

# 最適施設配置問題の社会情報学的考察

若林 信夫

## 目次

1. はじめに
2. 単純化された最適施設配置
3. より一般的な定式化
4. 施設利用のための利用圏
5. Voronoi 図と Delaunay 三角形図
6. Voronoi 図を求めるソフトウェア
7. 結語的覚書

## 1 はじめに

公共施設であれ、民間施設であれ、利用者と設置者の観点から、施設を最適に配置することの問題は、古代より長い歴史がある。最近になって、オペレーションズ・リサーチや計算幾何学の分野で再び、脚光を浴びている。問題自体は、社会的重要性もさることながら、その問題解決面はコンピュータ処理、あるいは、情報科学の飛躍的な発展が基礎にある。

公共施設、例えば、公園、学校、病院、郵便局などは、「よいもの」で、利用者にとって最適とは、「近い」ことに同義であり、他方、ごみ処理場や污水处理施設は、一般住民にとってできるだけ遠くにあることを望む。

民間施設の例として、店舗、レストラン、配送センターなどは、公共施設よりも制約条件が厳しいので、整数型の線形計画問題として古くから定式化されてきた。

計画者は、既設の施設を第一の優先度で考え、新設の施設を第二義的に考える傾向がある。投票型の最適施設配置や、ゲーム論的な最適施設配置も考えら

れる。

本稿では、施設の最適配置の基礎的な考察を通して、問題に対する社会情報学的な分析を行うことを目的にする。すなわち、管理科学的、情報科学的に問題解決しようとする<sup>1)</sup>。

## 2 単純化された最適施設配置

公共施設の目的は平面上の座標位置,  $X_1=(x_1, y_1), \dots, X_n=(x_n, y_n)$  にある需要点(住民)をサービスすることである。一般住民の合意が得られるような場所に、公共施設を配置しようとするとき、単純化して、「便利さ」の概念として、距離(近さ)を考える。最適性の基準としては、以下で説明する三種類がある。

### 2.1 3種類の最適性基準

望ましい公共施設を需要点までの距離の平方和を最小にするようにするには、どこに配置すべきであろうか。これは微分の教科書にある標準的な問題である。しかし、なぜ、距離の平方和を最小化しなければならないかの理由は存在しない。これは、むしろ、数学的な便法による。

この問題を数学的に解くことは

$$f(X) = \sum_{i=1}^n [(x-x_i)^2 + (y-y_i)^2] = \sum_{i=1}^n |X-X_i|^2$$

を最小化する点 $P_{sq}$ を見出すことである。ここで、 $X=(x, y)$  である。また、 $|X-X_i|$ は $X$ から $X_i$ までのユークリッド距離である。これを「平方和問題」

1) 最適施設配置の数理を考える上で、重要な文献は、以下の3つであろう。

岡部篤行・鈴木敦夫、「最適配置の数理」(朝倉書店), 1992.

A. Okade, B. Boots and K. Sugihara, *Spatial Tessellations: Concepts and Applications of Voronoi Diagrams*, (John Wiley & Sons), 1992.

伊理正夫(監修)・腰塚武志(編集), 「計算幾何学と地理情報処理(第2版)」(共立出版), 1993.

( $P_{sqr}$ ) と呼ぼう。

距離の平方和は数学的に取り扱いが容易であるが、距離の合計を最小にした方が直観にかなっている。距離の和を最小化した場合、答えは変わってくるだろうかを次に考えてみる。距離の和を最小化する問題は、発電所から町までの電線の総延長を最小化したいとき、あるいは、情報処理センターから各利用サイトまで構内回線を最小ケーブル長で引き回したいとき、自然な問題設定となる。目的関数、

$$f(X) = \sum_{i=1}^n |X - X_i|$$

がその最小値に達する点  $P_{sum}$  を求める問題のことを「距離和問題」( $P_{sum}$ ) と呼ぼう<sup>2)</sup>。距離和問題の数学は微分の教科書には出てこない。むしろ、幾何学の教科書に出ている。

問題の別の自然な変形は、消防施設や、ごみ収集施設のような、施設から最も遠い地域までの距離をできるだけ小さくするような配置を求めることである。この問題を「最大距離問題」( $P_{max}$ ) と呼ぼう<sup>3)</sup>。

$$f(X) = \max_i |X - X_i|$$

の最小値を与える点  $P_{max}$  にその解がある。 $P_{max}$  もまた興味深い幾何的な特徴を持っている。

最小化すべき距離の関数が、距離の平方和、和、あるいは、最大値のどれを選択すべきかとは別に、距離の定義それ自身を変更することができる。

$X_1 = (x_1, y_1)$  から  $X_2 = (x_2, y_2)$  までの「タクシー距離」<sup>4)</sup> は、

2) 1927年の A. Weber の業績に肖って、「Weber 問題」とも呼ばれる。A. Weber, *Über den Standort der Industrien*, Tübingen, 1927. (*The Theory of the Location of Industries*, に再録。)

3) この基準は、弱者優先の社会正義のロールズ (J. Rawls) 基準に相当する。筆者は、総当たり戦のゲームにおいて、待ち時間を最小にする試合順序が作成できることを最大距離問題の解を通じて、知ることができた。

4) タクシー距離は、マンハッタン距離、矩形距離などと呼ばれることがある。

$$|X_1 - X_2|_t = |x_1 - x_2| + |y_1 - y_2|$$

によって与えられる。都市の街路に見られるように、横（水平）方向か、たて（垂直）方向にのみ、移動することができる場合、このように計算できる。

距離和問題 ( $P_{sum}$ ) と最大距離問題 ( $P_{max}$ ) は、ユークリッド距離がタクシー距離によって置き換えられるとき、それぞれ、「タクシー距離和問題」と「タクシー最大距離問題」と呼び、それぞれの解を、 $Q_{sum}$  と  $Q_{max}$  と表わそう。

## 2. 2 1次元問題とその解

$X_1, \dots, X_n$  はすべて  $x$  軸上に位置しているとしよう。そのとき、平方和、距離和、および、最大距離問題は、それぞれ、

$$\sum_{i=1}^n |x_i - c|^2,$$

$$\sum_{i=1}^n |x_i - c|,$$

および、

$$\max_i |x_i - c|$$

を最小化するような数値  $c$  を求めることである。

平方和問題に対する解  $P_{sq}$  は、標準的な方法（凸関数ゆえ、微分 = 0）によって

$$(1/n) \sum_{i=1}^n x_i$$

であるとわかる。これは又、標本  $x_1, x_2, \dots, x_n$  の標本平均  $\bar{x}$  と解釈できる。

距離和問題については、最初、次の関係式が成立することに注意しよう。

$$f(c) = \sum_{i=1}^n |x_i - c| = \sum_{x_i < c} (c - x_i) + \sum_{x_i > c} (x_i - c)$$

もしすべての  $i$  について、 $c \neq x_i$  であれば、 $f'(c) = L - R$  である。ここで、 $L$  は、 $c$  の左方向にある点の個数であり、 $R$  は、 $c$  の右方向にある点の個数であ

る。もし、 $L=R$ となる点 $x_i$ があるならば、すなわち、左側と右側に等しい個数の点があれば、 $f$ は、 $x_i$ の左側で減少し、右側で増加する。最小点 $P_{sum}$ は、 $x_i$ で達成されるだろう。すなわち、 $x_1, x_2, \dots, x_n$ の中央値（中位数、メディアン、Median）である。さもないときには、解は一意ではなく、最小値は、开区間 $(x_i, x_j)$ のどれかの点で達成される。そこでは、开区間の任意の $x$ に対して $f'(x)=L-R=0$ である。

最大距離問題に対しては、 $m=\min(x_i)$ 、 $M=\max(x_i)$ とおこう。そのとき、

$$|m-c|+|M-c|\geq M-m$$

が成立する。

したがって、 $\max_i |x_i - c| \geq (M-m)/2$ である。等号は、 $c=(m+M)/2$ のとき達成されるので $P_{max}=(m+M)/2$ である。

3つの問題に対する解は、すべて統計学でよく知られている。 $P_{sqr}$ は、データ集合の平均、 $P_{sum}$ は、中央値、 $P_{max}$ は、中間範囲（Mid-range）である。 $n=3$ の場合には、もしも、

$$x_1=-1, x_2=1, x_3=a \text{ for } -1 \leq a \leq 1$$

であるならば、 $P_{sqr}$ （標本平均）は、 $a/3$ 、 $P_{sum}$ （中央値）は、 $a$ 、 $P_{max}$ （中間範囲）は、 $0$ である。点が $x$ 軸上にあるとき、 $P_{sum}=Q_{sum}$ および、 $P_{max}=Q_{max}$ である。

## 2. 3 2次元の場合の解

距離の平方和问题の解は、偏微分を考えると、各座標の平均値 $(\bar{x}, \bar{y})$ であり、「セントロイド」と呼ばれる。

距離和问题の解は、フェルマー(Fermat)・シュタイター(Steiner)問題：

「与えられた鋭角三角形 $ABC$ 内に1点 $P$ をとり、 $P$ から各頂点 $A, B, C$ にいたる距離の和を最小にせよ。」

の解である。

3点が鋭角三角形を作るとき、120度を仰ぐ内部の点が解である。鈍角三角形ならば鈍角の頂点に一致する<sup>5)</sup>。

上述したものは、標本点が3個の場合であり、4個以上になると幾何的な解法は困難になる。作図して容易に確かめられるように、解も一意には定まらない。

解析的には、 $f(X) = \sum_{i=1}^n |X - X_i|$ を最小化する問題であるから、 $\nabla f = 0$ となる点 $P = X_i$ があれば、

$$\sum_{i=1}^n \frac{P - X_i}{|P - X_i|} = 0.$$

を満たさなければならない。これは、2次元の中央値(2-Median)と解釈できる。

最後に、最大距離問題の解を特長付けよう。

点 $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$ の集合を $S$ で表わし、 $f(X) = \max_i |X - X_i|$ とする。

もし、 $\min_x f(X) = f(P_{max}) = r$ であれば、その時、すべての $i$ について、 $|X_i - P_{max}| \leq r$ であり、特定の $i$ について等号が成立する。したがって、 $S$ は、 $P_{max}$ に中心を置く半径 $r$ の円の内部又は周辺にある。このような円を、 $S$ の「最小スパニング円」といい、一意に定まる。

$P_{max}$ を求めるには、2つのケースを考える。第一は、 $S$ を含む円の直径の反対側に、2点 $X_i$ と $X_j$ があるとき、 $r = |X_i - X_j|/2$ 、かつ、 $P_{max} = (X_i + X_j)/2$ である。

第2は、上のような2点が見出せないとき、最小スパニング円上に3点があって、これら3点を含む弧が180度以上である。したがって、これら3点を

5) フェルマー・シュタイナー点を求める幾何学的方法は2種類ある。第一は、任意の三角形の各辺の上に、正三角形を外側に作ると、対頂の線分の長さが等しく、1点で交わる。第2は、トリチェリの作図法で、任意の三角形の1辺を選び、その辺を1辺とする正三角形を外側に作る。外側の頂点と、任意の三角形の残りの頂点とを結ぶ線分と外側正三角形の外接円の交点が求めるフェルマー・シュタイナー点となる。

頂点とする三角形は、鋭角三角形であり、 $P_{max}$ は、外接円の中心（外心）で三角形の内部にある。

例題として、需要者が、3点の位置、 $X_1=(0, 2)$ 、 $X_2=(-1, 0)$ 、 $X_3=(1, 0)$ にいるとき、公共施設をどこに置いたらよいかを、上記の3つの基準により、求めてみると以下のようなになる<sup>6)</sup>。

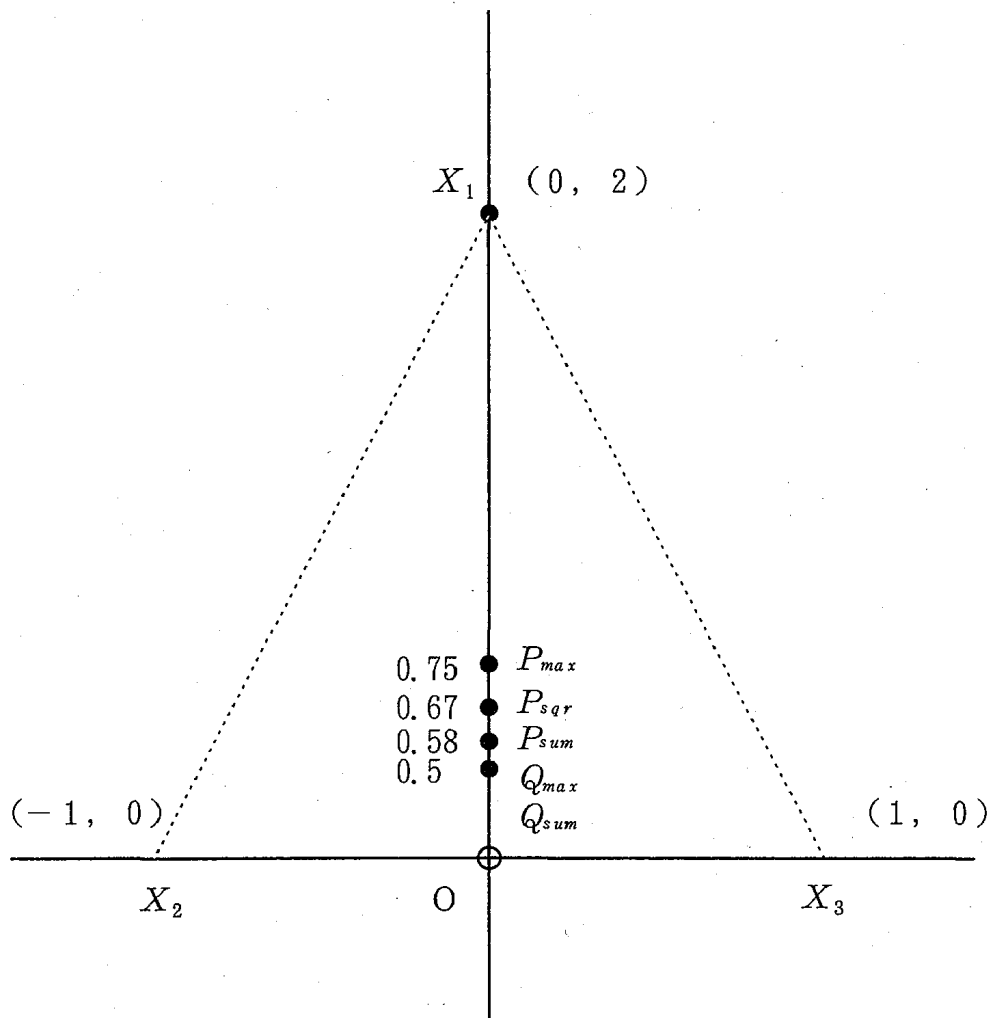


図1. 3つの異なる基準に対応した最適配置

さまざまな配置が得られるが、このことは、施設配置が、立案者の価値判断によってどのようにでも決まることを見る、社会計画論の絶好の教材となる。

6) B. Eisenberg and S. Khabbaz, "Optimal Locations", *College Mathematics Journal*, Vol. 22, no. 4 (1992), pp. 278-289. 参照。

なお、上記の問題の拡張として、以下のことが考えられる。

1. 上の問題は、公共施設を1個求める問題であるが、複数個の施設を求めるように一般化すること。これは、次節以降で述べる。
2. タクシー距離を採用したとき、最適配置を求めことも同様に、可能である。
3. 直線（ユークリッド）距離とタクシー距離を混在した場合の計算も今後の課題である。
4. 点と点の間の距離ではなく、点と直線の距離をもとに直線の最適配置を求めること。（これについては計算幾何学の文献に詳しい<sup>7)</sup>。）

ここで、点と直線の距離の公式は、

$$D_E(p_i, H) = \frac{|b_0 + \sum_{j=1}^n b_j x_{j i}|}{\sqrt{\sum_{j=1}^n b_j^2}}$$

である。ここで、点は、 $p_i = (x_{1i}, \dots, x_{di})$ ,  $i = 1, \dots, n$  であり、直線（超平面）は、 $H: b_0 + b_1 x_1 + \dots + b_d x_d = 0$  である。

### 3 より一般的な定式化

施設の配置の計画立案者は、何らかの評価基準を設定した上で、その目的に照らした最適解を求める。公共施設の建設の場合、何も無いところに新設することはほとんどなく、多くは既存の施設とのからみにおいて、新設することが多い。

このような観点を取り入れて、問題を数理計画問題に定式化しよう。

既存の施設  $i$  と新設予定の施設  $j$  があって、それぞれ、座標位置  $(x_i, y_i)$ ,  $(a_j, b_j)$  をもつとする。任意の2点に対する距離尺度として、タクシー距

7) 例えば、Nikolai M. Korneenko and Horst Martini, Hyperplane Approximation and Related Topics, János Pach (ed.) *New Trends in Discrete and Computational Geometry*, Springer-Verlag, 1993, pp. 135-161.



離を用いる。

$$d(X_i, P_j) = |x_i - a_j| + |y_i - b_j|$$

新規予定の施設は、 $m$ 個あるものとする ( $j = 1, 2, \dots, m$ )。既存の施設は、 $n$ 個ある ( $i = 1, 2, \dots, n$ )。多数の顧客 (既存の施設) をサービスするために、新施設の場所を決めたいが、その目的関数は、新施設と既存施設の間の距離の合計を最小にすることであるとする。しかし、既存施設は既得権益をもつので、加重値を導入する。加重値  $w_i$  は、既得施設のサービス需要の相対的割合とする。問題は、次の型の数理計画問題になる<sup>8)</sup>。

$$\text{Minimize } f = \sum_{j=1}^m \sum_{i=1}^n z_{ij} w_i d(X_i, P_j)$$

subject to

$$\sum_{j=1}^m z_{ij} = 1, \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

ここで、既存施設  $i$  は、どれかの新施設  $j$  によりサービスされるので、上記の制約条件がついている。すべての  $z_{ij}$  は、0 又は 1 である。

問題は、前節の  $Q_{sum}$  に属するが、幾何的な方法で解くことは不可能で、数理計画ソフト (コンピュータ) によらざるを得ない。

最近、有力な解法として注目されているのは、内点法 (内部経路法) と焼きなまし法 (シミュレーテッド・アニーリング法) である。詳細については、数理計画法の標準的なテキストの新版や NetNews のニュースグループ sci.op-search の議論に譲る。

8) 大山達雄, 「最適化モデル分析 (日科技連), 1993. は, 種々の型の最適配置モデルを提示している。

「負の」施設の配置分析の比較については, E. Erkut and S. Neuman, Comparison of Four Models for Dispersing Facilities, *Infor*, Vol. 29, no. 2 (1991) pp. 68-86がある。

#### 4. 施設利用のための利用圏

施設配置の問題は、施設の計画立案者や設置者の観点と、利用者の観点とは異なった見方をする。利用者は、既存の施設を所与として、できるだけ効率的な利用方法を考え、しかる後に、施設の置かれている状況を改善しようとする。

利用者が施設を効率的に利用しようとする場合、利用圏、あるいは、経済活動圏を構成することができる。商業活動ならば、商圈である。

施設 $P_i$ の利用圏とは、利用者にとって、 $P_i$ の方が他の施設 $P_j$ よりもある評価の下で、たとえば、距離的に近いとか、便利であるとか、価値が大きい等の理由で選ばれる点からなる領域のことである。

ここでは、評価として、距離の最小化を踏襲する。

ある利用者が、現在いる地点を $C$ として、利用する施設を $P_i$ 、その距離を $d(C, P_i)$ とすると、他の施設よりも近いという条件は、 $d(C, P_i) \leq d(C, P_j)$ 、 $j \neq i$ と書けるから、

$$V_i = \{C \mid d(C, P_i) \leq d(C, P_j), j \neq i\}$$

となる領域を定めることができる。

$V_i$ は、 $P_i$ の Voronoi (ボロノイ) 領域といい、すべての点についての図を Voronoi 図といい、次節で詳しく述べる。

すべての施設は、同質ではなく、差別化されているので、重み付きの Voronoi 領域、重み付き Voronoi 図を考えるほうがより一般的である。

重み付き Voronoi 領域の定義式は、以下のようなになる。

$$V_i = \{p \mid P_i + td(p, p_i) \leq P_j + td(p, p_j)\}$$

ここでの解釈は、 $n$ 個の店があって、それぞれは品ぞろえや価格に他の店とは差別化をしている。消費者は、その店までの距離と価格要素を考慮して店を訪れるとする。 $P_i + td(p, p_i)$ は、 $i$ 店で商品を買う場合、単価 $P_i$ と間接コストがかかることを表わしている。 $t$ は、距離当りのコストを表わす。

## 5 Voronoi 図と Delaunay 三角形図

本節では、前節で紹介した Voronoi 図についてより厳密な解説を行う。  
平面における2点  $x, y$  に対して、その距離を  $d(x, y)$  で表わす。

### 5. 1 距離の定義

2点の距離の一般的な定義としては、第1節でみたような、ユークリッド距離、タクシー距離を考えるのが普通であるが、ここでは、一般座標における「ミンコフスキー距離」を導入し、特殊ケースを誘導する。ミンコフスキー距離とは、

$$d_{L_\rho}(p, p_i) = \left[ \sum_{i=1}^n |x_i - x_{ji}|^\rho \right]^{1/\rho}$$

で表される。ここで、 $(x_1, x_2, \dots, x_i, \dots, x_n)$  と  $(x_{j1}, x_{j2}, \dots, x_{ji}, \dots, x_{jn})$  はそれぞれ、 $p$  と  $p_i$  のデカルト座標である。 $\rho$  は、ベキ乗の次数であり、その取りうる範囲は、 $1 \leq \rho < \infty$  とする。

$\rho = 1$  ならば、

$$d_{L_1}(p, p_i) = \sum_{i=1}^n |x_i - x_{ji}|$$

である。これは、タクシー距離、マンハッタン距離、矩形距離と呼ばれるものである。

$\rho = 2$  ならば、

$$d_{L_2}(p, p_i) = \sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - x_{ji})^2}$$

である。これは、ユークリッド距離にほかならない。

$\rho = \infty$  ならば、

$$d_L(p, p_i) = \max_{i=1, 2, \dots, n} \{|x_i - x_{ji}|\}$$

であり、最大距離、優越距離と呼ばれる。(極限操作 (ロピタルの定理) を使っ

て、得られる。)

$x_1 - x_2$ 平面にこれらを図示すると下図が得られる。

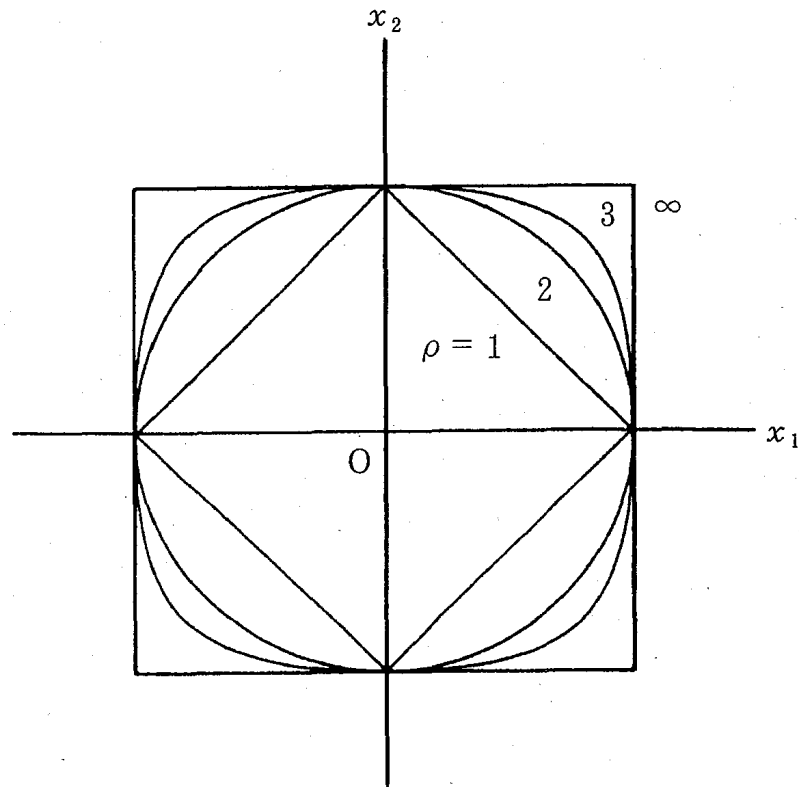


図2.  $\rho = 1, 2, 3, \infty$ に対応するミンコフスキー距離の等高線

以上は、距離の数学的な概念であるが、社会学、心理学では、「心理距離」がある。実験上、指数型、対数型、ベキ乗型の組み合わせが考えられる。登山や、スポーツの距離では、S字型距離がよくあてはまりそうである。

## 5. 2 Voronoi 図とその構成法

$X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset R^2$ を平面上の  $n$  個の互いに異なる点の集合とする。  
領域,

$$R(x_i) = \{x | x \in R^2, d(x, x_i) < d(x, x_j), j \neq i\}$$

を母点  $x_i$  の Voronoi 領域という。2つの Voronoi 領域が共有する辺を Voronoi 辺, 3つ以上の Voronoi 領域の境界が共有する点を Voronoi 点と

いう。Voronoi 図とは、このようにして定まる平面の Voronoi 領域、Voronoi 辺、Voronoi 点に分割した全体の図をいう。

Voronoi 図という名前は、数学者 George Fedoseevich Voronoi (1868-1908) に由来する。彼は、1907-1908年に2次形式論について2篇の論文をフランス語で書き、それが後世、先駆的業績と評価されているが、2次形式が平行多面体の頂点を母点とする分割とみなし解析可能であることを示したことによる<sup>9)</sup>。

Voronoi 図の作図法を述べよう。

3点、 $X_1, X_2, X_3$ が与えられたとする。3点の Voronoi 図は、線分  $X_1X_2, X_2X_3, X_3X_1$ の垂直2等分線を作図すればよい。Voronoi 点は、 $X_1, X_2, X_3$ を通る外接円の中心、すなわち、外心にほかならない。

4点以上の Voronoi 図は、どのようになるか。この作図法としては、逐次添加法が実用上(処理速度、構造の単純さ)、もっとも優れているといわれる。この方法は、既に3点の Voronoi 図が作られているのでこれを基に1点を追加して更新していくものである。いわば、「ブートストラップ」法である。

今、図3-1のように、 $X_1, X_2, X_3$ から Voronoi 図が作られていて、新たに、 $X_4$ が添加されたとする。 $X_4$ と一番近い $X_3$  ( $X_3$ と $X_4$ は同一の Voronoi 領域に属する)との垂直2等分線を引き、Voronoi 辺との交点の一つを $Y_1$ とする。 $Y_1$ の属する別の Voronoi 領域の母点 $X_1$ と $X_4$ の垂直2等分線を引き、Voronoi 辺との交点の一つを $Y_2$ とする。 $Y_2$ の属する別の Voronoi 領域の母点 $X_2$ と $X_4$ の Voronoi 辺との交点を $Y_3$ とすると、 $Y_3$ は最初の Voronoi 辺への交点 $Y_1$ の別の交点に一致する。よって、 $Y_1Y_2Y_3$ の三角形の内部が、 $X_4$ の Voronoi 領域で、Voronoi 図が再構成された(図3-2)。

9) Voronoi, G., Nouvelles applications des paramètres continus à la théorie des formes quadratiques,  
Premier Mémoire : Sur quelques propriétés des formes quadratiques positives parfaites, *J. Reine Angew. Math.* 133 (1907) pp.97-178.  
Deuxième Memoire : Recherches sur les paralléloèdres primitifs, *J. Reine Angew. Math.* 134 (1908), pp.198-287.

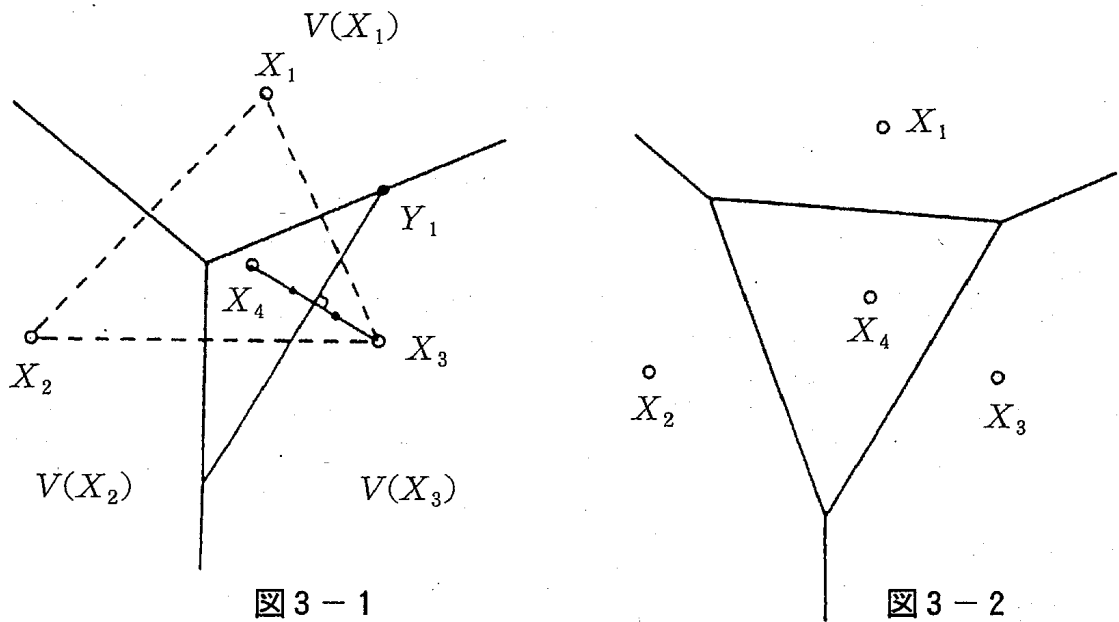


図 3. 逐次添加法による Voronoi 図の作成

Voronoi 領域は、通常、多角形となるので、Voronoi 多角形と呼ぶ。いま、Voronoi 多角形の隣接関係について注目しよう。例えば、公共施設  $x$  に出掛けて行ったが、たまたま、事情があって、利用できなかったとする。そのときには、 $x$  の周辺を見渡して、一番便利のよい（近い）所を探すであろう。 $x$  の利用圏に隣接するすべての利用圏が候補であることは間違いないが、どれが最適であろうか。 $x$  と隣接する Voronoi 領域の母点を次々に結んでいくと、半直線が得られるが、すべての領域について同様の操作を続けると、三角形図が得られる。（退化が起こらないと仮定している。）これが、Delaunay 三角形図あるいは、Delaunay 三角形分割図と呼ばれる。

Delaunay 三角形図は、ロシアの数学者 Boris Delaunay（ドローネと読む。Delone とも書く。）の1934年の「空白円」に関する論文に由来する<sup>10)</sup>。

Voronoi 点では、少なくとも3本の Voronoi 辺が集まることと Delaunay 三角形は、3つの Voronoi 領域の母点を結んでできたものであることからそれぞれの Delaunay 三角形には、一つずつ Voronoi 点に対応している。

10) Sur la sphères vide, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Otdelenie Matematicheskii i Estestvennyka Nauk* 7 (1934), 793-800.

Voronoi 点から3つの母点までの距離が等しいことから Voronoi 点を中心として Delaunay 三角形の3つの頂点を通る外接円を描くことができる。外接円は、他に頂点がないという意味で、空白円という。そのとき、Voronoi 点は、Delaunay 三角形の外心である。

逆に、Delaunay 三角形図の隣接関係を見ると、それは Voronoi 辺にはかならない。このことから、Voronoi 図と Delaunay 三角形図は、双対（そうつ）関係にあるという。この関係から、Delaunay 三角形図は、Voronoi 図を基に作り出せ、Voronoi 図は、Delaunay 三角形図から構成されるのである。

実際的な応用として、小樽市街にある、28個の郵便局の所在と、それらの Voronoi 図、Delaunay 三角形図を求めたので、以下に示す。これは、利用者の利用圏や、適正な配置かどうかを知る上で、有効な社会的情報となる<sup>11)</sup>。

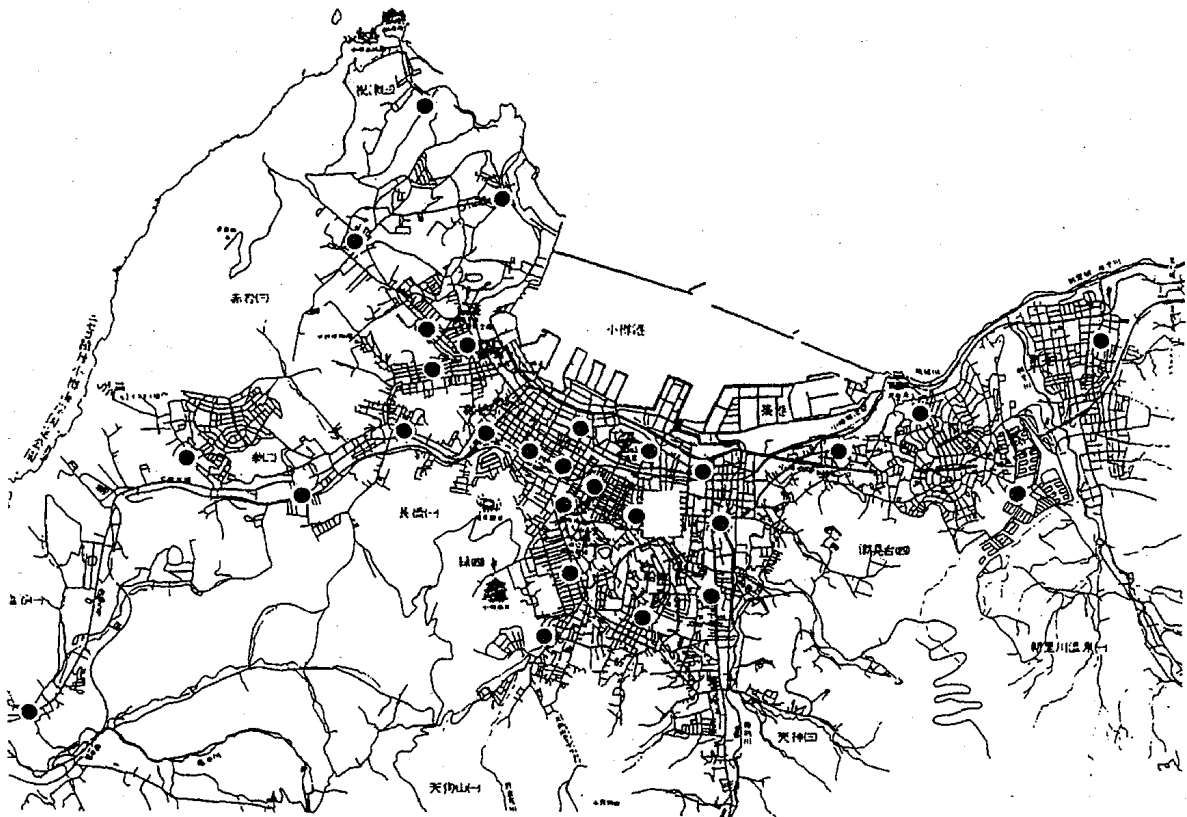


図4. 1 : 小樽市街に実在する郵便局の配置 (次図参照)

11) 若林ゼミナールの学生であった田中 麻友さんの計算に負う所が大きい。

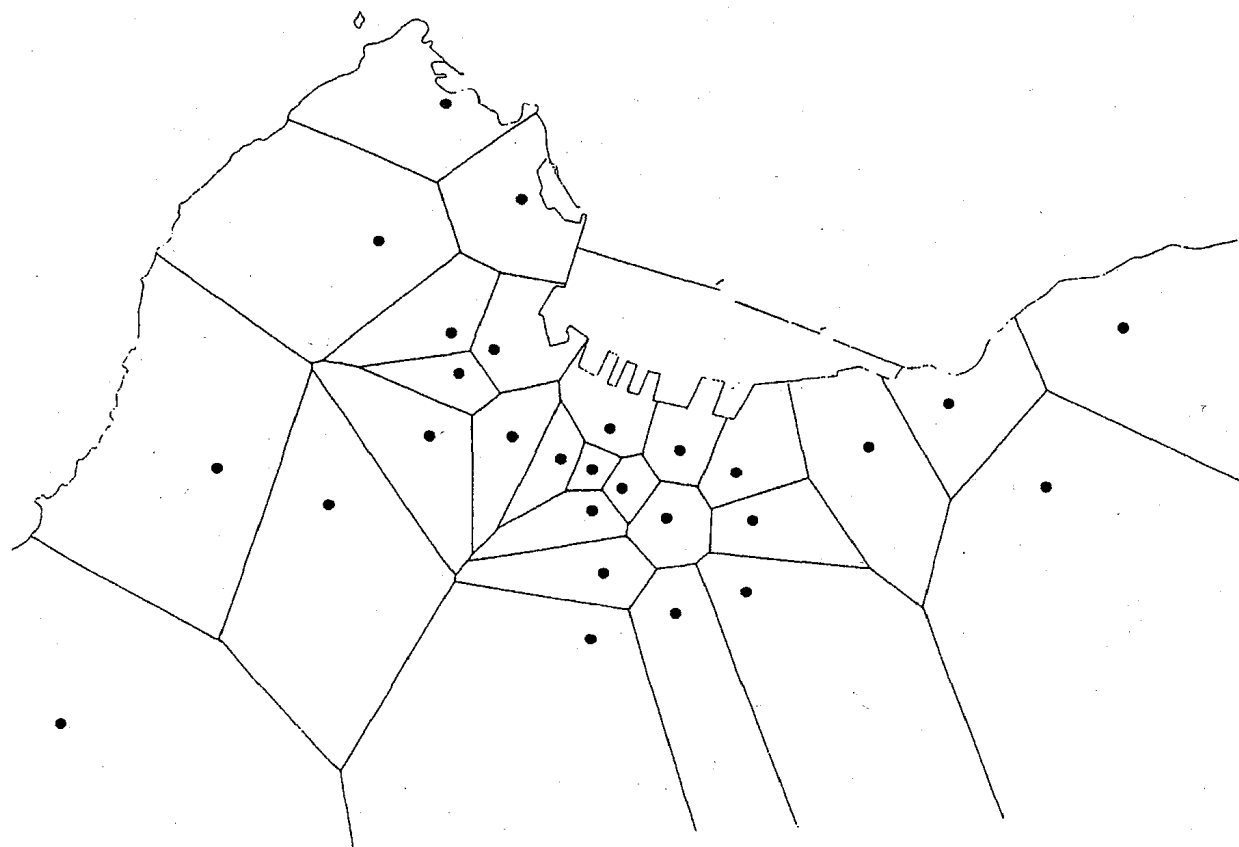


図4. 2 : 小樽市街の郵便局を母点とするボロノイ図

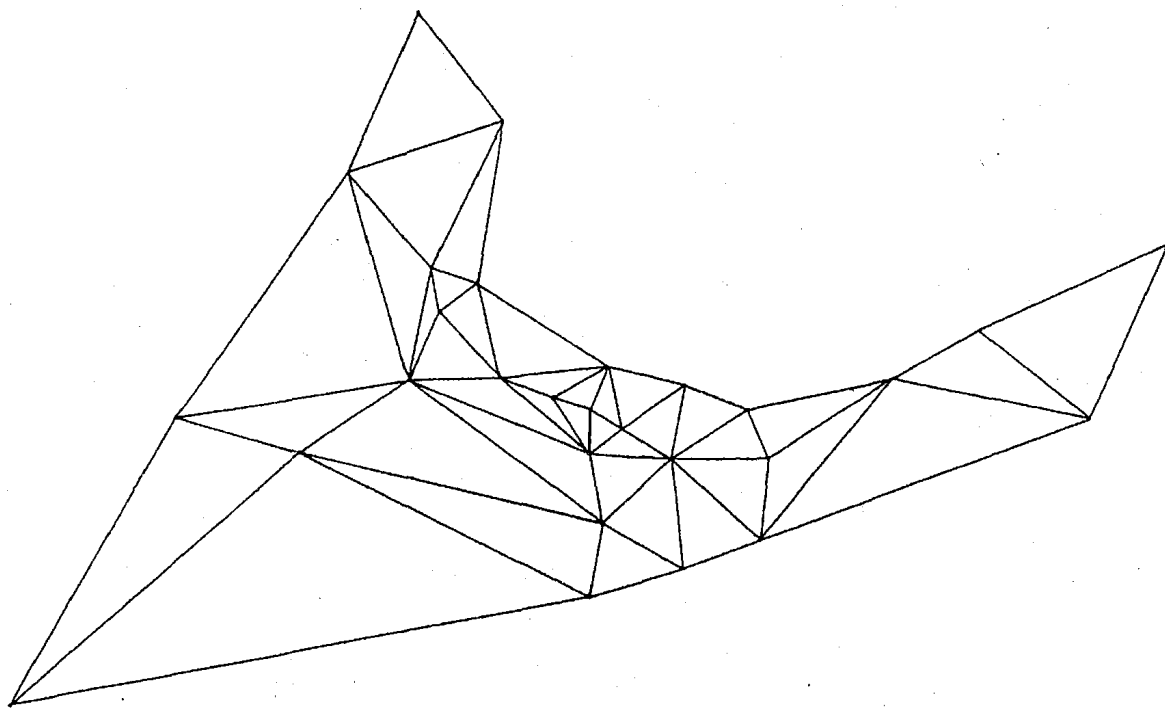


図4. 3 : ドローネ三角形図



## 6 Voronoi 図を求めるソフトウェア

Voronoi 図を作成するコンピュータプログラムには、いくつかのものが知られている。インターネット上の archie を実行し、Voronoi を探せば、

1. Voronoi. tar. Z 40929 April 30 1993
2. new-version-convex-hull-Delaunay-Voronoi 2294 May 26 1994が国内サイトで見つかる。

また、Delaunay で探せば、Mathematica で実行できる

3. Delaunay. m 5706 Aug 16 1994や、
4. Delaunay. SUN

が見つかる。さらに、外国まで、範囲を広げると、相当数の公開されたソフトウェアが様々な分野に応用されて存在することがわかる<sup>12)</sup>。

以下では、上記以外の3つを紹介する。

第一は、杉原・伊理プログラム (1989)<sup>13)</sup>である。これは、Fortran プログラム2,300行で提供され、Sunワークステーションでコンパイル、実行して使う。ユーザーは、母点の座標さえ入力すれば、算法の詳細を知らなくても、容易に、Voronoi 図や Delaunay 三角形分解図を得ることができる。算法の詳細を知れば、Fortran プログラムを修正して、自分の好むものが得られる。実際、ユーザーインタフェースが貧弱であるので、プログラムを読んで使い易くしなければならなかった。しかし、数値計算の精度、頑健性に定評がある。

第2は、qhull と呼ばれる、C言語で書かれた、登録商標付きのフリーソフトの凸包プログラムである<sup>14)</sup>。

12) netscape <http://opentext.uunet.ca:8080/> を実行し、Voronoi をサーチすると、

“Voronoi” -375 hits in 158 pages

と158か所に375件が表示され、そこから関連情報を得る（サーフィンする）ことができる。(1995年4月28日現在)

13) Sugihara, K. and Iri, M., Voronoi 2 Reference Manual, RMI 89-04, 東京大学工学部計数工学科

14) ftp geom. umn. edu (または、ftp 128.101.25.35) とすれば、入手することができる。

現在、2.02 (1995.01.25) 版であり、米国ミネソタ大学のジオメトリ・センターが提供している。凸包の計算、Delaunay 三角形、Voronoi 図を3次元以上まで、最も高速に計算する。グラフ出力まで行うので、多数のオプションを持つ大きなパッケージである。Rbox と呼ばれる Qhull のための入力を生成するツールも備えている。

出力として、Mathematica 用の入力データを生成することができることも特徴である。

qhull の使用法を簡単に示すと以下のようである。

使用法 : qhull

入力 (標準入力) : 次元, 点の個数, 点の座標

主なオプション :

- d Delaunay 三角形
- v Voronoi 図 (Delaunay 三角形図から)
- Tv 結果の検証

主な出力オプション (デフォルトでは、要約情報を表示する.):

- f すべての場面を印刷する。
- G Geomview 出力
- i (Voronoi の中心) 各々の面に接続する頂点
- m Mathematica 出力
- p (Voronoi の中心) 点の座標

第3は、数式処理言語として名高い、Mathematica の Package 利用である。周知のように、Mathematica は、数値計算、数式処理、グラフィックス処理、マルチメディア機能を統一的な環境の下においているが、第2.0版より、DiscreteMath 'ComputationalGeometry' という Package が提供された。ユーザーは、

<<Folder 名 (すなわち, DiscreteMath) 'Package 名 (すなわち,

Computational Geometry) により、直接読み込んで、以下の13個のシンボル名のいくつかを、実行させる。

1. DelaunayTriangulation
2. VoronoiDiagram
3. ConvexHull
4. NearestNeighbor
5. TriangularSurfacePlot
6. PlanarGraphPlot
7. DiagramPlot
8. DelaunayTriangulationQ
9. LabelPoints
10. Ray
11. AllPoints
12. Hull
13. TrimPoints

関数 `VoronoiDiagram[{{x1, y1}, {x2, y2}, ..., {xn, yn}}]` は、平面的多数の点の Voronoi 図を作成する。結果は、2つのリストによって表わされる。Voronoi 図の頂点の座標リストと、頂点の隣接リストである。関数の引数に、さらに、`val` や `hull` を加えることによって、Voronoi 図をより効率よく計算することができる。

Mathematica を用いて Voronoi 図を求めるには、オンラインマニュアルともいべきパッケージの中身を読むのがよい。パッケージには、例題なども詳しく盛り込んである<sup>15)</sup>。

---

15) この点に関しては、平成6年度特定研究経費（「数式処理言語 Mathematica を利用した数理モデルの解析」（2の1））に基き、Power Macintosh 上で実施した。記して感謝したい。

## 7 結語的覚書

最適施設配置の問題は、古くて新しい問題である。また、応用範囲も広く、単に、地理的な施設配置にとどまらない。社会的な人員配置やロケーション問題であるところの雇用の調整、組織の編成の問題などにも考え方には共通の要素がある。

最適施設配置は、本稿のような数学的な処理や、情報科学的な処理によって、解を提案できるが、その実施は、政策者の決断にゆだねられる。社会情報アプローチとしては、データの収集、処理、整理を適切に行い、問題の枠組みを設定し、定式化し、問題の解を得るなどして政策者の価値判断を助けるために情報を提供することにある。そのさい、どのような「仮定」が設定されているか注意する必要がある。