

畳み込みの母数推定とモーメント法¹

Parameter Estimation of a Convolution and the Method of Moments

穴 沢 務

1 はじめに

前号 (穴沢 [1]) において, 我々は正規分布 $N(\mu, \sigma^2)$ と指数分布 $\text{Exp}(\lambda)$ の畳み込みの母数推定について考察した. 本稿で取り組むテーマも前号と同様である. そこで, 今一度変数, 関数等の定義をしよう.

Y, Z は互いに独立な連続型確率変数であり, それぞれ次のような確率分布関数を持つとする.

$$F_Y(y) = \Phi\left(\frac{y - \mu}{\sigma}\right), \quad \text{但し } \Phi(x) \equiv \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-t^2/2} dt,$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 1 - e^{-z/\lambda} & \text{if } z \geq 0 \\ 0 & \text{if } z < 0 \end{cases} \quad (\lambda > 0).$$

このとき, $X = Y + Z$ の分布関数は

$$\begin{aligned} F_X(x) &= \int_{-\infty}^{\infty} F_Y(x - z) dF_Z(z) \\ &= \int_0^{\infty} \Phi\left(\frac{x - z - \mu}{\sigma}\right) d(1 - e^{-z/\lambda}) \end{aligned}$$

と表される.

¹ 本稿で紹介するシミュレーション実験の一部は, 本学情報処理センターのワークステーション Argoss 5270 (ホスト名 snotaru) 上で実行しました.

穴沢 [1] は、母数 (μ, σ, λ) を最尤法やモーメント法で推定することが困難であることを簡単に述べた上で、経験分布関数と F_X の距離の近似式を最小化する推定量を提案した。そして、シミュレーション実験により、比較的粗い近似で良好な推定量を得ることを示した。しかしそれは、他の方法との比較において「良好」であることを示したわけではない。なぜなら、新たな手法と比較すべき単純でオーソドックスな手法が見当たらなかったからである。

そこで本稿では、比較対象としてのモーメント法に注目し、

1. 前号で述べた推定不能現象がどの程度の頻度で生ずるのか、
2. 推定不能を回避するために何らかの工夫ができないか、

という点について議論する。特に2については、変換された母数を導入することにより、モーメント法の一部に他の推定法を取り入れて、モーメント法にバリエーションを持たせることができることを示す。最後に、モーメント法とそのバリエーションの推定精度の比較を、シミュレーション実験によって行う。なお、前号で提案した手法との比較研究は他の機会に譲る。

2 モーメント法とそのバリエーション

2.1 変換された母数の導入

分布 F_X の母数として

$$\mu_X = E(X), \quad \sigma_X^2 = E(X - \mu_X)^2, \quad r = \frac{\sigma^2}{\sigma^2 + \lambda^2}$$

と定義される (μ_X, σ_X, r) を考えると、それは元の母数 (μ, σ, λ) と一対一に対応する。実際、

$$\mu = \mu_X - \sqrt{1-r} \sigma_X, \quad \sigma = \sqrt{r} \sigma_X, \quad \lambda = \sqrt{1-r} \sigma_X$$

と表すことができる。モーメント法の観点で言えば、 μ_X, σ_X に対する推定量として、

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad s = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2}$$

($\{x_1, \dots, x_n\}$ は X からの標本) が適当であろう。したがって、 r に対する適当な推定量が見つければ、我々は元の母数 (μ, σ, λ) を推定することができる。

ところで、 r を推定する場合には、 X を標準化した次のような確率変数を考えた方が都合がよい：

$$W = \frac{X - \mu_X}{\sigma_X}.$$

なぜなら、このとき W の分布関数 F_W は、

$$F_W(w) = \int_0^\infty \Phi\left(\frac{w + \sqrt{1-r} - \sqrt{1-r}z}{\sqrt{r}}\right) d(1 - e^{-z}) \quad (1)$$

と表され、 μ_X, σ_X に依存しない。

2. 2 モーメント法

W の 3 次までのモーメントは容易に得られる：

$$E(W) = 0, \quad E(W^2) = 1, \quad E(W^3) = 2(1-r)^{3/2}.$$

したがって $w_i = (x_i - \bar{x}) / s$ ($i = 1, \dots, n$) を求め、

$$2(1-r)^{3/2} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n w_i^3 \quad (2)$$

を r について解くことができる。

しかし、この方法は穴沢 [1] で述べた通常モーメント法、すなわち

$$E(X) = \mu + \lambda = \bar{x}, \quad E(X - E(X))^2 = \sigma^2 + \lambda^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2,$$

$$E(X - E(X))^3 = 2\lambda^3 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^3$$

を解くこととまったく同値である。そして σ^2 が負に推定されるという現象は、(2)の右辺が >2 となるとき生ずる。表1は、さまざまな r に対して W の標本歪度が >2 となる頻度を、シミュレーションで求めたものである。

なお、(2)の右辺は r が1に近いとき、しばしば負になり、このとき λ は負に推定される。その頻度を表したのが表2である。

表1： W の標本歪度が2を越える(= σ^2 が負数に推定される)回数(1000回中)

$r =$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$n = 100$	294	196	169	82	37	19	3	4	1	0	0	0	0
$n = 200$	291	209	148	49	18	12	3	1	0	0	0	0	0
$n = 300$	309	211	141	43	14	5	1	0	0	0	0	0	0
$n = 400$	343	233	140	38	9	4	2	0	0	0	0	0	0
$n = 500$	353	221	130	30	7	2	0	0	0	0	0	0	0

表2： W の標本歪度が負となる(= λ が負数に推定される)回数(1000回中)

$r =$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$n = 100$	0	0	0	0	1	8	34	75	158	271	402	441	481
$n = 200$	0	0	0	0	0	1	4	21	82	180	404	426	437
$n = 300$	0	0	0	0	0	0	0	4	31	143	328	433	490
$n = 400$	0	0	0	0	0	0	0	5	16	113	319	459	487
$n = 500$	0	0	0	0	0	0	0	1	9	80	287	428	472

2. 3 1つのバリエーション

上で述べたモーメント法では、 r が0に近いとき、すなわち σ が λ に比べて十分小さいとき、 σ を正しく推定できないことがわかる。しかし、現実には小さい r に対して推定を行う場合の方が多いように思われる。その根拠は薄弱であるが、例えば

- 木村ら [2] のワープロ思考時間モデルにおいて推定された r は最大でも 0.02 である,
- 指数分布に従う変数を計測するようなモデルの場合, 計測誤差としてしばしば正規分布が仮定されるが, その場合, 誤差分散 (σ^2) は計測変数の分散 (λ^2) よりも十分小さいと考える方が合理的である,

などを挙げることができる. このような観点から, 我々は, 小さな r に対して σ を正しく推定する方法に重点を置きたい.

さて, r の別な推定法として次のような方法が考えられる: W の経験分布関数を G_w とし, ある w に対して $G_w(w) = F_w(w)$ とおいてそれを r に関して解き, その解 \hat{r} を推定量としよう. 但し,

- F_w の近似式として次の式を用いる:

$$F_w(w) \approx \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \Phi \left(\frac{w + \sqrt{1-r} + \sqrt{1-r} \log(1 - \frac{j-1/2}{m})}{\sqrt{r}} \right)$$

(本稿では $m=100$). これは (1) の測度関数を階段関数で近似して得られる.

- w の値は $F_w(w) = F_w(w; r)$ が $r \in [0, 1]$ の単調関数で, かつ $F_w(w; 0)$ と $F_w(w; 1)$ の差が大きくなるように選ばれるべきである. 図 1 を観察する限り, 我々は $w = -1$ を採用すれば良いことが判る.

なお, この方法では $G_w(-1) = 0$ のとき $\hat{r} = 0$ を返すこととする.

さまざまな r に対して上の方法で \hat{r} を求めたとき, $\hat{r} = 0$ となる頻度をシミュレーションで求めた結果が表 3 である. この表より, \hat{r} による推定法では $r = 0.01$ ($n \geq 200$) においてさえ, 90 パーセント以上の確率で σ^2 が正に推定されることがわかる.

しかし逆に, 大きい r に対して \hat{r} がしばしば > 1 となる (すなわち λ が負に推定される) という欠点も持つ (表 4 参照).

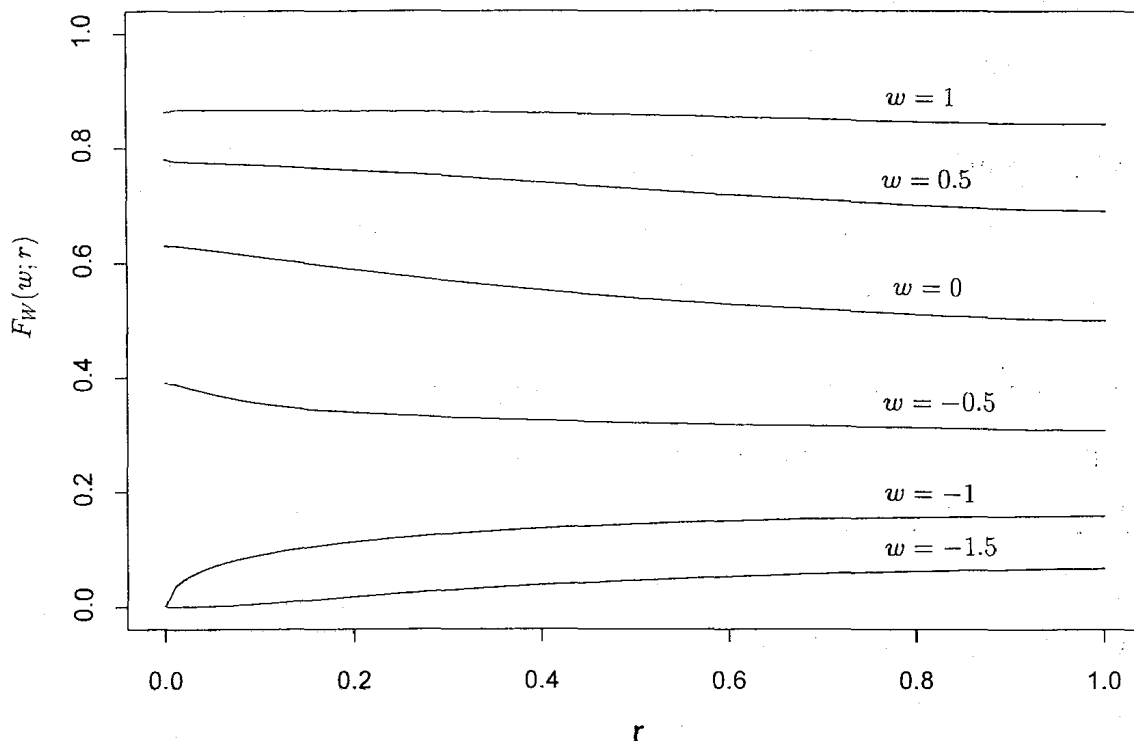


図1 : $F_w(w;r)$ と w, r の関係

表3 : $\hat{r} = 0$ と推定される回数 (1000回中)

$r =$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$n = 100$	143	9	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 200$	43	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 300$	16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 400$	3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
$n = 500$	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

表4 : $\hat{r} > 1$ 推定される回数 (1000回中)

$n =$	0.01	0.05	0.1	0.2	0.3	0.4	0.5	0.6	0.7	0.8	0.9	0.95	0.99
$n = 100$	13	18	25	94	149	261	364	430	498	539	580	583	590
$n = 200$	0	0	4	21	59	129	209	323	428	451	525	521	564
$n = 300$	0	0	1	0	23	75	136	219	338	473	500	493	523
$n = 400$	0	0	0	0	18	52	98	207	268	392	482	503	472
$n = 500$	0	0	0	1	1	22	64	168	284	377	452	470	474

3 シミュレーション —— 推定精度の比較 ——

すべての変換された母数 (μ_x, σ_x, r) をモーメント法で求めて得られる (μ, σ, λ) の推定量を $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$, r のみを \hat{r} で推定し, 残りをモーメント法で求めて得られる推定量を $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ として, 両者の RMSE (Root Mean Square Error) をシミュレーションで推定しよう. 但し, いずれの場合も r が負に推定されたらその推定値を 0 に, 1 を越えたら 1 にそれぞれ置き換えて推定を実行する.

母集団としては $\mu_x = 1, \sigma_x = 1$ を固定し, r のみを次のように変化させる:

$$r = 0.01, 0.05, 0.1, 0.2, \dots, 0.8, 0.9, 0.95, 0.99.$$

そして, それぞれの母集団に対して 500 個の標本を発生させ, それらを基に bias と RMSE を推定する. 各 r に対する (μ, σ, λ) の真の値は次の表の通りである.

r	μ	σ	λ
0.01	0.0050	0.1000	0.9950
0.05	0.0253	0.2236	0.9747
0.1	0.0513	0.3162	0.9487
0.2	0.1056	0.4472	0.8944
0.3	0.1633	0.5477	0.8367
0.4	0.2254	0.6325	0.7746
0.5	0.2929	0.7071	0.7071
0.6	0.3675	0.7746	0.6325
0.7	0.4523	0.8367	0.5477
0.8	0.5528	0.8944	0.4472
0.9	0.6838	0.9487	0.3162
0.95	0.7764	0.9747	0.2236
0.99	0.9000	0.9950	0.1000

表 5 から表 9 までが, 標本サイズ別の各 r に対する各推定量の bias と RMSE を示している. これらの表より,

- $n = 200$ のとき, $r \leq 0.05$ で

- ・ $n=300$ のとき, $r \leq 0.1$ で
- ・ $n \geq 400$ のとき, $r \leq 0.2$ で

すべての (μ, σ, λ) に対する $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ の RMSE が $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$ のそれらよりも下回っていることがわかる。見方を変えれば、小さい r に対する RMSE ($\bar{\sigma}$) の大きさが目立つ。

4 おわりに

以上の実験結果から、モーメント法とそのバリエーションの優劣は r に大きく依存することがわかった。どのような r に対しても良好な精度を要求するのであれば、上の2つのいずれを採用するか、という適当な選択ルールを設ける必要がある。しかし、我々が注目する小さい r に対しては、 r を取り入れたモーメント法が良い結果をもたらすことがわかった。

いずれにしても、変換された母数を導入することにより、モーメント法の一部にそれ以外の推定法を組み込むことが可能になり、それが精度の改善に結びついたことは、大きな発見と言ってよかろう。

参 考 文 献

- [1] 穴沢務 (1994). 「正規分布と指数分布の畳み込みの母数推定について」, 商学討究第45巻第1号.
- [2] 木村, 粕川 (1987). 「ワープロ利用者の思考時間に関する統計的モデルの精緻化」, 情報処理学会研究報告 (日本語文書処理研究会).

表5 : $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$ と $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ bias と RMSE ($n=100$)

		$\bar{\mu}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
r = 0.01	bias	0.0810	0.1819	-0.0827	0.0516	0.0682	-0.0534
	RMSE	0.1616	0.2624	0.1876	0.1758	0.1685	0.2000
r = 0.05	bias	0.0758	0.1037	-0.0782	0.0550	0.0467	-0.0574
	RMSE	0.1653	0.2170	0.1875	0.1799	0.1612	0.2027
r = 0.1	bias	0.0711	0.0655	-0.0739	0.0759	0.0488	-0.0788
	RMSE	0.1698	0.2000	0.1880	0.2385	0.1780	0.2520
r = 0.2	bias	0.0649	0.0340	-0.0683	0.0980	0.0410	-0.1014
	RMSE	0.1784	0.1826	0.1897	0.2836	0.1907	0.2931
r = 0.3	bias	0.0630	0.0234	-0.0669	0.1508	0.0453	-0.1547
	RMSE	0.1891	0.1646	0.1944	0.3692	0.2131	0.3772
r = 0.4	bias	0.0653	0.0187	-0.0696	0.1802	0.0353	-0.1845
	RMSE	0.2038	0.1482	0.2043	0.4134	0.2155	0.4174
r = 0.5	bias	0.0749	0.0155	-0.0795	0.1761	0.0137	-0.1807
	RMSE	0.2324	0.1354	0.2295	0.4191	0.2052	0.4178
r = 0.6	bias	0.0874	0.0129	-0.0923	0.1955	0.0053	-0.2003
	RMSE	0.2594	0.1208	0.2527	0.4352	0.2005	0.4320
r = 0.7	bias	0.0966	0.0064	-0.1017	0.1787	-0.0175	-0.1838
	RMSE	0.2754	0.1085	0.2676	0.4275	0.1938	0.4192
r = 0.8	bias	0.0946	-0.0053	-0.0998	0.1117	-0.0554	-0.1169
	RMSE	0.2791	0.1022	0.2685	0.4006	0.1981	0.3851
r = 0.9	bias	0.0483	-0.0263	-0.0537	-0.0020	-0.1011	-0.0034
	RMSE	0.2579	0.0999	0.2424	0.3821	0.2151	0.3643
r = 0.95	bias	-0.0090	-0.0412	0.0037	-0.0800	-0.1180	0.0747
	RMSE	0.2519	0.1034	0.2315	0.3825	0.2188	0.3666
r = 0.99	bias	-0.1180	-0.0574	0.1127	-0.1904	-0.1307	0.1851
	RMSE	0.2772	0.1107	0.2560	0.4191	0.2236	0.3989

表 6 : $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$ と $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ の bias と RMSE ($n=200$)

		$\bar{\mu}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
r = 0.01	bias	0.0547	0.1372	-0.0596	0.0237	0.0389	-0.0286
	RMSE	0.1186	0.2196	0.1416	0.0931	0.1081	0.1207
r = 0.05	bias	0.0488	0.0614	-0.0541	0.0271	0.0249	-0.0324
	RMSE	0.1220	0.1875	0.1424	0.1081	0.1104	0.1314
r = 0.1	bias	0.0432	0.0282	-0.0488	0.0351	0.0272	-0.0407
	RMSE	0.1265	0.1790	0.1437	0.1349	0.1200	0.1535
r = 0.2	bias	0.0367	0.0075	-0.0425	0.0471	0.0280	-0.0530
	RMSE	0.1342	0.1644	0.1465	0.1640	0.1335	0.1762
r = 0.3	bias	0.0338	0.0035	-0.0398	0.0795	0.0303	-0.0855
	RMSE	0.1403	0.1455	0.1480	0.2441	0.1592	0.2546
r = 0.4	bias	0.0333	0.0040	-0.0393	0.1179	0.0303	-0.1240
	RMSE	0.1472	0.1225	0.1502	0.3173	0.1738	0.3244
r = 0.5	bias	0.0378	0.0059	-0.0439	0.1372	0.0202	-0.1432
	RMSE	0.1625	0.1027	0.1618	0.3535	0.1722	0.3568
r = 0.6	bias	0.0492	0.0067	-0.0552	0.1490	0.0085	-0.1549
	RMSE	0.1909	0.0913	0.1882	0.3737	0.1690	0.3722
r = 0.7	bias	0.0672	0.0058	-0.0730	0.1393	-0.0093	-0.1451
	RMSE	0.2250	0.0874	0.2200	0.3693	0.1605	0.3668
r = 0.8	bias	0.0802	-0.0002	-0.0857	0.1076	-0.0350	-0.1132
	RMSE	0.2472	0.0825	0.2397	0.3621	0.1610	0.3537
r = 0.9	bias	0.0551	-0.0156	-0.0603	0.0024	-0.0770	-0.0076
	RMSE	0.2355	0.0775	0.2241	0.3383	0.1733	0.3310
r = 0.95	bias	0.0061	-0.0279	-0.0109	-0.0779	-0.0972	0.0731
	RMSE	0.2208	0.0783	0.2064	0.3447	0.1788	0.3378
r = 0.99	bias	-0.0904	-0.0415	0.0860	-0.1859	-0.1108	0.1815
	RMSE	0.2355	0.0831	0.2203	0.3837	0.1850	0.3741

表7 : $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$ と $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ の bias と RMSE ($n=300$)

		$\bar{\mu}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
r = 0.01	bias	0.0426	0.1066	-0.0454	0.0167	0.0263	-0.0196
	RMSE	0.0988	0.1972	0.1154	0.0744	0.0884	0.0946
r = 0.05	bias	0.0372	0.0371	-0.0399	0.0204	0.0190	-0.0231
	RMSE	0.1018	0.1747	0.1165	0.0871	0.0939	0.1032
r = 0.1	bias	0.0324	0.0113	-0.0351	0.0239	0.0187	-0.0265
	RMSE	0.1054	0.1685	0.1180	0.0944	0.0979	0.1086
r = 0.2	bias	0.0276	0.0007	-0.0300	0.0344	0.0185	-0.0368
	RMSE	0.1110	0.1473	0.1202	0.1324	0.1123	0.1410
r = 0.3	bias	0.0254	-0.0025	-0.0276	0.0492	0.0191	-0.0514
	RMSE	0.1148	0.1339	0.1209	0.1727	0.1290	0.1790
r = 0.4	bias	0.0251	-0.0000	-0.0270	0.0745	0.0186	-0.0764
	RMSE	0.1171	0.1081	0.1202	0.2374	0.1416	0.2430
r = 0.5	bias	0.0266	0.0018	-0.0283	0.1001	0.0158	-0.1018
	RMSE	0.1200	0.0883	0.1202	0.2867	0.1468	0.2916
r = 0.6	bias	0.0314	0.0033	-0.0329	0.1318	0.0135	-0.1333
	RMSE	0.1299	0.0761	0.1276	0.3322	0.1474	0.3340
r = 0.7	bias	0.0513	0.0048	-0.0525	0.1393	-0.0021	-0.1405
	RMSE	0.1772	0.0746	0.1741	0.3524	0.1433	0.3511
r = 0.8	bias	0.0739	0.0022	-0.0748	0.1039	-0.0266	-0.1048
	RMSE	0.2161	0.0721	0.2124	0.3332	0.1369	0.3316
r = 0.9	bias	0.0689	-0.0102	-0.0693	0.0077	-0.0679	-0.0082
	RMSE	0.2238	0.0676	0.2169	0.3200	0.1499	0.3162
r = 0.95	bias	0.0247	-0.0229	-0.0249	-0.0663	-0.0853	0.0662
	RMSE	0.2093	0.0680	0.2006	0.3241	0.1555	0.3189
r = 0.99	bias	-0.0772	-0.0371	0.0775	-0.1825	-0.0996	0.1828
	RMSE	0.2158	0.0723	0.2075	0.3580	0.1611	0.3543

表 8 : $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$ と $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ の bias と RMSE ($n=400$)

		$\bar{\mu}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
r = 0.01	bias	0.0360	0.0967	-0.0392	0.0116	0.0186	-0.0147
	RMSE	0.0881	0.1869	0.1051	0.0638	0.0748	0.0853
r = 0.05	bias	0.0301	0.0278	-0.0333	0.0135	0.0134	-0.0167
	RMSE	0.0913	0.1696	0.1068	0.0725	0.0772	0.0909
r = 0.1	bias	0.0248	0.0026	-0.0280	0.0161	0.0128	-0.0193
	RMSE	0.0955	0.1661	0.1093	0.0835	0.0833	0.0986
r = 0.2	bias	0.0196	-0.0052	-0.0227	0.0192	0.0090	-0.0223
	RMSE	0.1012	0.1470	0.1124	0.1010	0.0913	0.1120
r = 0.3	bias	0.0180	-0.0010	-0.0209	0.0312	0.0147	-0.0342
	RMSE	0.1035	0.1155	0.1123	0.1321	0.1069	0.1396
r = 0.4	bias	0.0182	0.0028	-0.0210	0.0465	0.0134	-0.0493
	RMSE	0.1038	0.0871	0.1100	0.1840	0.1193	0.1892
r = 0.5	bias	0.0195	0.0042	-0.0222	0.0742	0.0152	-0.0769
	RMSE	0.1053	0.0710	0.1088	0.2453	0.1298	0.2485
r = 0.6	bias	0.0236	0.0049	-0.0262	0.1130	0.0159	-0.1155
	RMSE	0.1148	0.0644	0.1157	0.3062	0.1363	0.3083
r = 0.7	bias	0.0360	0.0059	-0.0383	0.1372	0.0075	-0.1395
	RMSE	0.1457	0.0634	0.1449	0.3395	0.1327	0.3400
r = 0.8	bias	0.0570	0.0051	-0.0591	0.1052	-0.0168	-0.1073
	RMSE	0.1840	0.0624	0.1827	0.3247	0.1241	0.3228
r = 0.9	bias	0.0697	-0.0037	-0.0714	0.0134	-0.0557	-0.0150
	RMSE	0.2115	0.0589	0.2074	0.3059	0.1341	0.3024
r = 0.95	bias	0.0306	-0.0156	-0.0320	-0.0579	-0.0705	0.0565
	RMSE	0.1960	0.0584	0.1894	0.2993	0.1366	0.2968
r = 0.99	bias	-0.0619	-0.0296	0.0609	-0.1709	-0.0861	0.1698
	RMSE	0.2016	0.0628	0.1939	0.3392	0.1410	0.3351

表9 : $(\bar{\mu}, \bar{\sigma}, \bar{\lambda})$ と $(\hat{\mu}, \hat{\sigma}, \hat{\lambda})$ の bias と RMSE ($n=500$)

		$\bar{\mu}$	$\bar{\sigma}$	$\bar{\lambda}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\lambda}$
r = 0.01	bias	0.0302	0.0823	-0.0335	0.0088	0.0152	-0.0121
	RMSE	0.0769	0.1739	0.0917	0.0548	0.0642	0.0733
r = 0.05	bias	0.0235	0.0135	-0.0269	0.0104	0.0110	-0.0138
	RMSE	0.0803	0.1630	0.0935	0.0620	0.0685	0.0782
r = 0.1	bias	0.0179	-0.0082	-0.0214	0.0113	0.0081	-0.0148
	RMSE	0.0847	0.1607	0.0962	0.0688	0.0733	0.0824
r = 0.2	bias	0.0122	-0.0145	-0.0157	0.0132	0.0047	-0.0167
	RMSE	0.0912	0.1449	0.0999	0.0835	0.0834	0.0930
r = 0.3	bias	0.0104	-0.0066	-0.0140	0.0185	0.0046	-0.0220
	RMSE	0.0930	0.1057	0.0995	0.1067	0.0962	0.1142
r = 0.4	bias	0.0104	-0.0026	-0.0139	0.0403	0.0113	-0.0438
	RMSE	0.0926	0.0804	0.0968	0.1716	0.1162	0.1765
r = 0.5	bias	0.0112	-0.0006	-0.0146	0.0714	0.0142	-0.0748
	RMSE	0.0930	0.0643	0.0949	0.2427	0.1269	0.2473
r = 0.6	bias	0.0135	0.0004	-0.0168	0.1014	0.0159	-0.1047
	RMSE	0.0968	0.0575	0.0968	0.2867	0.1291	0.2883
r = 0.7	bias	0.0213	0.0017	-0.0244	0.1192	0.0071	-0.1224
	RMSE	0.1157	0.0562	0.1154	0.3128	0.1252	0.3149
r = 0.8	bias	0.0450	0.0031	-0.0480	0.1037	-0.0133	-0.1066
	RMSE	0.1637	0.0580	0.1642	0.3153	0.1202	0.3127
r = 0.9	bias	0.0674	-0.0029	-0.0700	0.0278	-0.0472	-0.0305
	RMSE	0.2021	0.0559	0.2003	0.2963	0.1244	0.2945
r = 0.95	bias	0.0396	-0.0137	-0.0420	-0.0482	-0.0653	0.0458
	RMSE	0.1920	0.0544	0.1898	0.2925	0.1278	0.2899
r = 0.99	bias	-0.0593	-0.0279	0.0573	-0.1630	-0.0815	0.1610
	RMSE	0.1899	0.0575	0.1854	0.3284	0.1344	0.3247