))$$

$$\mathrm{ex}(X', \mathrm{app}(X', \mu, 1) \dot{-} 1)\mathrm{core}(Y')\mathrm{coex}(X', \mathrm{app}(X', \mu, 1)),$$

$$\text{where } X' = \mathrm{coex}(X, \mathrm{app}(X, \mu, \mathrm{order}(X) \dot{-} 1))$$

$$\text{and } Y' = \mathrm{coex}(Y, \mathrm{order}(X) \dot{-} 1).$$

このようにすれば，Λ が演繹図，Λ' が構造図のとき

$$\Lambda = \mathrm{comp}(\mathrm{pi}(\Lambda), \mathrm{list}(\Lambda)),$$

$$\Lambda' = \mathrm{comp}(\mathrm{pi2}(\Lambda'), \mathrm{list2}(\Lambda'))$$

が成立する。

2.5. 代入. t を語列，α を原始語，s を $\mathrm{wcf}(s) = \mathrm{wcf}(\alpha)$ となる純正句，

$$\mathrm{list22}(t, \alpha) = (u_1, \cdots, u_r),$$

$$\Pi = \mathrm{pi2}(\mathrm{lambda}(t)), \quad \Pi_1 = \mathrm{pi2}(\mathrm{lambda}(s)),$$

$$L = \mathrm{list2}(\mathrm{lambda}(t)), \quad L_1 = \mathrm{list2}(\mathrm{lambda}(s)),$$

$$v_q = \mathrm{app}(\Pi, \mu, u_q) \quad (q \in \{1, \cdots, r\}),$$

とする。そこで関数 $\mathrm{ex2} \in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}\mu)^3$ を

$$\mathrm{ex2}(X, p, q) = \mathrm{ex}(\mathrm{coex}(X, p), q)$$

で定義し，

$$\Pi_2 = \mathrm{ex}(\Pi, v_1 \dot{-} 1)\Pi_1 \mathrm{ex2}(\Pi, v_1, v_2 \dot{-} v_1 \dot{-} 1)\Pi_1$$

$$\cdots \mathrm{ex2}(\Pi, v_{r-1}, v_r \dot{-} v_{r-1} \dot{-} 1)\Pi_1 \mathrm{coex}(\Pi, v_r),$$

$$L_2 = \mathrm{ex}(L, u_1 \dot{-} 1)L_1 \mathrm{ex2}(L, u_1, u_2 \dot{-} u_1 \dot{-} 1)L_1$$

$$\cdots \mathrm{ex2}(L, u_{r-1}, u_r \dot{-} u_{r-1} \dot{-} 1)L_1 \mathrm{coex}(L, u_r)$$

とする。このとき，$\mathrm{comp}(\Pi_2, L_2)$ を $\mathrm{sub}(t, \alpha, s)$ で表し，代入

$$[t][\alpha][s] \in \mathrm{Prng}$$

の結果という。特に list22(t, α) = E のときは

$$\mathrm{sub}(t, \alpha, s) = t$$

とする。このことは $r = 0$ のとき $u_r = u_0 = 0$, $v_r = v_0 = 0$ と約束しておけば，特にいわなくても自動的にそうなる。また

(＊) $t \in \mathrm{Wdsq}$ and $\alpha \in \mathrm{Primitive}$ and $s \in \mathrm{Pphr}$ and

$$\mathrm{wcf}(s) = \mathrm{wcf}(\alpha)$$

が成立しないときは，$\mathrm{sub}(t, \alpha, s) = \mathrm{E}$ としておく。このようにすれば，sub $\in \mathfrak{N}(\mathfrak{N}\mu)^3$ となる。ここに Pphr は純正句全体とする。我々は「(＊)が成立すれば，

$$\mathrm{sub}(t, \alpha, s) \in \mathrm{Wdsq} \text{ and } \mathrm{wcf}(\mathrm{sub}(t, \alpha, s)) = \mathrm{wcf}(t)$$

が成立する」ことを確かめることができる。$X \in \mathfrak{N}$ が代入 (substitution) であるとは X が集合

$$\begin{aligned}\mathrm{Subst} = \{X \in \mathrm{Prng}\,;\, & \mathrm{plength}(X) = 3 \text{ and} \\ & \mathrm{core}(\mathrm{exx}(X, 1)) \in \mathrm{Wdsq} \text{ and} \\ & \mathrm{core}(\mathrm{exx}(X, 2)) \in \mathrm{Primitive} \text{ and} \\ & \mathrm{core}(\mathrm{exx}(X, 3)) \in \mathrm{Pphr} \text{ and} \\ & \mathrm{wcf}(\mathrm{core}(\mathrm{exx}(X, 2))) = \mathrm{wcf}(\mathrm{core}(\mathrm{exx}(X, 3)))\}\end{aligned}$$

の元であることをいう。

代入$[t][\alpha][s]$$(t, \alpha, s \in \mathrm{Prng})$ が適正 (right) であるとは，1）「α が t に真に関連しない」かまたは2）「α が q 番目で t に真に関連し，$(u_1, \cdots, u_r)$が標準木 pi2(lambda(t))における q の系譜で，x が s に真に関連する変数で，$p \in \{1, \cdots, r-1\}$ のときは，いつでも

$$\mathrm{exx}(\mathrm{list2}(\mathrm{lambda}(t)), u_p) \neq [\,|\,\mathrm{x}]$$

である」が成立することをいう。

例をみよう。$t = \exists[\mathrm{y}\,|\,\equiv\cdot\mathrm{yyx}]$ のとき，

$$\Sigma_1 = [t][\mathrm{x}][+\mathrm{xz}],$$

$$\Sigma_2 = [t][\mathrm{x}][+\mathrm{xy}],$$

$$\boldsymbol{\Sigma}_3 = [t][\mathrm{y}][+\mathrm{xy}],$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_4 = [t][\cdot][+],$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_5 = [t][\cdot][[\mathrm{x} \mid [\mathrm{y} \mid ++\mathrm{xyz}]]],$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_6 = [t][\cdot][[\mathrm{x} \mid [\mathrm{z} \mid ++\mathrm{xyz}]]],$$
$$\boldsymbol{\Sigma}_7 = [t][\cdot][\equiv]$$

とすれば，$\boldsymbol{\Sigma}_1$，$\boldsymbol{\Sigma}_2$，$\boldsymbol{\Sigma}_3$，$\boldsymbol{\Sigma}_4$，$\boldsymbol{\Sigma}_5$，$\boldsymbol{\Sigma}_6 \in \mathrm{Subst}$ であるが $\boldsymbol{\Sigma}_7$ は Subst の元ではない。また $\boldsymbol{\Sigma}_1 \sim \boldsymbol{\Sigma}_6$ のうち $\boldsymbol{\Sigma}_2$ と $\boldsymbol{\Sigma}_6$ を除けば適正であるが，$\boldsymbol{\Sigma}_2$ と $\boldsymbol{\Sigma}_6$ は適正ではない。

$$\begin{aligned}\mathrm{sub2}(X) = \mathrm{sub}(&\mathrm{core}(\mathrm{exx}(X,1)),\\ &\mathrm{core}(\mathrm{exx}(X,2)),\\ &\mathrm{core}(\mathrm{exx}(X,3)))\end{aligned}$$

とすれば，

$$\mathrm{sub2}(\boldsymbol{\Sigma}_1) = \exists[\mathrm{y} \mid \equiv\cdot\mathrm{yy}+\mathrm{xz}],$$
$$\mathrm{sub2}(\boldsymbol{\Sigma}_2) = \exists[\mathrm{y} \mid \equiv\cdot\mathrm{yy}+\mathrm{xy}],$$
$$\mathrm{sub2}(\boldsymbol{\Sigma}_3) = \exists[\mathrm{y} \mid \equiv\cdot\mathrm{yyx}] = t,$$
$$\mathrm{sub2}(\boldsymbol{\Sigma}_4) = \exists[\mathrm{y} \mid \equiv+\mathrm{yyx}],$$
$$\mathrm{sub2}(\boldsymbol{\Sigma}_5) = \exists[\mathrm{y} \mid \equiv[\mathrm{x} \mid [\mathrm{y} \mid ++\mathrm{xyz}]]\mathrm{yyx}],$$
$$\mathrm{sub2}(\boldsymbol{\Sigma}_6) = \exists[\mathrm{y} \mid \equiv[\mathrm{x} \mid [\mathrm{z} \mid ++\mathrm{xyz}]]\mathrm{yyx}],$$
$$\mathrm{sub2}(\boldsymbol{\Sigma}_7) = \mathrm{E}$$

となる。

2.6. 高階古典論理 HL の公理系. 今までの議論で 1 つの形式的体系を与える準備ができた。ここで HL なる体系(system)── 公理系を導入する。まず若干の定数を予約しておく。即ち，

$$\Upsilon = [\mathrm{T} \mid \mathrm{T}],\ \curlywedge = [\mathrm{T} \mid \mathrm{D}],\ \vee = [\mathrm{TT}\mu\mathrm{T}\mu \mid \mathrm{TT}]$$
$$\equiv_{(A)} = [\mathrm{T}A\mu A\mu \mid\ ](A \in \mathrm{Log}),$$
$$\Rightarrow_{(U)} = [\mathrm{T}U\mu U\mu \mid \mu](U \in \mathrm{Plog})$$

とする。ここに Plog は述語品詞の全体で

$$\mathrm{Plog} = \{U \in \mathrm{Log}\,;\,\mathrm{exx}(U, 1) = \mathrm{T}\}$$

で与えられるものとする。また

$$\equiv\ =\ \equiv_{(\mathrm{D})},\quad \sim\ =\ \equiv_{(\mathrm{T})},\quad \Rightarrow\ =\ \Rightarrow_{(\mathrm{T})}$$

としておく。

1）等号公理. s，t，u を品詞 $A \in \mathrm{Log}$ の純正句とするとき，

$$\mathrm{equ1}(s) = \equiv_{(A)} s\ s,$$

$$\mathrm{equ2}(s, t) = \equiv_{(A)} t\ s \mid \equiv_{(A)} s\ t,$$

$$\mathrm{equ3}(s, t, u) = \equiv_{(A)} s\ u \mid \equiv_{(A)} s\ t \mid \equiv_{(A)} t\ u$$

とする。equ1，equ2，equ3 は引き数が同品詞の純正句でないとき，値 $\mathrm{E} = 0$ をとる関数である。集合

$$\begin{aligned}\mathrm{Equ} = \{&\mathrm{equ1}(s)\,;\, s \in \mathrm{Pphr}\} \cup \\ &\{\mathrm{equ2}(s, t)\,;\, s, t \in \mathrm{Pphr},\ \mathrm{wcf}(s) = \mathrm{wcf}(t)\} \cup \\ &\{\mathrm{equ3}(s, t, u)\,;\, s, t, u \in \mathrm{Pphr},\ \mathrm{wcf}(s) = \mathrm{wcf}(t) = \mathrm{wcf}(u)\}\end{aligned}$$

の元は HL の等号公理であるといわれる。

2）順序公理. f，g，h を品詞 U の純正述語（$U \in \mathrm{Plog}$）とするとき，

$$\begin{aligned}\mathrm{ord1}(f, g, h) &= \Rightarrow_{(U)} f\ h \mid \Rightarrow_{(U)} f\ g \mid \Rightarrow_{(U)} g\ h,\\ \mathrm{ord2}(f, g) &= \Rightarrow_{(U)} f\ g \mid \Rightarrow_{(U)} f\ g \mid \Rightarrow_{(U)} g\ f,\\ \mathrm{ord3}(f, g) &= \Rightarrow_{(U)} f\ g \mid \equiv_{(U)} f\ g,\\ \mathrm{ord4}(f, g) &= \Rightarrow_{(U)} g\ f \mid \equiv_{(U)} f\ g\end{aligned}$$

とする。これらが作る集合 Ord の元は HL の順序公理であるといわれる。

3）等号導入公理. s，t を品詞 $AC\mu$ の純正句，x を品詞 C の変数（A，$C \in \mathrm{Log}$）とし，x は s，t に真の関連をしないものとするとき，

$$\mathrm{equin}(s, t, \mathrm{x}) = \equiv_{(AC\mu)} s\ t \mid \equiv_{(A)} s\mathrm{x}\,t\mathrm{x}$$

としこれを HL の等号導入公理と言う。HL を設定する際に想定した解釈（HL の標準解釈，第1節参照）によれば，s，t は「集合」C から「集合」A への「関数」で，この公理は「集合 C の不特定の元」x について各々の「像」$s\mathrm{x}$，$t\mathrm{x}$ が「等しい」ことが言えれば，s，t が「関数として等しい」ことを主張するものである。

4）順序導入公理． f, g を品詞 $UC\mu$ の純正述語，x を品詞 C の変数($U \in$ Plog, $C \in$ Log) とし，x は f, g に真の関連をしないものとするとき，

$$\mathrm{ordin}(f, g, \mathrm{x}) = \Rightarrow_{(UC\mu)} f\ g \mid \Rightarrow_{(U)} f\mathrm{x}g\mathrm{x}$$

としこれを HL の順序導入公理と言う。$U = \mathrm{T}\ C_r\mu \cdots C_1\mu$ とすれば，HL の標準解釈により，f, g はそれぞれの変数が $C, C_1, \cdots, C_r$ の上を動く「$r+1$ 変数の述語」とみなせる。さらに f, g は「直積」

$$C \times C_1 \times \cdots \times C_r$$

の「部分集合」ともみなせる。このような解釈をとれば $\Rightarrow_{(UC\mu)} f\ g$ の解釈は「「集合」f は「集合」g の「部分集合」である」となる。また $f\mathrm{x}$ の解釈は $U = \mathrm{T}$ のとき「$\mathrm{x} \in f$(C の「元」x が「集合」f に属す)」であり，U が T 以外の述語品詞のときは「「命題」$f\mathrm{x}\mathrm{x}_1 \cdots \mathrm{x}_r$ が成立するような組 ($\mathrm{x}_1, \cdots, \mathrm{x}_r$) の「集合」」である。従って，この解釈にしたがえば，公理「$\Rightarrow_{(UC\mu)}$ 導入」の主張は2種類に分けるべきであろう。

即ち，$U = \mathrm{T}$ のとき公理は「「$\mathrm{x} \in f$ ならば $\mathrm{x} \in g$」が「集合 C の不特定の元」x について言えれば，f が g の「部分集合」である」ことを主張し，U が T 以外の述語品詞のとき公理は「「$f\mathrm{x} \subset g\mathrm{x}$」が「集合 C の不特定の元」x について言えれば，f が g の「部分集合」である」ことを主張している。

5）接合公理． s, t を品詞 $BA\mu$ の句，f, g を品詞 $UA\mu$ の述語，u, v を品詞 AC の純正句 ($U \in$ Plog, $A, B, AC \in$ Log, $C \in \mathfrak{L}$)，x を変数とするとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{cnx1}(s, u, \mathrm{x}) &= \equiv_{(BC)}[\mathrm{x} \mid [\mathrm{x} \mid s]\mathrm{x}u]\mathrm{x}[\mathrm{x} \mid s\ u]\mathrm{x}, \\
\mathrm{cnx2}(s, t, u, v, \mathrm{x}) &= \equiv_{(BC)}[\mathrm{x} \mid s\ u]\mathrm{x}[\mathrm{x} \mid t\ v]\mathrm{x} \\
&\qquad \mid \equiv_{(BA\mu)}[\mathrm{x} \mid s]\mathrm{x}[\mathrm{x} \mid t]\mathrm{x} \mid \equiv_{(AC)} u\ v, \\
\mathrm{cnx3}(f, g, u, v, \mathrm{x}) &= \Rightarrow_{(UC)}[\mathrm{x} \mid f\ u]\mathrm{x}[\mathrm{x} \mid g\ v]\mathrm{x} \\
&\qquad \mid \equiv_{(UA\mu)}[\mathrm{x} \mid f]\mathrm{x}[\mathrm{x} \mid g]\mathrm{x} \mid \equiv_{(AC)} u\ v
\end{aligned}$$

とする。これらが作る集合 Cnx の元は HL の接合公理であるといわれる。

この公理にも解説が必要であろう。一般に品詞 H の句 w_1, w_2 が純正でないとき，$\equiv_{(H)} w_1 w_2$ の品詞が T になるという保証はない。また上記の s, u に

ついても $s\ u$ が純正である保証はない。それでは非純正句 w と「同義」の純正句はないかといえば，それはある。適当な変数 x を用いて

(＊)　　$[\mathrm{x} \mid w]\mathrm{x}$

を作れば w と「同じ意味」の純正句となる。

公理「cnx1」が標準解釈において主張する意味は「$[\mathrm{x} \mid s]\mathrm{x}$ と表現された A から B への「関数」s が「合成」または「関数として」u に左から作用してできたものと解釈されるものが $s\ u$ と同義の $[\mathrm{x} \mid s\ u]\mathrm{x}$ に等しい」である。

公理「cnx2」が標準解釈において主張する意味を簡単にいえば「s，t が等しいことが言え，u，v が等しいことが言えれば，$s\ u$，$t\ v$ も等しい」である。ただ s，t，$s\ u$，$t\ v$ は純正とは限らないので，(＊)の様な表現が用いられているにすぎない。

公理「cnx3」についても同様である。標準解釈において主張する意味を簡単にいえば，$UC = \mathrm{T}$ のとき，「「$f \subset g$」が言え，u，v が等しいことが言えれば，「$f\ u$ ならば $g\ v$」」，$UC \neq \mathrm{T}$ のとき，「「$f \subset g$」が言え，u，v が等しいことが言えれば，「$f\ u \subset g\ v$」」である。

公理「cnx2」，公理「cnx3」はそれぞれ「等号導入」，「順序導入」と対をなすものである。

6）代入公理． s を品詞 A の純正句，x，t を各々の品詞が等しい任意の変数と純正句，代入 $[s][\mathrm{x}][t]$ が適正とする。このとき

$$\mathrm{subax}(s, \mathrm{x}, t) = \equiv_{(A)} [\mathrm{x} \mid s]t\ \mathrm{sub}(s, \mathrm{x}, t)$$

としこれを HL の公理とする。

7）文公理． σ，τ，υ を文とするとき，

$$\begin{aligned}
\mathrm{sentax1}(\sigma, \tau) &= \Rightarrow \sigma\ \tau[\sigma]\tau, \\
\mathrm{sentax2}(\sigma) &= \sigma \mid \Rightarrow \Upsilon\,\sigma, \\
\mathrm{sentax3}(\sigma, \tau) &= \vee \sigma\ \tau \mid \sigma, \\
\mathrm{sentax4}(\sigma, \tau) &= \vee \sigma\ \tau \mid \tau, \\
\mathrm{sentax5}(\sigma, \tau, \upsilon) &= \upsilon \mid \vee \sigma\ \tau[\sigma]\upsilon[\tau]\upsilon, \\
\mathrm{sentax6}(\sigma) &= \Upsilon \mid \sigma,
\end{aligned}$$

$$\text{sentax7}(\sigma) \quad = \sigma \mid \perp,$$

$$\text{sentax8}(\sigma) \quad = \sigma \mid \Rightarrow\Rightarrow \sigma \perp \perp$$

とする。これらが作る集合 Sentax の元は HL の文公理であるといわれる。sentax8(σ) は2重否定の法則（排中律と同値）である。

1）～7）の公理を HL の公理系と呼び HLaxiom と表すことにする。即ち,

$$\text{HLaxiom} = \text{Equ} \cup \text{Ord} \cup \text{Equin} \cup \text{Ordin} \cup \text{Cnx} \cup \text{Subax} \cup \text{Sentax}$$

である。ここに

$$\begin{aligned}\text{Equin} = \{&\text{equin}(s, t, \mathrm{x})\ ;\ s, t \in \text{Pphr and x} \in \text{Var and}\\ &(\text{for some } A, C \in \text{Log}, \text{wcf}(s) = \text{wcf}(t) = AC\mu\\ &\text{and wcf}(\mathrm{x}) = C)\text{and}\\ &\text{list22}(s, \mathrm{x}) = \text{list22}(t, \mathrm{x}) = \mathrm{E}\},\\ \text{Ordin} = \{&\text{ordin}(f, g, \mathrm{x})\ ;\ f, g \in \text{Pphr and x} \in \text{Var and}\\ &(\text{for some } U \in \text{Plog and } C \in \text{Log},\\ &\text{wcf}(f) = \text{wcf}(g) = UC\mu \text{ and wcf}(\mathrm{x}) = C)\text{and}\\ &\text{list22}(f, \mathrm{x}) = \text{list22}(g, \mathrm{x}) = \mathrm{E}\},\\ \text{Subax} = \{&\text{subax}(s, \mathrm{x}, t)\ ;\ s, t \in \text{Pphr and x} \in \text{Var and}\\ &\text{wcf}(\mathrm{x}) = \text{wcf}(t) \text{ and } [s][\mathrm{x}][t] \in \text{Right}\},\\ \text{Right} = \{&\Sigma \in \text{Subst}\ ;\ \Sigma \text{ は適正}\}\end{aligned}$$

とする。

今,

$$\text{Inference} = \{\alpha\beta\ ;\ \alpha \in \text{Sent}, \beta \in \langle\text{Premise}\rangle\}$$

と置いて Inference の部分集合 $\mathfrak{A}$ を考える。そこで，推論 $\kappa \in$ Inference が $\mathfrak{A}$ の元から推論の3変形（サブセクション2.2参照）と，あまり本質的ではないが，以下に述べる4変形—拡大推論，増推論，減推論，置換推論によって得られるとき，κ は $\mathfrak{A}$ から演繹可能であるといい,

$$\mathfrak{A} \vdash \kappa$$

で表す。追加された推論の 4 変形は以下のとおりである：

IV）拡大推論． $\alpha \in \mathrm{Sent}$, β, $\gamma \in \langle\mathrm{Premise}\rangle$で$\beta$が前提の列として$\gamma$の部分列であるとき，推論$\alpha\gamma$を推論$\alpha\beta$の拡大推論という。「推論$\alpha\beta$が正しければ，推論$\alpha\gamma$も正しい」ことは，後者の方が前提が広義増加していることから，認めざるを得ないであろう。

V）増推論． $\Gamma_1, \cdot\cdot\cdot, \Gamma_r$がそれぞれ$\Delta_1, \cdot\cdot\cdot, \Delta_r$の部分文列であり，各$q(1 \leqq q \leqq r)$ に対してΔ_qの部分文はすべてΓ_qの部分文であるとき，

$$\kappa = \tau[\Delta_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Delta_r]\sigma_r$$

を

$$\iota = \tau[\Gamma_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Gamma_r]\sigma_r$$

の増推論という。ここに$\tau, \sigma_1, \cdot\cdot\cdot, \sigma_r$は任意の文である。「推論$\iota$が正しければ，推論$\kappa$も正しい」ことは，前者から後者に移るとき増やされた前提の仮定はすべて前者においても出てくるものであることから，認めざるを得ないであろう。

VI）減推論． $\alpha \in \mathrm{Sent}$, $\beta, \gamma \in \langle\mathrm{Premise}\rangle$で$\beta$が前提の列として$\gamma$の部分列であり，しかも前提列$\gamma$に出てくる推論はすべて$\beta$に出てくるとき，推論$\alpha\beta$を推論$\alpha\gamma$の減推論という。「推論$\alpha\gamma$が正しければ，推論$\alpha\beta$も正しい」ことは，前者から後者に移るとき除かれた前提はすべて前者において重複したものであることから，やはり認めざるを得ないであろう。

VII）置換推論． $\tau, \sigma_q \in \mathrm{Sent}(1 \leqq q \leqq r)$， $\Gamma_q, \Delta_q \in \mathrm{Stsq}$， $\beta \in \langle\mathrm{Premise}\rangle$ に対して

$$\iota = \tau[\Gamma_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Gamma_r]\sigma_r,$$

$$\kappa = \tau[\Delta_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Delta_r]\sigma_r,$$

$$\lambda = \tau\beta$$

と置く。各qに対して文列Δ_qが文列Γ_qから文のならび換えによって得られ，前提列βが前提列 $[\Delta_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Delta_r]\sigma_r$から前提のならび換えによって得られるとき，推論$\lambda$を推論$\iota$の置換推論という。「推論$\iota$が正しければ，推論$\lambda$も正しい」ことは，推論が前提の順序によらないこと，かつまた各々の

前提においては，前提の仮定の順序によらないことと同義であり，これも認めるべきであろう。

$\varkappa$ が $\mathfrak{A}$ から演繹可能であること（$\mathfrak{A} \vdash \varkappa$ であること）は条件「1）演繹図 Λ の使用推論はすべて $\mathfrak{A}$ の元である。2）$\varkappa$ は conclusion(Λ) から合成推論以外の推論の6変形によってられる。」を満たす $\Lambda \in \mathrm{Ddctm}$ が存在することと同値である。このとき，Λ を $\mathfrak{A} \vdash \varkappa$ の証明という。

一般に Inference の部分集合を体系（system）と呼ぶことにする。体系 $\mathfrak{A}$ が形式的(formal)であるとは，$\mathfrak{A}$ が自然数全体 $\mathfrak{N}$ の部分集合として原始帰納的（primitive recursive）であることをいう。HLaxiom は原始帰納的であるから形式的体系である。

体系 $\mathfrak{A}$ に対して，

$$\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}) = \{\varkappa \in \mathrm{Inference}\ ;\ \mathfrak{A} \vdash \varkappa\}$$

を $\mathfrak{A}$ の演繹閉包と呼ぶ。体系 $\mathfrak{A}$ が無矛盾であるというのは

$$\mathrm{not}(\mathrm{Sent} \subset \mathrm{Cl}(\mathfrak{A}))$$

が成り立つことをいう。HLaxiom の無矛盾性は後に示されるであろう。

定理 2.6.1. $\mathfrak{A}$ が体系で，$\varkappa$，$\lambda \in \mathrm{Inference}$ のとき，

$$\mathfrak{A} \vdash \varkappa,\ \mathfrak{A} \cup \{\varkappa\} \vdash \lambda \quad \text{implies} \quad \mathfrak{A} \vdash \lambda$$

が成立する。

証明 (meta). $\mathfrak{A} \vdash \varkappa$, $\mathfrak{A} \cup \{\varkappa\} \vdash \lambda$ を仮定するとそれぞれの証明 K，Λ が存在する。$\varkappa \in \mathfrak{A}$ のときは Λ は $\mathfrak{A} \vdash \lambda$ の証明でもあるから $\mathfrak{A} \vdash \lambda$ が成り立つ。従って $\varkappa$ は $\mathfrak{A}$ の元でないとしてよい。$\varkappa$ が演繹図 Λ の使用推論でないときも，同様に $\mathfrak{A} \vdash \lambda$ が成り立つ。$\varkappa$ が演繹図 Λ の使用推論のとき $\varkappa$ に対応する pi(Λ) の家族の数を $n > 0$ とし，それら n 個の家族のうちの1つを

$$(Y, X_1, \cdots, X_r)$$

とする。そこで各 q ($q \in \{1, \cdots, r\}$) について，X_q が pi(Λ) の極上者ならば $\Pi_q = \mu$ とする。X_q が極上者でないならば演繹図の作り方から

$$\mathrm{ex2}(\mathrm{pi}(\Lambda),\ \mathrm{app}(\mathrm{pi}(\Lambda), \mu, X_q) \dot{-} 1, m) \in \mathrm{pi}(\mathrm{Ddctm})$$

となる m がただ1つだけ存在する。よって，このときは上式の左辺を Π_q とする。さらに $q \in \{1, \cdot\cdot\cdot, r\}$ に対して

$$L_q' = \mathrm{ex2}(\mathrm{list}(\Lambda), X_q \dot{-} 1,\ \mathrm{ord}(\Pi_q)),$$
$$L_q = [\mathrm{coex}(\mathrm{core}(\mathrm{ex}(L_q', 1)), 1)]\mathrm{coex}(L_q', 1),$$
$$\Lambda_q = \mathrm{comp}(\Pi_q, L_q)$$

とすれば，Λ_q は X_q が極上者であるときを除いて演繹図となる。X_q が極上者のとき Λ_q は文である。我々は Λ_q のことを Λ における X_q の上部図と呼ぶことにする。これは一般に演繹図 Λ と自然数 X について定義される。
即ち，$1 < X \leqq \mathrm{ord}(\mathrm{pi}(\Lambda))$ のときは $\mathrm{upper}(\Lambda, \mathrm{X})$（上部図）を上記のように定義し，$X = 1$ のときは $\mathrm{upper}(\Lambda, X) = \Lambda$，その他では $=$ E とするのである。

次に $\mathfrak{A} \vdash \varkappa$ の証明 K の中の極上部前提 $[\Gamma_1]\sigma_1 \cdot\cdot\cdot [\Gamma_r]\sigma_r$ のすぐ後ろにそれぞれ「Λ_q から冒頭文を除いたもの」($q = 1, \cdot\cdot\cdot, r$) を挿入して演繹図 K' を作る。

最後に $\mathfrak{A} \cup \{\varkappa\} \vdash \lambda$ の証明 Λ を

$$\Lambda = st\Gamma u,$$
$$s = (\Lambda \text{ の} \mathrm{app}(\Lambda, \mu, Y) \dot{-} 1 \text{番目までの Radical の元の列}),$$
$$t = \mathrm{E},\ \mathrm{if}\, Y = 1\,;$$
$$= \mathrm{ex}(\mathrm{core}(\mathrm{exx}(\mathrm{list}(\Lambda), Y)), 1),\ \mathrm{if}\, Y > 1,$$
$$\Gamma = \mathrm{upper}(\Lambda, Y),$$
$$u \in \langle \mathrm{Radical} \rangle$$

の様に分けて

$$\Lambda' = stK'u$$

とすれば，Λ' も $\mathfrak{A} \cup \{\varkappa\} \vdash \lambda$ の証明であるが，使用された推論 $\varkappa$ の数は $n-1$ である。この操作を繰り返せば $\mathfrak{A} \vdash \lambda$ の証明を得ることができる。
証明終り。

定理 2.6.2. $\mathfrak{A} \subset$ Inference のとき，
1）$\mathfrak{A} \subset \mathrm{Cl}(\mathfrak{A})$，2）$\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(\mathfrak{A})) = \mathrm{Cl}(\mathfrak{A})$

が成立する。

証明 (meta). 1) $\varkappa \in \mathfrak{A}$とすれば,

$$\varkappa = \tau[\Gamma_1]\sigma_1 \cdot \cdot \cdot [\Gamma_r]\sigma_r$$

$$(\tau, \sigma_1, \cdot \cdot \cdot, \sigma_r \in \mathrm{Sent}, \Gamma_1, \cdot \cdot \cdot, \Gamma_r \in \langle \mathrm{Sent} \rangle, \quad r \geqq 0)$$

の形に書けるが，このとき

$$K = \tau \uparrow [\Gamma_1]\sigma_1 \cdot \cdot \cdot [\Gamma_r]\sigma_r \downarrow \in \mathrm{Ddctm}$$

は $\mathfrak{A} \vdash \varkappa$ の証明である。従って，$\mathfrak{A} \vdash \varkappa$ 即ち $\varkappa \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{A})$.

2) $\mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(\mathfrak{A})) \subset \mathrm{Cl}(\mathfrak{A})$をいえばよい。$\varkappa \in \mathrm{Cl}(\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}))$とすれば$\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}) \vdash \varkappa$. 従って $\mathrm{Cl}(\mathfrak{A}) \vdash \varkappa$ の証明 K がある。演繹図 K で使用された $\mathfrak{A}$ の元以外の推論の集合を $L = \{\lambda_1, \cdot\cdot\cdot, \lambda_r\}$ とする。$L = \phi(r = 0)$ のときは当然，$\mathfrak{A} \vdash \varkappa$, $\varkappa \in \mathrm{Cl}(\mathfrak{A})$ である。$r > 0$ としよう。このとき

$$\mathfrak{A} \cup \{\lambda_1, \cdot \cdot \cdot, \lambda_{r-1}\} \vdash \lambda_r,$$

$$\mathfrak{A} \cup \{\lambda_1, \cdot \cdot \cdot, \lambda_{r-1}\} \cup \{\lambda_r\} \vdash \varkappa$$

が成立するので，前定理より

$$\mathfrak{A} \cup \{\lambda_1, \cdot \cdot \cdot, \lambda_{r-1}\} \vdash \varkappa$$

である。これを繰り返せば $\mathfrak{A} \vdash \varkappa$ が得られる。証明終り。

紙面の都合上，つづきは次回に譲りたい。