

有限容量同時サービス並進待ち行列の解析

— 共有待合室モデル —

中 村 隆 志
菱 川 善 文

1. まえがき

独立な到着過程の複数のタイプの客が到着し、すべてのタイプの客が揃ったときに、扱ひ者が各タイプの客を一人ずつ受け入れて同時にサービスを行うような待ち行列を同時サービス並進待ち行列と呼ぶ⁽²⁾。例としては、複数の下請会社からの部品の到着を待ち、それらのすべてが揃ったときに組み立てを行う工場やデータフロー計算機などが挙げられる。この待ち行列システムはトラフィック密度の大小によらず、本質的に不安定であることが知られている^{(1)・(2)}。このため、現実のシステムにおいては何らかの安定化のための方策が必要となる。これには入力制御（到着率の制御）、客の途中放棄、待合室の容量制限などが考えられる。文献(2)~(4)には入力制御、文献(5)には客の途中放棄のある場合のシステムの特徴が詳細に述べられている。容量制限に関しては、文献(2)において、シミュレーションによるシステム特性が簡単に考察され、又、文献(6), (7), (8)では理論解析が行なわれている。これらの容量制限モデルでは、客のタイプ毎に個別の待合室を持っている。これは、組立工場でいえば、部品毎に個別の倉庫又は部品置き場があるシステムに対応する。しかし、一つの大きな倉庫又は部品置き場にすべての種類の部品を一緒に格納するような場合も考えられる。即ち、到着するすべてのタイプの客が待合室を共有するシステムである。

本論文では、この共有待合室を持つ有限容量同時並進サービス待ち行列を文献(8)の個別待合室の場合と同様のモデル化により、連続時間マルコフ連鎖として解析する。解析を容易とするため、指数サービスで二つのポアソン到着過程を持つモデル（2並進モデル）のみを扱う。

有限容量待合室の場合、待合室が満杯のときに到着した客は当然ながら待合室には入ることはできない。2並進の共有待合室モデルで、対を作っていない一方のタイプの客が存在する状態で待合室が満杯になった場合には、本来、対を作るために必要な他方のタイプの客の到着も許されなくなり、個別待合室モデルに比べて、あふれ率の増加やシステムのスループットの低下等が予想される。そこで、本論文ではこれを避けるための一つの制御法として、追い出し制御（到着時に待合室満杯の場合には対になっていない相手方の客を追い出す）を提案する。

追い出し制御を行わないモデル、及び、追い出し制御を行うモデルのそれぞれについて、平均システム内容数、あふれ率、受け入れ客数率等を求め、その特性を明らかにする。これにより、追い出し制御の効果も検証する。又、文献(8)の個別待合室の場合との比較も行う。

2. モ デ ル

本論文で対象とするモデルは図1のようなものである。二つのタイプ（タイプ1、タイプ2）の客が共有待合室 Q にそれぞれ到着率 λ_1 、 λ_2 でポアソン到着する。扱いは待合室に両方のタイプの客がそれぞれ少なくとも一人いる

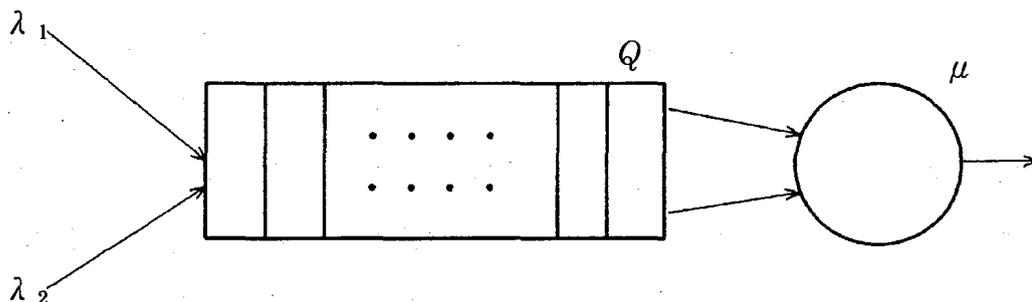


図1 有限容量同時サービス並進待ち行列（共有待合室）

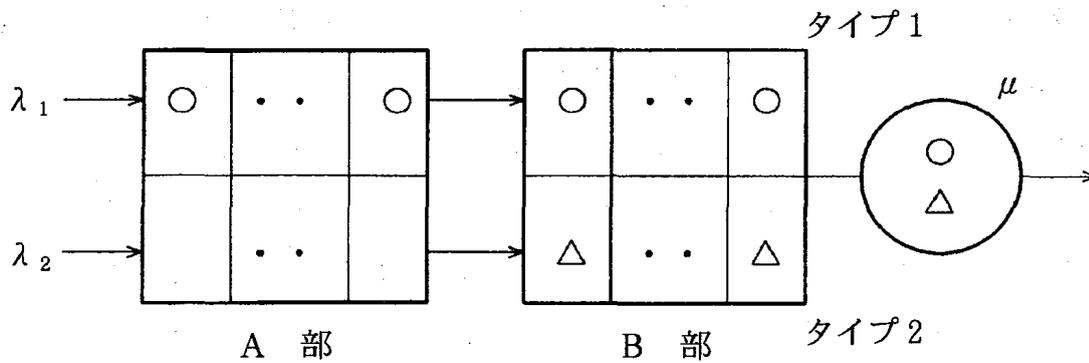


図2 図1に等価なモデル

ときに、先着順に両方のタイプから一人ずつ客を受け入れて、同時にサービス率 μ の指数サービスを行う。システム全体が空の状態のときに到着した客は、サービス施設内で他方のタイプの客の到着を待つ。サービス中の客を含めた待合室 Q の容量は $2M$ である。したがって、両方のタイプの客の合計が $2M$ 人までの到着が許されるが、片方のタイプの客だけで $2M$ 人を占めることはできない。これは、デッドロックを防ぐため、サービス施設内では、他方のタイプの場所を占有できないことにするためである。したがって、各タイプの最大収容人数はそれぞれ $2M - 1$ 人となる。

解析の便宜のため、文献(2), (8)と同様に、図1のシステムを図2のような等価なモデルに変形する。これは図1の Q を次のようにA部とB部に分けたものである。B部にはタイプ1, タイプ2の揃った客が対をなして並ぶ(サービス中の対も含む)。A部には対となる他方のタイプの客が未到着である客が並ぶ。したがって、A部には、両タイプの客がいることはない。又、A部からB部への移動には時間を要しないものとする。タイプ1, タイプ2のどちらも、A部とB部にいる客数の和は $2M - 1$ 人を越えない。

3. 追い出し制御

この共有待合室モデルでは、システム全体が最大収容人数である $2M$ 人で占められたら、システムへのそれ以上の到着は許されない。対を作っていない一方のタイプの客が存在する状態(等価モデルでA部のタイプ1, タイプ2のい

ずれかの客数が0ではない)で待合室が満杯になった場合には、本来、対を作るために必要な他方のタイプの客の到着も許されなくなり、個別待合室モデルに比べて、あふれ率の増加やシステムのスループットの低下等が予想される。そこで、本論文ではこれを避けるための一つの制御法として、追い出し制御⁽⁹⁾を採用したモデルを提案し、その効果を考察する。これは、等価モデルのA部に一方のタイプの客が存在する状態で待合室が満杯の場合に、A部の客数が0の方のタイプの客が到着したときには、A部を占めている方のタイプの客を一人追い出す。そして、それにより空いた待合室の場所に到着した他方のタイプの客を取り入れるものであり、積極的に客の対を作る制御である。

4. 状態の定義と推移

図2の等価モデルで、ある時刻におけるタイプ1、タイプ2の客数を n_1 , n_2 とし、A部の状態を

$$j = n_1 - n_2 \quad (1)$$

で表わす。又、B部の客の対数を k で表わす。システム全体の挙動はこれらの組 (j, k) を状態とする連続時間マルコフ連鎖により、表わすことができる^{(2)・(8)}。非制御(追い出し制御を行わない)モデル、追い出し制御モデルのいずれも状態空間 S は次のようになる。

$$S = \{(j, k) \mid j = -(2M-1), -(2M-2), \dots, -1, 0, 1, \dots, 2M-2, 2M-1; k = 0, 1, \dots, M; |j| + 2k \leq 2M\} \quad (2)$$

総状態数は $2M^2 + 3M - 1$ 個である。

非制御モデルの状態遷移は表1のようになる。また、追い出し制御モデルの状態遷移は表1の※印の部分を表2のように変更したものとなる。図3の状態遷移速度図で○印の付いた遷移を除いたものが、非制御モデルを表し、○印の部分が、追い出し制御により追加される状態遷移である。

表1 非制御モデルの状態遷移

現在状態	発生事象	遷移先	遷移速度
$(0, 0)$	タイプ1の客到着 タイプ2の客到着	$(1, 0)$ $(-1, 0)$	λ_1 λ_2
$(2M-1, 0)$	タイプ2の客到着	$(2M-2, 1)$	λ_2
$(-(2M-1), 0)$	タイプ1の客到着	$(-(2M-2), 1)$	λ_1
$(0, M)$	サービス終了	$(0, M-1)$	μ
$(j, 0)$ $j = 1, 2, \dots, 2M-2$	タイプ1の客到着 タイプ2の客到着	$(j+1, 0)$ $(j-1, 1)$	λ_1 λ_2
$(j, 0)$ $j = -1, -2, \dots, -(2M-2)$	タイプ1の客到着 タイプ2の客到着	$(j+1, 1)$ $(j-1, 0)$	λ_1 λ_2
$(0, k)$ $k = 1, 2, \dots, M-1$	サービス終了 タイプ1の客到着 タイプ2の客到着	$(0, k-1)$ $(1, k)$ $(-1, k)$	μ λ_1 λ_2
※ (j, k) $k = 1, 2, \dots, M-1$ $j = 2M-2k$	サービス終了	$(j, k-1)$	μ
※ (j, k) $k = 1, 2, \dots, M-1$ $j = -(2M-2k)$	サービス終了	$(j, k-1)$	μ
(j, k) $j = 1, 2, \dots, 2M-3$ $k = 1, 2, \dots, M-1$ $j+2k < 2M$	サービス終了 タイプ1の客到着 タイプ2の客到着	$(j, k-1)$ $(j+1, k)$ $(j-1, k+1)$	μ λ_1 λ_2
(j, k) $j = -1, -2, \dots, -(2M-3)$ $k = 1, 2, \dots, M-1$ $-j+2k < 2M$	サービス終了 タイプ1の客到着 タイプ2の客到着	$(j, k-1)$ $(j+1, k+1)$ $(j-1, k)$	μ λ_1 λ_2

表2 追い出し制御モデルの状態遷移の変更点

現在状態	発生事象	遷移先	遷移速度
(j, k) $k = 1, 2, \dots, M-1$ $j = 2M-2k$	サービス終了 タイプ2の客到着	$(j, k-1)$ $(j-2, k+1)$	μ λ_2
(j, k) $k = 1, 2, \dots, M-1$ $j = -(2M-2k)$	サービス終了 タイプ1の客到着	$(j, k-1)$ $(j+2, k+1)$	μ λ_1

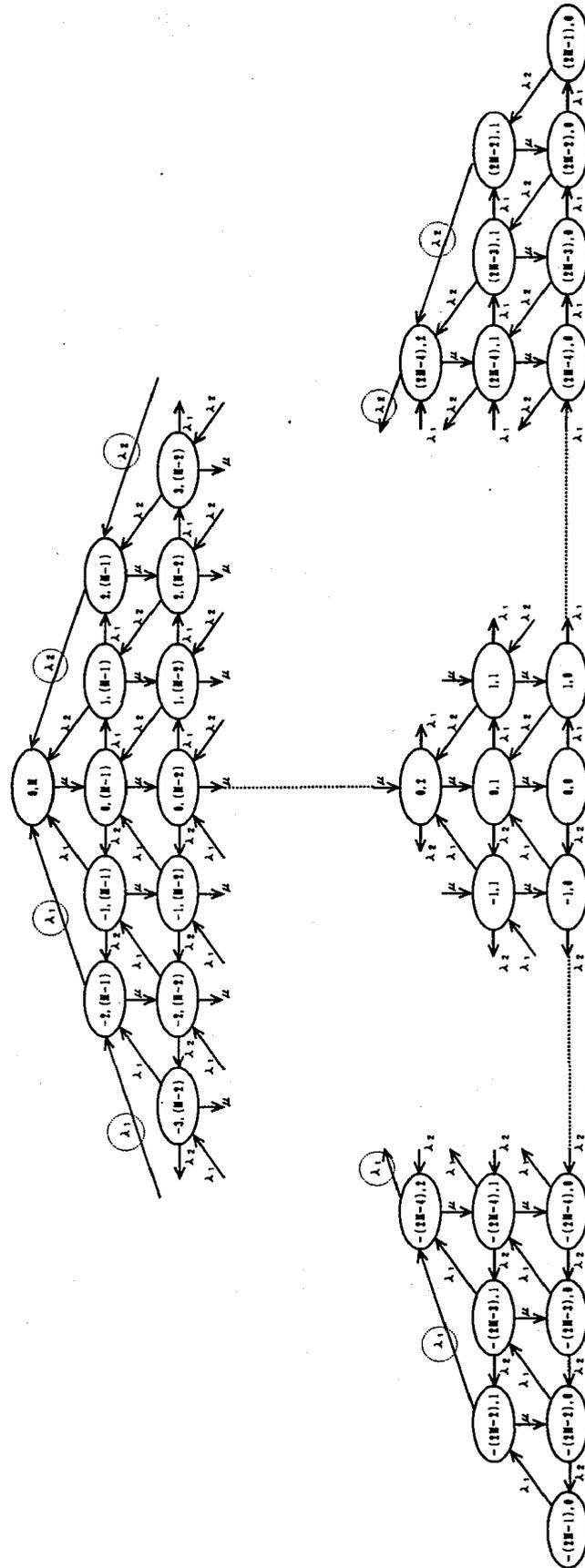


图3 状態遷移速度図

5. 解 析

5. 1 平衡状態確率

各状態 (j, k) の平衡状態確率 $\pi(j, k)$ は次式で求められる。

$$\pi R = 0 \quad (3)$$

$$\sum_{(j, k)} \pi(j, k) = 1 \quad (4)$$

但し、 π は $\pi(j, k)$ の行ベクトル、 R は状態遷移速度行列である。

ここで、次のような確率を考える。

- $\pi_{iA, m}$: 平衡状態でタイプ i の客が A 部に m 人いる確率
($0 \leq m \leq 2M-1, i=1, 2$)
- $\pi_{iB, m}$: 平衡状態でタイプ i の客が B 部に m 人いる確率
($0 \leq m \leq M, i=1, 2$)
- $\pi_{iT, m}$: 平衡状態でタイプ i の客が A 部, B 部合計で m 人いる確率
($0 \leq m \leq 2M-1, i=1, 2$)

これらは $\pi(j, k)$ より、次のように求められる。

$$\pi_{1A, 0} = \sum_{j=-2M-1}^0 \pi(j, 0) + \sum_{k=1}^M \sum_{j=-2(M-k)}^0 \pi(j, k) \quad (5)$$

$$\pi_{1A, 2m-1} = \sum_{k=0}^{M-m} \pi(2m-1, k) \quad ; m=1, 2, \dots, M \quad (6)$$

$$\pi_{1A, 2m} = \sum_{k=0}^{M-m} \pi(2m, k) \quad ; m=1, 2, \dots, M-1 \quad (7)$$

$$\pi_{2A, 0} = \sum_{j=0}^{2M-1} \pi(j, 0) + \sum_{k=1}^M \sum_{j=0}^{2(M-k)} \pi(j, k) \quad (8)$$

$$\pi_{2A, 2m-1} = \sum_{k=0}^{M-m} \pi(-(2m-1), k) \quad ; m=1, 2, \dots, M \quad (9)$$

$$\pi_{2A, 2m} = \sum_{k=0}^{M-m} \pi(-2m, k) \quad ; m=1, 2, \dots, M-1 \quad (10)$$

$$\pi_{1B,0} = \pi_{2B,0} = \sum_{j=-2^{2M-1}}^{2^{2M-1}-1} \pi(j, 0) \quad (11)$$

$$\pi_{1B,m} = \pi_{2B,m} = \sum_{j=-2^{2(M-m)}}^{2^{2(M-m)}-1} \pi(j, m) \quad ; m=1, 2, \dots, M \quad (12)$$

$$\pi_{1T,0} = \sum_{j=-2^{2M-1}}^0 \pi(j, 0) \quad (13)$$

$$\pi_{1T,m} = \sum_{j=0}^m \pi(j, m-j) + \sum_{j=-2^{2(M-m)}}^{-1} \pi(j, m) \quad ; m=1, 2, \dots, M \quad (14)$$

$$\pi_{1T,m} = \sum_{j=2^{2(M-M)}}^m \pi(j, m-j) \quad ; m=M+1, M+2, \dots, 2M-1 \quad (15)$$

$$\pi_{2T,0} = \sum_{j=0}^{2^{2M-1}-1} \pi(j, 0) \quad (16)$$

$$\pi_{2T,m} = \sum_{j=-m}^0 \pi(j, m+j) + \sum_{j=1}^{2^{2(M-m)}-1} \pi(j, m) \quad ; m=1, 2, \dots, M \quad (17)$$

$$\pi_{2T,m} = \sum_{j=-m}^{-2^{2(M-M)}} \pi(j, m+j) \quad ; m=M+1, M+2, \dots, 2M-1 \quad (18)$$

但し

$$\sum_a^b \pi(j, m) = 0 \quad ; a > b \quad (19)$$

と定義する。

5. 2 平均システム内容数

タイプ i ($i=1, 2$) の客の行列のA部, B部, 及び, 全体 (A部とB部の合計) の平均客数 L_{iA} , L_{iB} , L_{iT} は次のように求められる。

$$L_{iA} = \sum_{m=0}^{2M-1} m \pi_{iA,m} \quad ; i=1, 2 \quad (20)$$

$$L_{iB} = \sum_{m=0}^M m \pi_{iB,m} \quad ; i=1, 2 \quad (21)$$

$$L_{iT} = \sum_{m=0}^{2M-1} m \pi_{iT,m} \quad ; i=1, 2 \quad (22)$$

又,

$$L_{1B} = L_{2B} \quad (23)$$

$$L_{iT} = L_{iA} + L_{iB} \quad ; i=1, 2 \quad (24)$$

である。

5. 3 あふれ率

タイプ i ($i=1, 2$) の客のあふれ率 B_i (待合室がすべて塞がっていて待合室に入れない確率) は、次のようになる。

・非制御モデルの場合

$$B_1 = \sum_{j=-(M-1)}^{M-1} \pi(2j, M-|j|) + \pi(2M-1, 0) \quad (25)$$

$$B_2 = \sum_{j=-(M-1)}^{M-1} \pi(2j, M-|j|) + \pi(-(2M-1), 0) \quad (26)$$

・追い出し制御モデルの場合

$$B_1 = \sum_{j=0}^{M-1} \pi(2j, M-j) + \pi(2M-1, 0) \quad (27)$$

$$B_2 = \sum_{j=-(M-1)}^0 \pi(2j, M+j) + \pi(-(2M-1), 0) \quad (28)$$

5. 4 置換率

追い出し制御モデルで待合室が満杯のとき、タイプ i ($i=1, 2$) の客が、

他方のタイプの客の到着により追い出される確率を置換率 A_i と定義する。

$$A_1 = \sum_{j=1}^{M-1} \pi(2j, M-j) \quad (29)$$

$$A_2 = \sum_{j=-(M-1)}^{-1} \pi(2j, M+j) \quad (30)$$

5. 5 受け入れ客数率

微小時間 Δt 内にタイプ i の客がシステムに受け入れられる客数は、非制御モデル、及び、文献(8)の個別待合室モデルでは、システム内に運ばれた客数であり、

$$\lambda_i(1 - B_i) \Delta t \quad (31)$$

となる。

一方、追い出し制御モデルの場合は、その待ち行列で置換が起こり、追い出される客もあるので、

$$\lambda_1(1 - B_1) \Delta t - \lambda_2 A_1 \Delta t \quad ; \text{タイプ 1} \quad (32)$$

$$\lambda_2(1 - B_2) \Delta t - \lambda_1 A_2 \Delta t \quad ; \text{タイプ 2} \quad (33)$$

となる。

これらを Δt で割った値を、各タイプの客の受け入れ客数率 C_i ($i=1, 2$) と定義する。

6. 数値例

興味深い対称システム ($\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$) の場合の数値例を図4～図10に示す。

対称システムでは状態推移の対称性から、タイプ1とタイプ2の客に関する各特性量は等しくなる。

$$\pi_{1A,m} = \pi_{2A,m} \quad ; m = 0, 1, 2, \dots, 2M-1 \quad (34)$$

$$\pi_{1B,m} = \pi_{2B,m} \quad ; m = 0, 1, 2, \dots, M \quad (35)$$

$$\pi_{1T,m} = \pi_{2T,m} \quad ; m = 0, 1, 2, \dots, 2M-1 \quad (36)$$

$$L_{1A} = L_{2A} \quad (37)$$

$$L_{1T} = L_{2T} \quad (38)$$

$$B_1 = B_2 \quad (39)$$

$$A_1 = A_2 \quad (40)$$

$$C_1 = C_2 \quad (41)$$

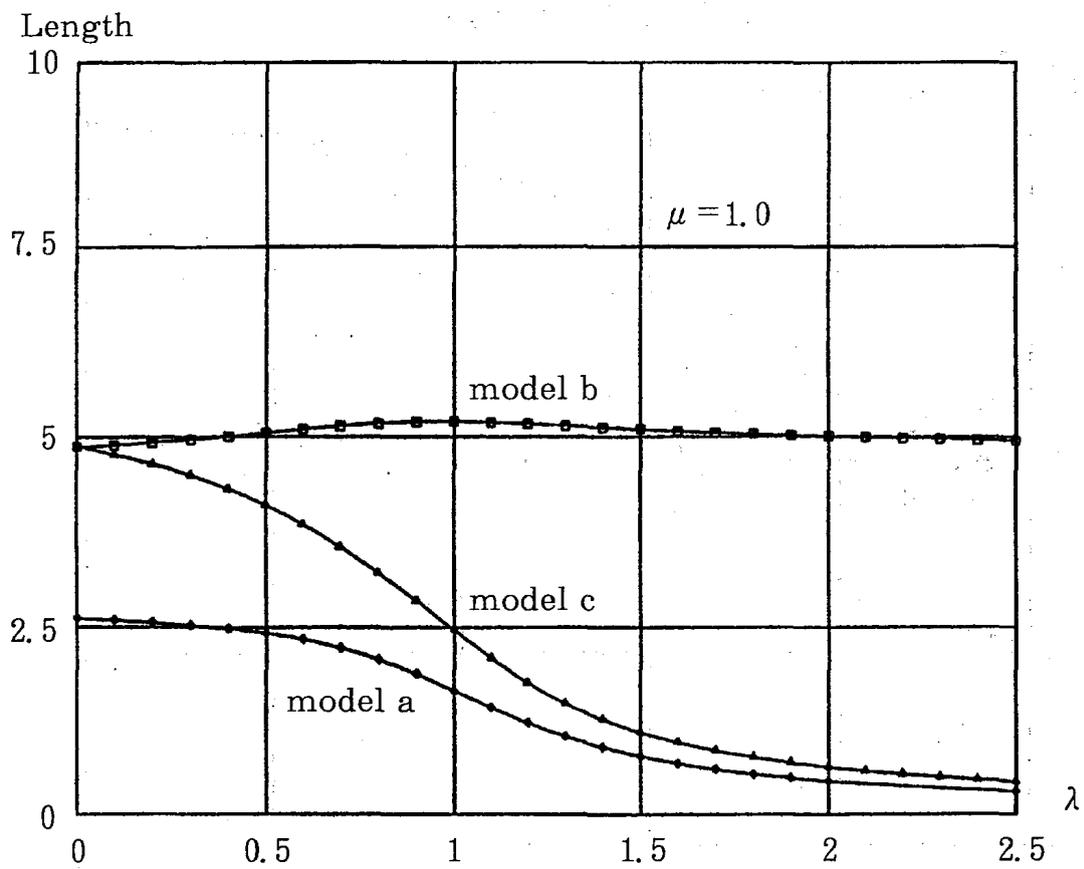


図4 A部の平均客数 L_{1A}

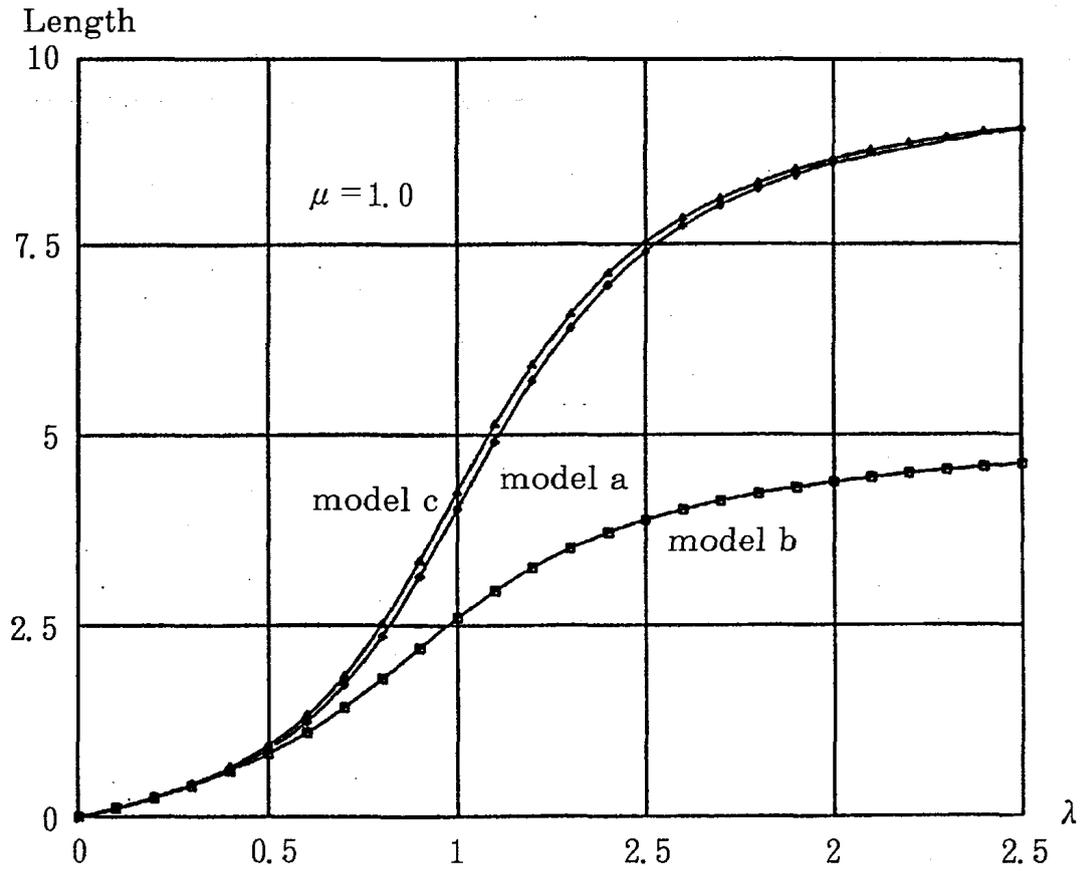


図5 B部の平均客数 L_{iB}

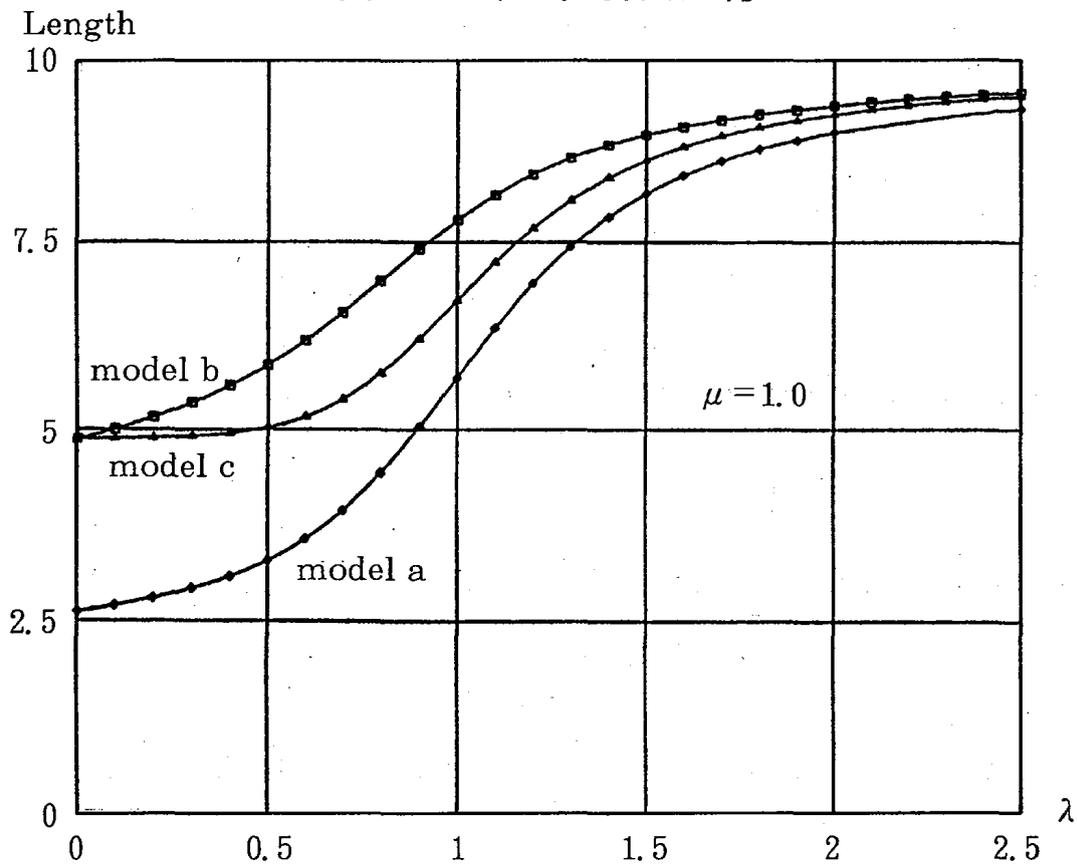


図6 平均システム内容数 L_{iT}

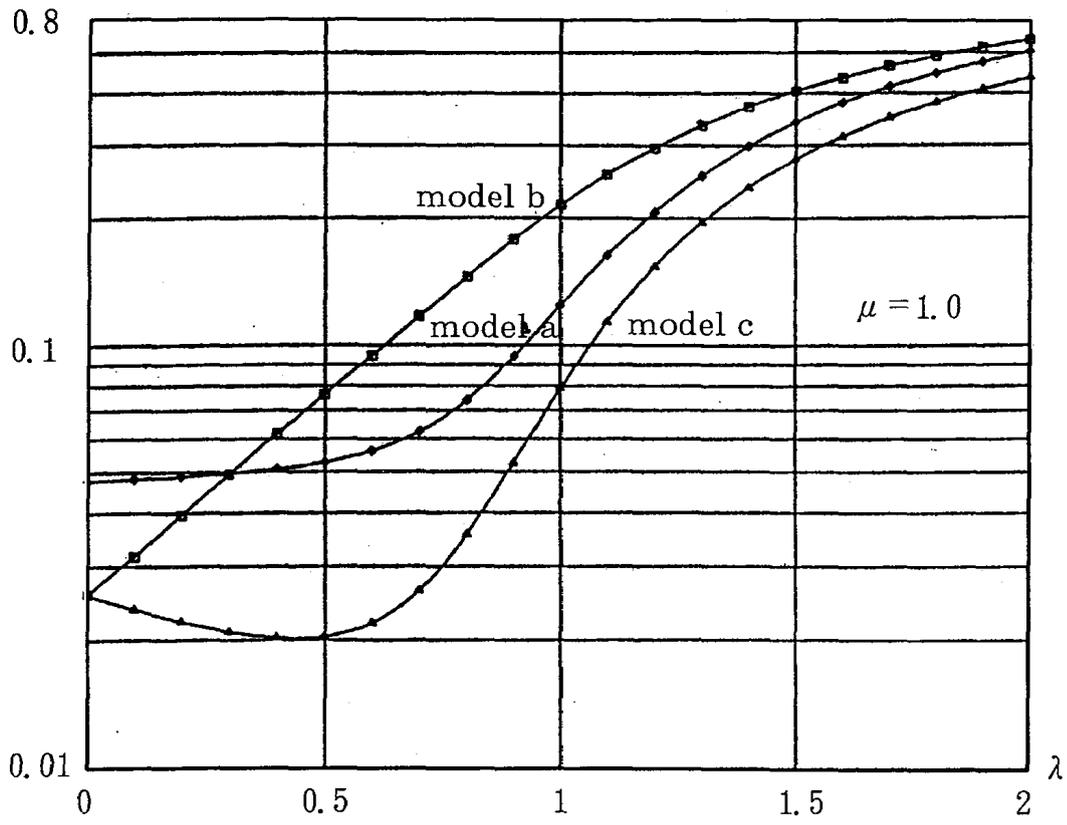


図7 あふれ率 B_i ($M=10$)

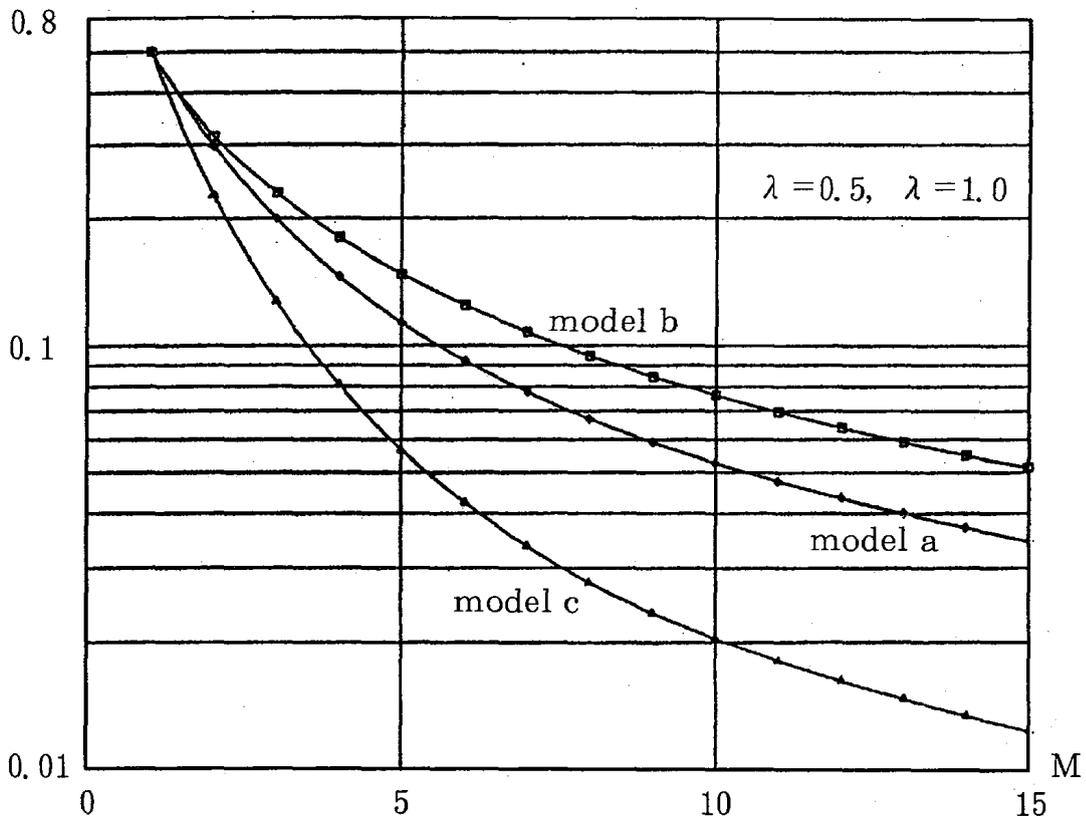


図8 あふれ率 B_i ($\lambda = 0.5$)

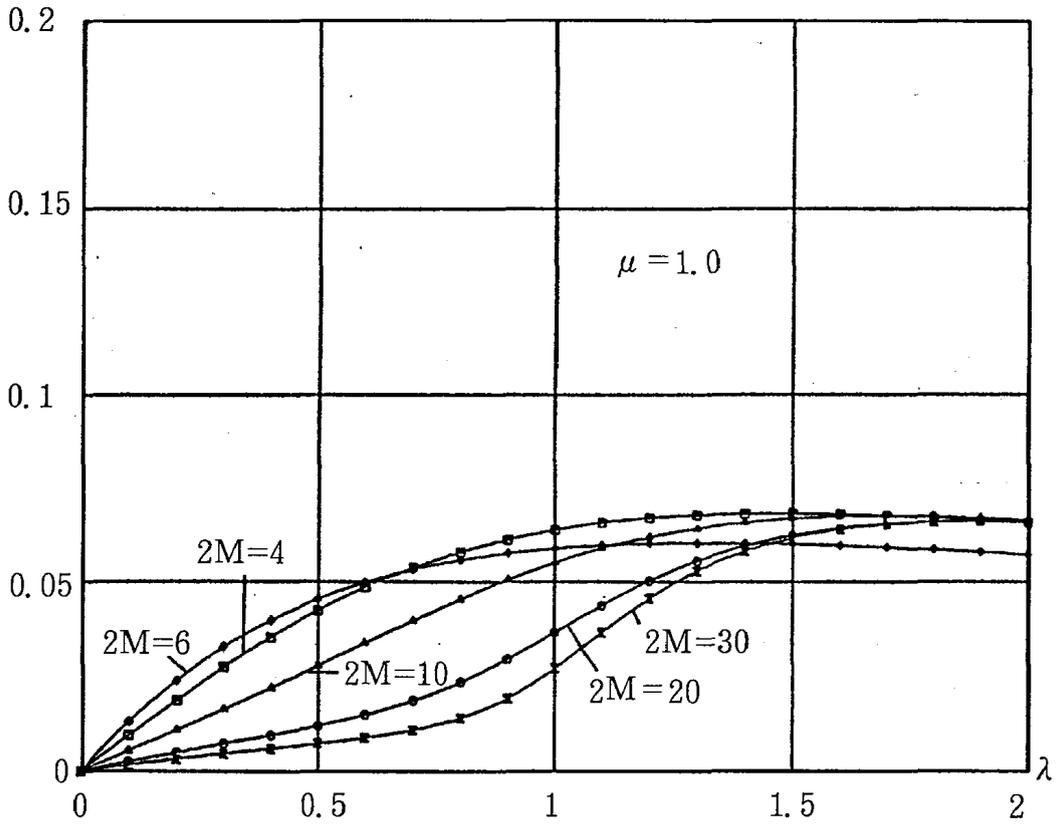


图9 置換率 A_i

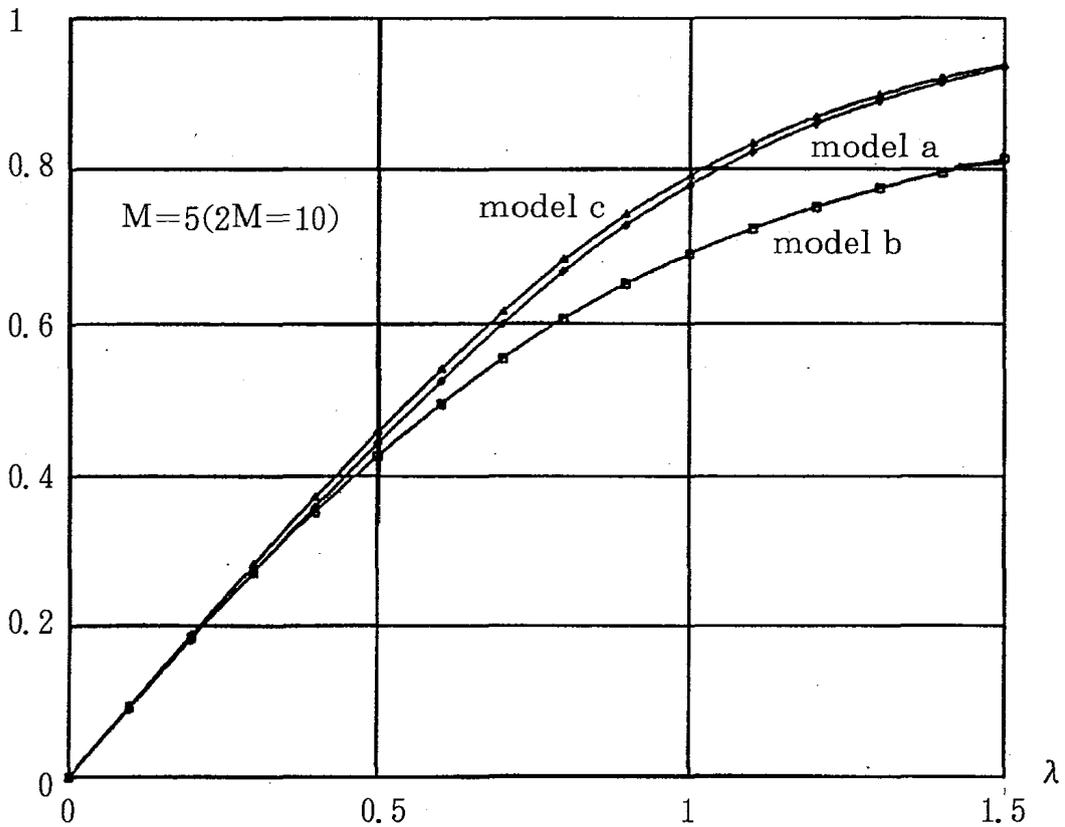


图10 受け入れ客数率 C_i

なお、図の説明の都合上、以後、

- ・ 個別待合室モデル・・・model a
- ・ 共有待合室非制御モデル・・・model b
- ・ 共有待合室追い出し制御モデル・・・model c

のように呼ぶこととする。model a の数値例は文献（8）の解析結果を利用している。

図4～図6は $M=10$ （ $2M=20$ ）の場合の model a, model b, model c の到着率 λ に対する L_{iA} , L_{iB} , L_{iT} を比較したものである。個別待合室の場合は、到着率が大きくなるにつれて、A部の客数は減少し、逆にB部が増加する。しかし、共有待合室非制御モデルの場合は、到着率が大きくなっても、A部の客数はほぼ一定であり、B部の増加の割合も個別待合室の場合に比べて少ない。これは、3.での予想どおりの結果である。共有待合室追い出し制御モデルでは、到着率の増加と共に、A部の客数は減少して個別待合室の場合の客数に近づいている。また、B部の客数も、ほぼ個別待合室の場合に近い値をとることがわかる。

図7、図8はあふれ率 B_i の例である。図7では容量 M を一定として到着率 λ を変化させ、図8では逆に λ を一定とし、 M を変化されている。図7より、共有待合室非制御モデルは到着率が小さいうちは個別待合室モデルよりもあふれ率は小さいが、到着率が大きくなれば個別待合室の場合よりも大きな値をとる。これは、到着率が大きな場合、A部が増大し、客を対にするために必要な他方のタイプの客がシステムに入れないためであろう。一方、共有待合室追い出し制御モデルでは、共有待合室非制御モデル、及び、個別待合室の場合よりも小さな値となっており、追い出し制御の効果が確かめられる。又、図8より、当然ながら、あふれ率は待合室容量が大きくなれば小さくなる。

図9は、共有待合室追い出し制御モデルにおける到着率に対する置換率の関係である。

置換率はある到着率までは上昇し続けるが、それを越すと下降する傾向にある。これは到着率が上昇すればするほどシステムがB部で占められる状態(0,

M)になるからであろう。待合室容量が小さいほど状態(0, M)になりやすいので、到着率の大きいときに、待合室容量が大の場合と小の場合とで置換率が逆転している。

図10は $M=5$ ($2M=10$)の場合の、三つのモデルの到着率に対する受け入れ客数率である。共有待合室非制御モデルは他の二つのモデルよりも値が低く、共有待合室追い出し制御モデルは若干ではあるが、個別待合室モデルを上回っている。

6. むすび

二つの到着過程を持つ有限容量同時サービス並進待ち行列(共有待合室モデル)を連続時間マルコフ連鎖としてモデル化し、解析した。モデル化に際して、通常の共有待合室のモデル(非制御モデル)の他に、あふれ率の増加やシステムのスループットの低下を軽減させるための追い出し制御を取り入れたモデル(追い出し制御モデル)も考察の対称とした。平衡状態確率を計算することにより、平均システム内容数、あふれ率、置換率、受け入れ客数率等を求めた。数値例により、個別待合室モデル、共有待合室非制御モデル、共有待合室追い出し制御モデルの三つのモデルに関して、これらの諸量と到着率などの関係等を考察した。この結果、本論文で提案した追い出し制御の効果が明らかとなった。

今後の課題として、到着過程が三つ以上の一般的なモデルの解析が残されている。

文 献

- (1) J. M. Harrison : "Assembly-like queues", *J. Applied Probability*, 10, pp.354-367 (1973).
- (2) 福田明, 佐藤正二, 椋本介士 : "同時サービス並進待ち行列とその入力制御", *信学論 (A)*, J69-A, 7, pp.829-839 (1986-07).
- (3) 福田明, 佐藤正二, 椋本介士 : "同時サービス並進待ち行列の入力制御", *信学論 (A)*, J69-A, 11, pp.1310-1318 (1986-11).
- (4) 佐藤正二, 福田明 : "同時サービス並進待ち行列の入力制御における制御遅れ時間と周期観測の影響", *信学論 (A)*, J70-A, 7, pp.1018-1027 (1987-07).
- (5) 佐藤正二, 福田明 : "途中放棄のある同時サービス並進待ち行列システムについて", *信学論 (A)*, J70-A, 10, pp.1497-1500 (1987-10).
- (6) 能上慎也, 片山勁 : "データフロー制御方式における有限待合室をもつ同時処理モデルについて", *信学論 (B)*, J70-B, 10, pp.1260-1262 (1987-10).
- (7) U. Narayan Bhat : "Finite Capacity Assembly-like queues", *Queuing Systems*, 1, pp.85-101 (1986).
- (8) 中村隆志, 菱川善文 : "有限容量同時サービス並進待ち行列の解析", *小樽商大商学討究*, 43, 1・2合併号, pp.49-61 (1992-10).
- (9) L. Katzschner : Loss systems with displacing priorities, *AEÜ*, 25, pp.416-422 (1971).