双線形モデルにおける因子回転

小笠原　春　彦

要　　約

因子分析モデルで代表される双線形モデルには，交互作用項の部分に因子回転に相当する自由度が存在する。この研究では，因子分析以外の双線形モデルのうち，２元頻度表に関する対数双線形モデルと２要因分散分析モデルのひとつであるFANOVAモデルをとりあげ，複数の因子負荷行列を対象に因子回転を行い，その標準誤差を推定する方法を示した。また，線形項の含まれるモデルでは因子負荷行列の列和が0である制約が課されることが多いので，従来の回転方法に加えて，寄与の分散を最小化する方法を示した。

１．双線形モデル

観測個体×変数で構成されるデータ行列や２元の分割表等において，(i, j)要素の頻度または連続変数の測定値を x_{ij} とあらわす $(i=1,\ldots,p;\ j=1,\ldots,q)$。双線形とは

$$x_{ij} \cong \sum_{k=1}^{r} \lambda_{1ik}\ \lambda_{2jk} \qquad (1)$$

のようにモデルが積の形の項を含むことを意味する。この場合，λ_{1ik}, λ_{2jk} はパラメータである場合と確率変数である場合がある。また，次のように線形の

項が含まれることがある。

$$x_{ij} \cong \mu_g + \mu_{1i} + \mu_{2j} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{1ik} \lambda_{2ik} \tag{2}$$

Kruskal (1981) は(1)式のモデルを純双線形(pure bilinear expression), (2)式のモデルを混合双線形(mixed bilinear expression)とよび区別している。当論文では(1), (2)式の表現をともに双線形モデルとよぶ。(2)式の典型的なモデルはいわゆる因子分析モデルである。すなわち,

$$x_i \cong \mu + \Lambda f_i \tag{3}$$

である。ここで, $\underline{x_i}=(x_{i1},\ldots,x_{ip})'$, $\underline{\mu}=(\mu_1,\ldots,\mu_p)'$, $\Lambda=[\lambda_{ij}]$, $\underline{f_i}=(f_{i1},\ldots,f_{ir})'$であり, $\underline{x_i}$はi番目の被験者に関する観測値のベクトル, $\underline{\mu}$は平均のベクトル, Λは因子負荷行列, $\underline{f_i}$は因子得点のベクトルである。$\underline{f_i}$が確率変数ではなく$\underline{\mu}$, Λと同様にパラメータである場合は因子分析の母数模型とよばれるが,これは(2)式においてμ_g, μ_{1i}がない場合に相当する。$\underline{f_i}$が確率分布に従う変量模型の場合は,パラメータについてのみ考えると(3)式は線形モデルである。

ところで(2)式にはモデルに一意性がないことはあきらかである。そのひとつは位置に関するもので,もうひとつは尺度を含む変換に関するものである。前者の不定性を除くために,通常$\sum_{i=1}^{p}\mu_{1i}=\sum_{j=1}^{q}\mu_{2j}=\sum_{i=1}^{p}\lambda_{1ik}=\sum_{j=1}^{q}\lambda_{2jk}=0, (k=1,\ldots,r)$のような制約が課される。後者の不定性の問題は次により示される。

$$\Lambda_1\Lambda_2' = \Lambda_1 T T^{-1} \Lambda_2' = \Lambda_1 T(\Lambda_2 T'^{-1})' \tag{4}$$

ここで,(4)式は(2)式の右辺第4項に対応する行列であり,$\Lambda_1=[\lambda_{1ik}]$, $\Lambda_2=[\lambda_{2jk}]$である。また, Tは任意のk次の正則な正方行列である。

この問題は(3)式の因子分析モデルでは因子の変換や回転の問題として古く

から研究されてきた（例えばHarman，1976，芝，1979，柳井他，1990参照）。これは一意性の欠如を逆に利用して，Λの変換後の行列ΛTをより適切なものに構成するということでもあるが，変換の対象は通常の場合Λというひとつの負荷行列である。一方，(2)式の場合に因子分析モデルとの類似性からΛ_1とΛ_2を因子負荷行列とよぶと(2)式には通常の因子分析モデルと異なり，2つの因子負荷行列が存在することになる。

当論文ではこのような双線形モデルにおける因子の変換問題を2つの主なモデルについて扱う。なお，(2)式は最も簡単なケースとして示したもので一般には次のように表わされる。

$$f(E(X_{ij})) = \mu_g + \mu_{1i} + \mu_{2i} + \sum_{k=1}^{r} \lambda_{1ik}\ \lambda_{2ik} \tag{5}$$

ここで，$f(\cdot)$は一般化線形モデル（McCullagh & Nelder, 1989）における種々のリンク関数に対応する。すなわち，期待値のある変換が双線形となっているモデルである。ただし，(5)式の右辺は双線形モデルであるのでこれは一般化双線形モデル（Choulakian, 1996）である。

2．対数双線形モデルにおける因子回転

2．1　対数線形モデルと対数双線形モデル

対数線形モデルは頻度表・分割表のモデルとしてよく知られている（例えばBishop et al., 1975参照）。2元頻度表の(i, j)要素の頻度に関する確率変数をX_{ij}とすると典型的な対数線形モデルは

$$\ln(E(X_{ij})) = \mu_g + \mu_{1i} + \mu_{2j} + \mu_{3ij} \tag{6}$$

である。ここでμ_{3ij}はいわゆる交互作用の項を表わしている。対数双線形(log bilinear）モデルはμ_{3ij}の項が双線形に構造化されたモデルであり，RC連関

モデル，乗法的交互作用モデル等ともよばれることがある (Goodman，1985，1986，1991; Andersen, 1994)。

上記の確率変数 X_{ij} は互いに独立にポアソン分布に従うと仮定するとそれぞれの確率関数は次のように記述される。

$$P(X_{ij}=x_{ij})=\exp(\delta_{ij}x_{ij})\exp\{-\exp(\delta_{ij})\}/x_{ij}!, \tag{7}$$
$$\delta_{ij}=\mu_g+\mu_{1i}+\mu_{2j}+\sum_{k=1}^{r}\lambda_{1ik}\phi_k\lambda_{2jk},\ (i=1,\dots,p;\ j=1,\dots,q)$$

ここで ϕ_k はモデルの一意性のために導入されたパラメータで，厳密には(7)式は三重線形 (trilinear) であるが，これは回転により双線形に変換される。

さて，モデルの一意性のためにパラメータに制約を付す。まず，各パラメータをベクトルと行列で次のように表わす。

$$\underline{\mu}_1=(\mu_{11},\dots,\mu_{1p})',\ \underline{\mu}_2=(\mu_{11},\dots,\mu_{1q})', \tag{8}$$
$$\Lambda_1=[\lambda_{1ik}],\ \Lambda_2=[\lambda_{2ik}],\ \Phi=\mathrm{diag}(\phi_1,\dots,\phi r)$$

パラメータの制約は

$$\underline{\mu}_1'\underline{1}_p=0,\ \underline{\mu}_2'\underline{1}_q=0,\ \Lambda_1'\underline{1}_p=\Lambda_2'\underline{1}_q=\underline{0}_r, \tag{9}$$
$$\Lambda_1'\Lambda_1=I_r,\ \Lambda_2'\Lambda_2=Ir$$

である。ここで，$\underline{1}_s=(1,\dots,1)'$ (s 個の1), $\underline{0}_r=(0,\dots,0)'$ (r 個の0) で I_r は r 次の単位行列である。

ところで，(7)式において λ_{1ik} あるいは λ_{2jk} の一方が潜在確率変数であるモデルは， Ogasawara (1996a, b) のモデルであるがこれは(3)式の通常の因子分析モデルを頻度のケースにあてはめたものであり，「ポアソン因子分析」あるいは「潜在変数を含む対数双線形モデル」と名付けられている。この表現を用いると(7)式のモデルはポアソン因子分析の母数模型ということもできよう。ただ

し，通常の因子分析モデルのようにΛ_1とΛ_2の一方が因子負荷で他方が因子得点であるという区別は一般にはない。

2．2　回転前パラメータの推定

パラメータの推定は尤度を最大化することにより行う。回転前のパラメータの推定に関する当節の方法は Gilura and Haberman (1986) により，示されているものであるが，この方法は他の双線形モデルにも応用可能であり，また，回転後の結果とも密接に関連するので要点を述べる。

各頻度 ($X=[x_{ij}]$) の観測が相互に独立であるという仮定の下で，各パラメータの尤度は次のようになる。

$$\begin{aligned} L(\mu_g, \underline{\mu_1}, \underline{\mu_2}, \Lambda_1, \Lambda_2, \Phi \mid X) &= \prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q} \exp(\delta_{ij}\, x_{ij}) \exp\{-\exp(\delta_{ij})\}/x_{ij}! \\ &= \exp\Big(\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\delta_{ij}\, x_{ij}\Big) \exp \sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\{-\exp(\delta_{ij})\} \\ &\quad /\prod_{i=1}^{p}\prod_{j=1}^{q} x_{ij}! \end{aligned} \tag{10}$$

パラメータの推定値は(9)式の制約の下で(10)式を最大化するものである。

負の対数尤度をfとすると

$$f=-\ln L=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\{-\delta_{ij}\, x_{ij}+\exp(\delta_{ij})+\ln(x_{ij}!)\} \tag{11}$$

である。(9)式の制約に対応するラグランジュの未定乗数をそれぞれ，α_1, α_2, $\underline{\beta_1}=(\beta_{11},\ldots,\beta_{1r})'$, $\underline{\beta_2}=(\beta_{21},\ldots,\beta_{2r})'$, $\Gamma_1\,(=\Gamma_1')$, $\Gamma_2\,(=\Gamma_2')$ とすると最小化基準gは次のようになる。

$$\begin{aligned} g &= f + l, \\ l &= \alpha_1 \underline{\mu_1}'\underline{1}_p + \alpha_2 \underline{\mu_2}'\underline{1}_q + \underline{\beta_1}'\,\Lambda_1'\underline{1}_p + \underline{\beta_2}'\,\Lambda_2'\underline{1}_q \\ &\quad + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\{\Gamma_1(\Lambda_1'\Lambda_1 - I_r)\} + \frac{1}{2}\operatorname{tr}\{\Gamma_2(\Lambda_2'\Lambda_2 - I_r)\} \end{aligned} \tag{12}$$

(12)式の最小化はスコア法を用いた数値計算による。これに必要なグラディエントベクトルは g 番目のパラメータを θ_g とすると

$$\frac{\partial g}{\partial \theta_g}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\{-x_{ij}+\exp(\delta_{ij})\}\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \theta_g}+\frac{\partial l}{\partial \theta_g} \tag{13}$$

のように表わされる。上式の右辺の要素は容易に得られ表1－1のようになる。また，情報行列の (g, h) 要素は

$$E\{\partial^2 g/\partial \theta_g \partial \theta_h\}=\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\exp(\delta_{ij})\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \theta_g}\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \theta_h}+\frac{\partial^2 l}{\partial \theta_g \partial \theta_h} \tag{14}$$

である。ここで $\partial^2 l/\partial\theta_g\partial\theta_h$ のうち0でない要素は表1－2のようになる。未定乗数を除くパラメータの数は $p+q+1+r(p+q+1)$ であるが，未定乗数の数に相当する制約の数は $\underline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_2$, Λ_1, Λ_2 の順に1, 1, $r+(r/2)(r+1)$, $r+(r/2)(r+1)$ である。繰り返し計算は次のように行う。

$$\underline{\theta}_{p(i+1)}=\underline{\theta}_{p(i)}-I_{(i)}^{-1}\underline{g}_{(i)} \tag{15}$$

ここでは $\underline{\theta}_{p(i)}$ 未定乗数を含む $p+q+3+r(p+q+r+4)$ 個のパラメータを並べたベクトルで添字の (i) は i 番目の繰り返しにおける値であることを表わす。$I_{(i)}$ は情報行列，$\underline{g}_{(i)}$ はグラディエントベクトルである。

表１－１　グラディエントベクトルの要素

パラメータ	$\partial\delta_{ij}/\ \partial\theta_g$	$\partial l/\ \partial\theta_g$	添字の範囲
μ_g	1	0	
μ_{1g}	δ^*_{ig}	α_1	$g=1,\cdots,p$
μ_{2h}	δ^*_{jh}	α_2	$h=1,\cdots,q$
λ_{1gk}	$\delta^*_{ig}\ \phi_k\ \lambda_{2jk}$	$\beta_{1k}+(\Lambda_1\Gamma_1)_{gk}$	$g=1,\cdots,p;k=1,\cdots,r$
λ_{2hk}	$\delta^*_{jh}\ \phi_k\ \lambda_{1ik}$	$\beta_{2k}+(\Lambda_2\Gamma_2)_{hk}$	$h=1,\cdots,q;k=1,\cdots,r$
ϕ_k	$\lambda_{1ik}\ \lambda_{2jk}$	0	$k=1,\cdots,r$
α_1	0	$\underline{\mu}_1'\underline{1}_p$	
α_2	0	$\underline{\mu}_2'\underline{1}_q$	
$\underline{\beta}_1$	$\underline{O}_r$	$\Lambda_1'\underline{1}_p$	
$\underline{\beta}_2$	$\underline{O}_r$	$\Lambda_2'\underline{1}_q$	
γ_{1kk}	0	$(1/2)\{(\Lambda_1'\Lambda_1)_{kk}-1\}$	$k=1,\cdots,r$
γ_{1kl}	0	$(\Lambda_1'\Lambda_1)_{kl}$	$r\geq k>l\geq 1$
γ_{2kk}	0	$(1/2)\{(\Lambda_2'\Lambda_2)_{kk}-1\}$	$k=1,\cdots,r$
γ_{2kl}	0	$(\Lambda_2'\Lambda_2)_{kl}$	$r\geq k>l\geq 1$

注　δ^*_{ig} はクロネッカーのデルタ（$\delta^*_{st}=1, s=t;\ \delta^*_{st}=0, s\neq t$）
　　であり、$\Gamma_1=[\gamma_{1kl}]$, $\Gamma_2=[\gamma_{2kl}]$である。

表１－２　情報行列の要素

パラルータの対	$\partial^2 l/\ \partial\theta_g\ \partial\theta_h$	添字の範囲
$\mu_{1g},\ \alpha_1$	1	$g=1,\cdots,p$
$\mu_{2h},\ \alpha_2$	1	$h=1,\cdots,q$
$\lambda_{1gk},\ \lambda_{1gl}$	γ_{1kl}	$g=1,\cdots,p;\ r\geq k\geq l\geq 1$
$\lambda_{1gk},\ \beta_{1k}$	1	$g=1,\cdots,p;\ k=1,\cdots r$
$\lambda_{1gk},\ \gamma_{1kl}$	λ_{1gl}	$g=1,\cdots,p;\ r\geq k\geq l\geq 1$
$\lambda_{1gl},\ \gamma_{1kl}$	λ_{1gk}	$g=1,\cdots,p;\ r\geq k>l\geq 1$
$\lambda_{2hk},\ \lambda_{2hl}$	γ_{2kl}	$h=1,\cdots,q;\ r\geq k\geq l\geq 1$
$\lambda_{2hk},\ \beta_{2k}$	1	$h=1,\cdots,q;\ k=1,\cdots,r$
$\lambda_{2hk},\ \gamma_{2kl}$	λ_{2hl}	$h=1,\cdots,q;\ r\geq k\geq l\geq 1$
$\lambda_{2hl},\ \gamma_{2kl}$	λ_{2hk}	$h=1,\cdots,q;\ r\geq k>l\geq 1$

2．3　線形項のないモデル

(7)式のモデルにおいてμ_g, μ_{1i}, μ_{2i}を除いたモデルは前述の純双線形のモデルである。これは，(3)式の通常の因子分析モデルでは平均項$\underline{\mu}$を除いたモデルに相当する。Okamoto (1972)は主成分分析の文脈ではあるがこのようなモデルをN（natural, naiveの意）テクニクとよんだ。ここでも，その呼び方を援用する。このモデルは表現が簡略になる反面，データへのモデルのあてはまりは，同一のr（因子数と呼ぶ）の場合は(7)式のモデルと比べると不利である。

Nテクニクのモデルでは$\delta_{ij}=(\Lambda_1\Phi\Lambda_2')_{ij}$である。したがって，モデルの一意性のための$\Lambda_1$と$\Lambda_2$の制約は$\Lambda_1'\Lambda_1=I_r$, $\Lambda_2'\Lambda_2=I_r$のみでよい。パラメータの推定法は前節において，該当しないパラメータと不要な制約の部分を除いて構成すればよい。なお，(7)式のモデルとNテクニクのモデルの中間のものとして通常の因子分析モデルのように，2つの要因（被験者と変数）のうち平均項が一方の要因のみに設定されるモデルも同様に構成することができる。

2．4　因子回転の方法

線形項を含むモデル及びNテクニクのモデルのいずれにおいても交互作用項を様々に変換することが可能である。交互作用項を集合的に$\Lambda_1\Phi\Lambda_2'$で表わすと，

$$\begin{aligned}\Lambda_1\Phi\Lambda_2' &= \Lambda_1 T(T^{-1}\Phi S'^{-1})(\Lambda_2 S)' \qquad (16)\\ &= (\Lambda_1\Phi^{1/2}cT)(\Lambda_2\Phi^{1/2}(1/c)T'^{-1})'\end{aligned}$$

である。ここで，S, Tはr次の任意の正則な正方行列である。(16)の上の式は$T^{1}\Phi S'^{-1}$が因子間の関連を表わす行列（一般に非対称）としてあらわれており，解釈は単純ではない。(16)の下の式のTは直交行列である必要はないが，$T'T=TT'=I_r$とすると，tr $\{(\Lambda_1\Phi^{1/2}cT)(\Lambda_1\Phi^{1/2}cT)'\}=\mathrm{tr}(\Phi)c^2$,tr $\{\Lambda_2\Phi^{1/2}(1/c)T)(\Lambda_2\Phi^{1/2}(1/c)T)'\}=\mathrm{tr}(\Phi)/c^2$となって$c$が一定とすると因子負荷の

2乗の平均の大きさが変換によっても変わらないのでわかりやすい。また，因子分析における直交回転の諸手法を利用することも容易となる。

c の大きさは1とすると各因子の寄与が2つの因子負荷行列で等しくなり自然のようにみえる。これは，2つの要因の水準の数 (p, q) が同一の場合は良いが，それらが異なると水準数の大きい（小さい）方の要因の因子負荷が平均的に小さく（大きく）なるので，同一の座標にプロットする場合などはわかりにくくなる。したがって，因子負荷の2乗の平均が Λ_1 と Λ_2 とで等しくなるように $c=(p/q)^{1/4}$ とすると便利であろう。

さて，$\Lambda_1\Phi^{1/2}c$ と $\Lambda_2\Phi^{1/2}/c$ をそれぞれ A_1, A_2 とあらわし，これを回転前因子負荷行列とよび，直交回転後の因子負荷行列を B_1, B_2 であらわすと

$$B_1=\Lambda_1\Phi^{1/2}cT = A_1T, B_2=\Lambda_2\Phi^{1/2}(1/c)T = A_2T \tag{17}$$

である。ここで問題は適切な B_1 と B_2 をもたらす T を求めることである。通常の因子分析の状況では因子負荷行列はひとつであることが多いが，インターバッテリー法のように変数が2つのグループに分かれる場合（小笠原，1986）や複数の被験者集団から得られたデータ等の場合のように，複数の因子負荷行列が存在することもある。Hakstian (1976) は2つの因子負荷行列が存在する場合に，いずれの行列にもいわゆる単純構造をもたらすような共通の直交行列を得る方法を提案している。

これは，因子回転後の各因子負荷行列のいわゆるオーソマックス基準の和を最大化するものである。すなわち，最大化基準 $o(B_1, B_2)$ は

$$o(B_1,B_2)=\frac{1}{4p}\sum_{j=1}^{r}\{\sum_{i=1}^{p}b_{1ij}^4-\frac{w}{p}(\sum_{i=1}^{p}b_{1ij}^2)^2\}+\frac{1}{4q}\sum_{j=1}^{r}\{\sum_{i=1}^{q}b_{2ij}^4-\frac{w}{q}(\sum_{i=1}^{q}b_{2ij}^2)^2\} \tag{18}$$

である。ここで，$B_1=[b_{1ij}]$，$B_2=[b_{2ij}]$ であり，w はオーソマックス・ウェイトである。例えば w=1のケースはいわゆるバリマックス法に対応する。なお，因子負荷行列が2つある場合でも(18)式の2つの項のうち，一方のみを用いる

ことも可能であるし，各項に異なるオーソマックス・ウェイトを用いることも可能である。

ところで，(18)式を最大化することにより，B_1, B_2には単純構造がもたらされ，解釈が容易になることが期待される。しかし，平均項を含むモデルではΛ_1とΛ_2には，各列の和が0であるという制約が課されている。この制約は，$\underline{1}_p{}'B_1=\underline{1}_p{}'\ \Lambda_1\Phi^{1/2}cT=\underline{0}_r, \underline{1}_q{}'B_2=\underline{1}_q{}'\ \Lambda_2\Phi^{1/2}(1/c)T=\underline{0}_r$であり，回転後も保存される。したがって，このようなケースでは(18)式を最大化することにより，解釈の容易な行列が得られない可能性がある。そこで，次のような方法を考える。

オーソマックス法において，バリマックス法はw=0のクォーティマックス法よりも寄与の大きさが平均化（水準化）されることが知られている。寄与の水準化が好ましいことの根拠は必ずしも明確ではないが，各因子が異なる側面を同程度の強さで表現している場合（寄与が水準化されている場合）には，因子の解釈も全体として，行いやすいことは確かである。そこで，(17)式の直交回転のもうひとつの方法としてB_1とB_2の寄与の水準化を得ることを考える。

寄与の水準化を最大化するには寄与の分散を最小化すればよい。B_1についてのみ考えるとこれは$(1/r)\sum_{j=1}^{r}(\sum_{i=1}^{p}b_{1ij}^2)^2-\{(1/r)\sum_{j=1}^{r}\sum_{i=1}^{p}b_{1ij}^2\}^2$を最小化することであるが，第2項は直交回転により不変であるので第1項を最小化すればよい。これは，(18)式からもわかるように，オーソマックス・ウェイトのつかない項を除いたオーソマックス基準を最大化することに対応している。前川（柳井他，1990，p.102）はこれを$w\to+\infty$のケースとして説明しているが，実際にこの方法が適用された例を筆者は知らない。

この方法を水準化法（leveling method）とよぶことにする。2つの行列の場合については寄与の分散の和を定数（負）倍した次の$l(B_1, B_2)$のを最大化する。

$$l(B_1,B_2)=-(1/4)\sum_{j=1}^{r}\{(\sum_{i=1}^{p}b_{1ij}^2)^2+(\sum_{i=1}^{q}b_{2ij}^2)^2\} \qquad (19)$$

ここで負の値をとるのは通常のオーソマックス法のアルゴリズム（例えば

Kaiser, 1958)を少ない修正で用いることができるようにするためである。なお，前述のHakstianの方法も通常のオーソマックス法の計算法を基本的には用いることができる。

2．5　因子回転後の因子負荷の標準誤差

因子回転後の因子負荷の漸近的標準誤差は，多変量正規分布を仮定する連続変数の因子分析モデルの場合と同様に，制約付最尤推定量の漸近的標準誤差として求めることができる。ポアソン分布を仮定する，対数双線形モデルの場合もこの方法を利用することができる。また，因子回転後の因子負荷の制約式の表現は，複数の因子負荷行列がある場合にも単一の因子負荷行列のケースを基にして簡単に求められる。単一の因子負荷行列における直交回転の場合の制約はArcher and Jennrich（1973)によって得られた。これは，どんな種類の回転法でも解析的な方法であれば適用することができる一般的なものである。しかし，Archer and Jennrichの証明は読みやすいものではない。

一方，回転後の制約式という観点からではなく，回転後の因子負荷行列を求めるという観点からは，バリマックス法についてはMagnus and Neudecker (1988，p.375，(12)式)がラグランジュの未定乗数法を用いて，その導出の途中で制約式に相当する式に到達している。しかし，推定量の制約という観点ではないので途中の式として記述されているのみである。また，竹内・柳井(1972，p.230，(7.78)式)もラグランジュの未定乗数法を用いて直交回転後の因子負荷を求める一般解として制約式の直前の段階に到達しているが，推定量の制約式という観点はとられていない。

ここでは，ラグランジュの未定乗数法をもとにして，これらの研究の延長として複数の因子負荷行列がある場合について，回転後の因子負荷の制約式を次に示す。

まず，s個の回転後の因子負荷行列$B_1,\dots,B_s$が存在し，回転の最大化基準tは個々の最大化基準（異なる種類の基準でもよい）の和で次のようにあらわされるとする。

$$t(B_1,\dots,B_s) = \sum_{k=1}^{s} t_k(B_k) \tag{20}$$

このとき $B_1,\dots,B_s$ は直交回転のための行列を T とすると $T'T=I_r$ の条件の下で $t(B_1,\dots,B_s)$ を最大化するものとして得られる。したがって，ラグランジュの未定乗数として対称行列 Γ を導入すると解は

$$f = t(B_1,\dots,B_s) - (1/2)\mathrm{tr}\,\{\Gamma\,(T'T - I_r)\} \tag{21}$$

を最大化するものとして得られる。(21) 式に (20) 式を代入して f の T に関する微分をとると次のようになる。

$$df = \sum_{k=1}^{s} \mathrm{tr}\,\left\{\frac{\partial t_k(B_k)}{\partial B_k'} d B_k\right\} - \mathrm{tr}\,(\Gamma T' dT) = \mathrm{tr}\left[\left\{\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial t_k(B_k)}{\partial B_k'} A_k\right) - \Gamma T'\right\} dT\right] \tag{22}$$

最適値においては f の T に関する偏微分が O であることから

$$\sum_{k=1}^{s}\left(\frac{\partial t_k(B_k)}{\partial B_k'} A_k\right) - \Gamma T' = O \tag{23}$$

であり，右から T をかけて Γ が対称であることを用いると

$$Q = \sum_{k=1}^{s} \frac{\partial t_k(B_k)}{\partial B_k'} B_k - \sum_{k=1}^{s} B'_k \frac{\partial t_k(B_k)}{\partial B_k} = O \tag{24}$$

が得られる。(24) 式における Q のユニークな要素数は $r(r-1)/2$ 個である。(18) 式のオーソマックス基準の場合について具体的に表現すると $Q=[q_{ij}]$ として，

$$q_{ij} = \sum_{l=1}^{p}\left\{\left(b_{1li}^3 - \frac{w}{p} b_{1li} \sum_{h=1}^{p} b_{1hi}^2\right) b_{1lj} - \left(b_{1lj}^3 - \frac{w}{p} b_{1lj} \sum_{h=1}^{p} b_{1hj}^2\right) b_{1li}\right\} \frac{1}{p} \tag{25}$$

$$(i>j) \qquad + \sum_{l=1}^{q}\left\{\left(b_{2li}^3 - \frac{w}{q} b_{2li} \sum_{h=1}^{q} b_{2hi}^2\right) b_{2lj} - \left(b_{2lj}^3 - \frac{w}{q} b_{2lj} \sum_{h=1}^{q} b_{2hj}^2\right) b_{2li}\right\} \frac{1}{q}$$

である。なお，(16)，(17)式からわかるようにA_1とA_2を変換前因子負荷行列として定めた場合，一般には回転以外の変換の自由度があるので，モデルの一意性のためにはr^2個の制約が必要である。そこで，(24)式以外の制約は次のように求める。

$$B_1'B_1 = T'\,\Phi\,(p/q)^{1/2}T,\quad B_2'B_2 = T'\,\Phi\,(q/p)^{1/2}T \tag{26}$$

であるので

$$R = q\,B_1'\,B_1 - p\,B_2'\,B_2 = O \tag{27}$$

である。Rの(i, j)要素r_{ij}についてみると

$$r_{ij} = q\sum_{l=1}^{p} b1_{li}\,b1_{lj} - p\sum_{l=1}^{q} b2_{li}\,b2_{lj} \qquad (i \geq j) \tag{28}$$

であり，ユニークなRの要素の数は$r(r+1)/2$個である。

B_1とB_2の漸近的標準誤差は拡大された情報行列Iに以上の結果を用いることにより求めることができる(Silvey, 1970; Jennrich, 1974; 小笠原，1996a, b)。Iの具体的な表現は付録にある。

3. FANOVAモデルにおける因子回転

FANOVA (factor analysis of variance) モデルとは2要因分散分析の交互作用項が因子分析モデルのように構造化されたモデルで，Gollob (1968)により名付けられたものである。このモデルでは前節までの対数双線形モデルの対数期待値が連続変数の期待値そのものとなっている。このモデルは分散分析のデータにおいて各セルの観測数が1の場合でも交互作用を検定できる長所があ

り，因子の数(r)がひとつの場合は1950年代から提案されている(Goodman & Haberman, 1990)。因子数が2以上の場合はGollobが最初のようであるが，この場合には回転等の変換の自由度が発生する。モデルは次のように記述される。

$$\begin{aligned} X_{ij} &= \delta_{ij} + e_{ij} \\ &= \mu_g + \mu_{1i} + \mu_{2j} + (\Lambda_1 \Phi \Lambda_2')_{ij} + e_{ij}, \\ e_{ij} &\sim N(0, \sigma^2_{ij}), (i=1,\ldots,p; j=1,\ldots,q) \end{aligned} \tag{29}$$

ここでe_{ij}は相互に独立であるとする。σ^2_{ij}は等分散を仮定することが多いがここでは，より一般的な異なる分散のケースを扱う。また，各パラメータは対数双線形モデルと同様の制約があるものとする。パラメータの値は正規分布の次の尤度をパラメータの制約の下で最大化することにより求めることができる。

$$L(\underline{\theta}, \mid X) = \prod_{i=1}^{p} \prod_{j=1}^{q} \prod_{l=1}^{n_{ij}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{ij}} \exp\left\{-\frac{(x_{ijl} - \delta_{ij})^2}{2\sigma^2_{ij}}\right\} \tag{30}$$

ここで$\underline{\theta}$,は，それぞれδ_{ij}におけるパラメータを並べたベクトルである。n_{ij}は(i, j)セルの観測個体数である。繰り返し計算も前節までの方法とほぼ同様に行うことができる。分布型がポアソン分布ではなく，正規分布であることによる計算上の相違は次の点である。

負の対数尤度$f = -\ln L$に関するグラディエントベクトルと0でない情報行列の部分は

$$\begin{aligned} &\frac{\partial f}{\partial \underline{\theta}} = -\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{q}\sum_{l=1}^{n_{ij}} \frac{(x_{ijl} - \delta_{ij})}{\sigma^2_{ij}} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \underline{\theta}}, \quad \frac{\partial f}{\partial \sigma^2_{ij}} = \frac{n_{ij}}{2\sigma^2_{ij}} - \frac{1}{2\sigma^4_{ij}} \sum_{l=1}^{n_{ij}} (x_{ijl} - \delta_{ij})^2, \\ &E\left(\frac{\partial^2 f}{\partial \underline{\theta} \partial \underline{\theta}'}\right) = \sum_{i=1}^{p} \frac{n_{ij}}{\sigma^2_{ij}} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \underline{\theta}} \frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \underline{\theta}'}, \quad E\left(\frac{\partial^2 f}{\partial (\sigma^2_{ij})^2}\right) = \frac{n_{ij}}{2\sigma^4_{ij}}, \\ &(i = 1,\ldots, p; j = 1,\ldots,q) \end{aligned} \tag{31}$$

である。(31)式より

$$\hat{\sigma}^2_{ij} = \frac{1}{n_{ij}} \sum_{l=1}^{n_{ij}} (x_{ijl} - \hat{\delta}_{ij})^2 \tag{32}$$

であるので，σ^2_{ij} は繰り返し計算において，他のパラメータの最新値を用いて計算した $\hat{\delta}_{ij}$ により更新するとよい。

因子回転の方法，回転後の因子負荷の標準誤差の求め方も前節までの結果と同様である。FANOVA モデルにおいて，Nテクニクのモデルを考えることができることも同様である。なお，等分散が仮定され，釣合い型データであれば，モデルのあてはめは各セルの平均値の線形項からの残差に関する特異値分解を行うことに相当する。

4．数値例

表2－1は Haberman (1979) に引用されている L．Srole 他の研究例で，精神の健康のカテゴリーと親の社会経済的地位に関する頻度表である。表2－2は2因子モデルのあてはめの結果である。回転の方法は2つの因子負荷行列を対象にしたバリマックス法と水準化法のものである。線形項は周辺度数に対応したものであり，その標準誤差は交互作用を表わす因子負荷に比べて小さい。この例は行と列の各カテゴリーがそれぞれ順序を構成しており，回転前の第Ⅰ因子はその順序に対応し，第Ⅱ因子は Guttman (1954) の intensity（強度）及び符号を逆にしたものを表わしている。一方，Φの対角要素の大きさをみると第Ⅱ因子は第Ⅰ因子に比べるとかなり小さい。

回転後の結果は水準化法では第Ⅰ因子は精神の健康と高い地位を表わし，第Ⅱ因子は逆に精神の不健康と低い地位を表わしており，回転前の因子負荷とは別のわかりやすさが得られている。バリマックス法では社会経済的地位のパターンは回転前の傾向をかなり残している。なお，回転後の因子負荷の標準誤差も寄与の水準化に対応して均等化していることがわかる。なお，このモデル

の適合の χ^2 値は尤度比とピアソンによるものいずれも.52（$d.f.=3$）で適合は十分である（$p>.9$）。

表2－3はNテクニクの結果である。回転前の第Ⅰ因子の標準誤差は著しく小さいが，これは周辺度数の情報を反映しているためと解釈できよう。同じく第Ⅱ因子はカテゴリーの順序に対応している。回転後の結果はバリマックス法のもののみを示してある。全体に値が大であるので見にくい面もあるが第Ⅰ，第Ⅱ因子は線形項のあるモデルの回転後の第Ⅰ，第Ⅱ因子に対応していることは明らかである。なお，この場合標準誤差も均等化されている。

表3－1はアメリカの年別（推定を含む9年分）の博士号種類別取得者数（計146,268名）の頻度表（Greenacre，1984）である。表3－2は3因子をを仮定し，Nテクニクで解析した結果である。回転法は2つの方法を示してあるがいずれも学位に関する因子負荷行列のみを対象としたものである。バリマックス法では第Ⅲ因子と第Ⅰ因子の学位の部分が回転前の傾向をかなり残している。水準化法の結果をみると第Ⅰ因子は1960-1970年，化学，生物学，第Ⅱ因子は1974-1976（推定）年，心理学，生物学，第Ⅲ因子は1972-1974年，工学，数学，社会科学他などに対応している。これらの対応はバリマックス法でもみられなくはないが，数値が回転前と同様に因子間で大きく異なるので見にくい。また，水準化法では標準誤差も均一なものが得られている（表にはないがバリマックス法の第Ⅲ因子の標準誤差は .16～.27である）。なお，尤度比とピアソンによる値はそれぞれ87.0，87.3（$d.f.=54$）であり，モデルのあてはまりとしては3因子でも十分ではない（$p<.001$）。

表4－1はGollob（1968）のデータである。これは形容詞，動詞，名詞からなる文（例 The kind man praises alcoholics.）を提示して，人物の良し悪しを11段階の評定尺度で評価させたものである。表の値は動詞と名詞の組み合わせごとの192回（8形容詞×24人）の評定の平均値である。ここでは簡単のために動詞と名詞以外の要因はないものとし，各セルは独立な20回の評定の結果であり，標本分散はいずれも1であると仮定した。表4－2は2因子を仮定したFANOVAモデル（線形項を含む）のあてはめの結果である。この例も表2－

1と同じく各行と各列は一種の順序カテゴリーでもあり，表2－2，2－3の傾向と類似のものが得られているといえる。回転後の結果は大まかには第Ⅰ因子は良い動詞と良い名詞，第Ⅱ因子は悪い動詞と悪い名詞に対応している。しかし，alcoholics は水準化法では第Ⅰ因子に大きな値である。表4－1からもわかるように alcoholics は criminals に比べると平均値のばらつきが大きことが水準化法には影響していると考えられる。なお，標準誤差はバリマックス法の結果は概して大きく，水準化法の方が全般的に小さくなっている。

表2－1　精神的健康と親の社会経済的地位＊

精神的健康のカテゴリー	親の社会経済的地位(Aが最上位)						計
	A	B	C	D	E	F	
良好(Well)	64	57	57	72	36	21	307
やや症状あり(Mild symptom)	94	94	105	141	97	71	602
症状あり(Moderate symptom)	58	54	65	77	54	54	362
精神の障害(Impaired)	46	40	60	94	78	71	389
計	262	245	287	384	265	217	1660

注　＊Haberman（1979，p.375）

表2－2　線形項を含むモデルの結果（かっこ内は標準誤差）

カテゴリー	μ_g:4.17(.03)	Λ_1, Λ_2		バリマックス法		水準化法	
	μ_1, μ_2	Ⅰ	Ⅱ	Ⅰ＊	Ⅱ	Ⅰ	Ⅱ
Well	−.31(.05)	−.74(.07)	.28(.20)	.68(.09)	−.06(.16)	.56(.09)	−.39(.10)
Mild symp.	.42(.04)	−.03(.11)	.11(.43)	.04(.11)	.04(.18)	.05(.15)	.01(.14)
Modr. symp.	−.08(.05)	.11(.13)	−.84(.09)	−.19(.15)	−.32(.10)	−.32(.11)	−.18(.11)
Impaired	−.04(.05)	.66(.09)	.45(.20)	−.53(.15)	.34(.22)	−.29(.11)	.56(.08)
	寄与	1.00	1.00	.77	.22	.50	.50
A	−.03(.06)	−.43(.11)	−.16(.48)	.44(.15)	−.21(.28)	.28(.20)	−.40(.20)
B	−.09(.06)	−.44(.11)	−.28(.46)	.43(.16)	−.26(.28)	.24(.19)	−.44(.20)
C	.07(.05)	−.15(.12)	−.13(.51)	.15(.14)	−.11(.25)	.07(.21)	−.17(.21)
D	.36(.05)	−.02(.11)	.59(.39)	.10(.14)	.29(.22)	.23(.18)	.20(.17)
E	−.04(.06)	.34(.13)	.51(.39)	−.29(.22)	.35(.28)	−.07(.21)	.45(.17)
F	−.28(.07)	.70(.10)	−.53(.17)	−.82(.13)	−.07(.17)	−.74(.11)	.35(.14)
	寄与	1.00	1.00	1.16	.34	.75	.75

注：ϕ_{11}: 1.00(.16)，ϕ_{22}: .22(.13)；＊因子負荷の符号を変換した。

表2－3 Nテクニクの結果（かっこ内は標準誤差）

カテゴリー	Λ_1, Λ_2 I	Λ_1, Λ_2 II	バリマックス法 I	バリマックス法 II*
Well	.46(.006)	.75(.07)	1.81(.05)	.87(.07)
Mild symp.	.55(.005)	.03(.11)	1.61(.10)	1.56(.10)
Modr. symp.	.49(.005)	−.08(.12)	1.37(.10)	1.46(.10)
Impaired	.50(.005)	−.66(.08)	1.02(.05)	1.84(.05)
寄与	1.00	1.00	8.79	8.73
A	.41(.006)	.43(.11)	1.77(.09)	1.10(.10)
B	.40(.006)	.43(.12)	1.74(.09)	1.08(.10)
C	.42(.005)	.15(.12)	1.59(.11)	1.35(.11)
D	.44(.005)	.01(.11)	1.58(.11)	1.56(.11)
E	.41(.006)	−.38(.12)	1.15(.12)	1.72(.11)
F	.38(.006)	−.68(.10)	.83(.10)	1.88(.08)
寄与	1.00	1.00	13.18	13.09

注 ：ϕ_{11}: 20.49(.13)，ϕ_{22}: .96(.15)； *因子負荷の符号を変換した。

表3－1 アメリカにおける博士号取得者数*

年 / 学位種類	1960	1965	1970	1971	1972	1973	1974	1975	1976（推定）
工学	794	2073	3432	3495	3475	3338	3144	2959	2773
数学	291	685	1222	1236	1281	1222	1196	1149	1099
物理学	530	1046	1655	1740	1635	1590	1334	1293	1254
化学	1078	1444	2234	2204	2011	1849	1792	1762	1804
地球科学	253	375	511	550	580	577	570	556	584
生物学	1245	1963	3360	3633	3580	3636	3473	3498	3541
農学	414	576	803	900	855	853	830	904	908
心理学	772	954	1888	2116	2262	2444	2587	2749	2822
社会学	162	239	504	583	638	599	645	680	687
経済学	341	538	826	791	863	907	833	867	879
人類学	69	82	217	240	260	324	381	385	394
社会科学他	314	502	1079	1392	1500	1609	1531	1550	1616

注 *Greenacre (1984, p.268)

表3－2　Nテクニクの結果（かっこ内は標準誤差）

学位種類	回転前 A_1, A_2			バリマックス法（学位のみ対象）			水準化法		
	I	II	III	I	II	III	I	II	III
工学	2.99	.18	.41	2.74	1.19	.47	1.84(.02)	1.37(.02)	1.97(.03)
数学	2.61	-.04	.42	2.30	1.21	.49	1.45(.03)	1.24(.03)	1.83(.04)
物理学	2.71	.33	.31	2.56	.94	.35	1.82(.03)	1.22(.03)	1.67(.04)
化学	2.83	.58	-.23	2.77	.82	-.21	2.11(.02)	1.55(.03)	1.26(.03)
地球科学	2.35	.13	-.15	2.14	.99	-.10	1.46(.04)	1.41(.04)	1.20(.05)
生物学	3.03	.18	-.13	2.77	1.26	-.07	1.89(.02)	1.77(.02)	1.59(.03)
農学	2.52	.23	-.27	2.33	.99	-.23	1.64(.03)	1.55(.03)	1.18(.04)
心理学	2.87	-.21	-.38	2.43	1.55	-.29	1.49(.03)	2.02(.03)	1.46(.04)
社会学	2.35	-.40	.06	1.89	1.44	.15	1.02(.04)	1.50(.05)	1.55(.06)
経済学	2.50	.11	-.10	2.27	1.07	-.05	1.53(.03)	1.47(.04)	1.33(.04)
人類学	2.06	-.89	-.12	1.41	1.75	.01	.46(.05)	1.67(.04)	1.44(.06)
社会科学他	2.66	-.49	.15	2.13	1.65	.26	1.12(.03)	1.65(.04)	1.83(.05)
寄与	83.50	1.83	.81	65.90	19.37	.87	28.71	28.71	28.71
1960	2.29	.61	-.59	2.30	.57	-.58	1.84(.04)	1.46(.04)	.67(.02)
1965	2.47	.65	.25	2.50	.55	.26	1.94(.03)	.97(.02)	1.37(.03)
1970	2.68	.26	.23	2.50	.99	.27	1.74(.02)	1.28(.02)	1.62(.02)
1971	2.71	.08	.18	2.44	1.17	.24	1.61(.02)	1.41(.02)	1.67(.02)
1972	2.71	-.09	.17	2.37	1.32	.25	1.48(.02)	1.49(.02)	1.73(.02)
1973	2.72	-.23	.09	2.31	1.45	.18	1.37(.02)	1.61(.02)	1.73(.02)
1974	2.71	-.34	-.02	2.24	1.55	.08	1.28(.02)	1.73(.02)	1.68(.02)
1975	2.71	-.39	-.14	2.22	1.61	-.04	1.25(.02)	1.84(.02)	1.61(.02)
1976推定	2.71	-.42	-.24	2.20	1.65	-.13	1.22(.02)	1.92(.02)	1.55(.02)
寄与	62.63	1.37	.61	49.42	14.53	.65	21.53	21.54	21.54

注　$A_1=\Lambda_1\Phi^{1/2}\,(12/9)^{1/4}$, $A_2=\Lambda_2\Phi^{1/2}\,(9/12)^{1/4}$; アンダーラインは回転後の各因子の中で、3番目までに大きな絶対値の負荷を示す。

表4－1　評定の平均値＊

名詞 / 動詞	physicians	colleagues	alcoholics	criminals
helps	1.77	1.42	1.88	−.72
befriends	1.22	1.10	1.32	−.18
praises	1.22	.95	−1.00	−1.82
criticizes	−1.14	−1.03	−1.26	−.40
ufrstrates	−1.95	−1.83	−1.95	−.04
hates	−2.37	−2.25	−2.25	−1.00

注　*Gollob (1968, p.106)

表4－2　線形項を含むモデルの結果（かっこ内は標準誤差）

要因の水準	Λ_1, Λ_2		バリマックス法		水準化法	
	I	II	I	II	I	II
helps	.45(.05)	.53(.09)	1.18(.12)	.26(.41)	1.19(.13)	−.17(.17)
befriends	.22(.06)	.36(.12)	.63(.14)	.25(.24)	.68(.16)	.01(.18)
praises	.50(.06)	−.76(.04)	.54(.65)	−1.38(.64)	.03(.23)	−1.48(.26)
criticizes	−.26(.05)	−.05(.13)	−.53(.19)	.17(.29)	−.44(.15)	.34(.15)
frustrates	−.52(.05)	−.11(.12)	−1.07(.30)	.33(.56)	−.89(.15)	.69(.14)
hates	−.39(.05)	.02(.13)	−.75(.28)	.37(.44)	−.57(.16)	.61(.15)
寄与	1.00	1.00	4.07	2.30	3.18	3.18
physicians	.42(.05)	−.34(.11)	.51(.20)	−.64(.13)	.25(.11)	−.78(.12)
colleagues	.30(.05)	−.36(.11)	.30(.20)	−.58(.16)	.08(.12)	−.65(.12)
alcoholics	.13(.07)	.86(.11)	.61(.35)	.76(.59)	.83(.08)	.51(.13)
criminals	−.85(.01)	−.16(.07)	−1.41(.03)	.46(.41)	−1.17(.05)	.92(.15)
寄与	1.00	1.00	2.71	1.54	2.12	2.12

5．討　論

3つの数値例のうち2つは一種の順序カテゴリーの例で，単純構造による回転はカテゴリーの上位と下位を代表する因子を構成するという結果になっている。一方，回転前の因子負荷もGuttmanの因子に対応しており，回転後のみ

の結果が意味があるという例ではない。

しかし，回転の意味は統計的にも重要である。回転前の因子負荷の標準誤差が大の場合でも回転によって標準誤差が小さくなるケースは Wexler 現象とよばれ，反対に回転によって標準誤差が大きくなるケースは逆 Wexler 現象とよばれている(Jennrich，1973; 小笠原，1996b)。精神の健康の例の一部（表２－２）には Wexler 現象があらわれており，人物評定の例のバリマックス法の結果は，やや逆 Wexler 現象があらわれている例といえる（寄与が回転前後で異なるので標準誤差の実質的な相違は絶対値の単純比程ではない)。

当論文の方法は回転による解釈上の利点だけでなく，統計的な面からも結果の評価に関する材料を提供しているといえる。

付録　因子回転後の情報行列

因子回転後の拡大された情報行列を次のように分割して構成する。

$$I = \begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} \\ I_{21} & O \end{bmatrix} \tag{A1}$$

I_{11}はμ_g, $\underline{\mu}_1$, $\underline{\mu}_2$, B_1, B_2に関する情報行列である。すなわち，I_{11}では(14)式は第１項のみであり，表１－１において関連する変更は

$$\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \mathrm{b}_{1gk}} = \delta^{*}_{ig}\ b_{2jk},\ (g=1,\ldots p\,;k=1,\ldots,r), \tag{A2}$$

$$\frac{\partial \delta_{ij}}{\partial \mathrm{b}_{2hk}} = \delta^{*}_{jh}\ b_{1ik},\ (h=1,\ldots q\,;k=1,\ldots,r),$$

である。また，

$$
I_{21}=I'_{12}=\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc}
\mu_g & \underline{\mu}'_1 & \underline{\mu}'_2 & (\mathrm{Vec}B_1)' & (\mathrm{Vec}B_2)' & \\
\end{array}\\
\left[\begin{array}{cccccc}
0 & \underline{1}'_p & \underline{0}' & \underline{0}' & \underline{0}' \\
0 & \underline{0}' & \underline{1}'_q & \underline{0}' & \underline{0}' \\
0 & O & O & I_r\otimes\underline{1}'_p & O \\
0 & O & O & O & I_r\otimes\underline{1}'_q \\
0 & O & O & \dfrac{\partial\underline{\zeta}}{\partial(\mathrm{Vec}B_1)'} & \dfrac{\partial\underline{\zeta}}{\partial(\mathrm{Vec}B_2)'} \\
0 & O & O & \dfrac{\partial\underline{\eta}}{\partial(\mathrm{Vec}B_1)'} & \dfrac{\partial\underline{\eta}}{\partial(\mathrm{Vec}B_2)'}
\end{array}\right]
\begin{array}{c}
\alpha_1\\ \alpha_2\\ \underline{\beta_1}\\ \underline{\beta_2}\\ \underline{\zeta}\\ \underline{\eta}
\end{array}
\end{array}
\tag{A3}
$$

である。ここで[ ]の外の記号は位置に対応するパラメータを記したものである。$\underline{\zeta}$と$\underline{\eta}$は

$$
\underline{\zeta}=(q_{21},q_{31},q_{32},\ldots,q_{r,r-1})',\ \underline{\eta}=(r_{11},r_{21},r_{22},\ldots,r_{rr})' \tag{A4}
$$

である。⊗はクロネッカー積, Vec は行列の各列を順につないでひとつの列ベクトルにする演算子である。$\partial\underline{\zeta}/\partial(\mathrm{Vec}B_1)'$ と $\partial\underline{\zeta}/\partial(\mathrm{Vec}B_2)'$ の要素は

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q_{ij}}{\partial b_{1mn}}=&\frac{\delta^*_{ni}}{p}\Big\{\Big(3b^2_{1mi}-\frac{w}{p}\sum_{h=1}^{p}b^2_{1hi}\Big)b_{1mj}-\frac{2w}{p}b_{1mi}\sum_{h=1}^{p}b_{1hi}\,b_{1hj}\\
&-\Big(b^3_{1mj}-\frac{w}{p}b_{1mj}\sum_{h=1}^{p}b^2_{1hj}\Big)\Big\} \qquad\qquad (\mathrm{A5})\\
&+\frac{\delta^*_{nj}}{p}\Big[b^3_{1mi}-\frac{w}{p}b_{1mi}\sum_{h=1}^{p}b^2_{1hi}-\Big\{\Big(3b^2_{1mj}-\frac{w}{p}\sum_{h=1}^{p}b^2_{1hj}\Big)b_{1mi}\\
&-\frac{2w}{p}b_{1mj}\sum_{h=1}^{p}b_{1hi}\,b_{1hj}\Big\}\Big],\\
&(r\geq i>j\geq 1;m=1,\ldots,p;n=1,\ldots,r)
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial q_{ij}}{\partial b_{2mn}}=&\frac{\delta^*_{ni}}{q}\Big\{\Big(3b^2_{2mi}-\frac{w}{q}\sum_{h=1}^{q}b^2_{2hi}\Big)b_{2mj}-\frac{2w}{q}b_{2mi}\sum_{h=1}^{q}b_{2hi}\,b_{2hj}\\
&-\Big(b^3_{2mj}-\frac{w}{q}b_{2mj}\sum_{h=1}^{q}b^2_{2hj}\Big)\Big\}\\
&+\frac{\delta^*_{nj}}{q}\Big[b^3_{2mi}-\frac{w}{q}b_{2mi}\sum_{h=1}^{q}b^2_{2hi}-\Big\{\Big(3b^2_{2mj}-\frac{w}{q}\sum_{h=1}^{q}b^2_{2hj}\Big)b_{2mi}\\
&-\frac{2w}{q}b_{2mj}\sum_{h=1}^{q}b_{2hi}\,b_{2hj}\Big\}\Big],
\end{aligned}
$$

$(r \geq i > j \geq 1; m = 1,\ldots,q; n = 1,\ldots,r)$

である。また，$\partial \eta / \partial (\mathrm{Vec}B_1)'$ と $\partial \eta / \partial (\mathrm{Vec}B_2)'$ の要素は

$$\frac{\partial r_{ij}}{\partial b_{1mn}} = q(\delta^*_{ni} b_{1mj} + \delta^*_{nj} b_{1mi}), \tag{A6}$$
$$(r \geq i \geq j \geq 1; m = 1,\ldots,p; n = 1,\ldots,r)$$
$$\partial r_{ij} / \partial b_{2mn} = -p(\delta^*_{ni} b_{2mj} + \delta^*_{nj} b_{2mi}),$$
$$(r \geq i \geq j \geq 1; m = 1,\ldots,p; n = 1,\ldots,r)$$

である。

水準化法の場合もオーソマックス法の場合と同様に求めることができる。オーソマックス法と異なる点のみを記すと次の様になる。$\partial t_k(B_k) / \partial B_k$ の要素は

$$\frac{\partial t_k(B_k)}{\partial b_{kij}} = -b_{kij} \sum_{l=1}^{p_k} b^2_{klj}, (k = 1,2; i = 1,\ldots,p_k; j = 1,\ldots,r; p_1 = p, p_2 = q) \tag{A7}$$

であり，Q と $\partial q_{ij} / \partial B_k$ の要素は

$$q_{ij} = \sum_{l=1}^{p} \sum_{h=1}^{p} (b^2_{1hj} - b^2_{1hi}) b_{1li} b_{1lj} + \sum_{l=1}^{q} \sum_{h=1}^{q} (b^2_{2hj} - b^2_{2hi}) b_{2li} b_{2lj}, \tag{A8}$$
$$(r \geq i > j \geq 1),$$
$$\frac{\partial q_{ij}}{\partial b_{1mn}} = \delta^*_{ni} \left\{ b_{1mj} \sum_{h=1}^{p} (b^2_{1hj} - b^2_{1hi}) - 2b_{1mi} \sum_{h=1}^{p} b_{1hi} b_{1hj} \right\}$$
$$- \delta^*_{nj} \left\{ b_{1mi} \sum_{h=1}^{p} (b^2_{1hj} - b^2_{1hi}) - 2b_{1mj} \sum_{h=1}^{p} b_{1hi} b_{1hj} \right\},$$
$$(r \geq i > j \geq 1; m = 1,\ldots,p; n = 1,\ldots,r),$$
$$\frac{\partial q_{ij}}{\partial b_{2mn}} = \delta^*_{ni} \left\{ b_{mj} \sum_{h=1}^{q} (b^2_{2hj} - b^2_{2hi}) - 2b_{2mi} \sum_{h=1}^{q} b_{2hi} b_{2hj} \right\}$$
$$- \delta^*_{nj} \left\{ b_{2mi} \sum_{h=1}^{q} (b^2_{2hj} - b^2_{2hi}) - 2b_{2mj} \sum_{h=1}^{q} b_{2hi} b_{2hj} \right\},$$
$$(r \geq i > j \geq 1; m = 1,\ldots,p; n = 1,\ldots,r),$$

である。

参考文献

Andersen, E. B. (1994). *The statistical analysis of categorical data* (3rd ed.). New York: Springer.

Archer C. O., & Jennrich, R. I. (1973). Standard errors for rotated factor loadings. *Psychometrika*, 38, 581-592.

Bishop, Y. M. M., Fienberg. S. E., & Holland, P. W. (1975). *Discrete multivariate analysis: Theory and practice*. Cambridge, Massachusetts: MIT Press.

Choulakian, V. (1996). Generalized bilinear models. *Psychometrika*, 61, 271-283.

Gilula, Z., & Haberman, S. J. (1986). Canonical analysis of contingency tables by maximum likelihood. *Journal of the American Statistical Association*, 81, 780-788.

Guttman, L. (1954). The principal components of scalable attitudes. In P. F. Lazarsfeld (Ed.), *Mathematical thinking in the social sciences* (pp. 216-257). New York: Columbia University Press.

Gollob, H. F. (1968). A statistical model which combines features of factor analytic and analysis of variance techniques. *Psychometrika*, 33, 73-115.

Goodman, L. A. (1985). The analysis of cross-classified data having ordered and/or unordered categories: Association models, correlation models, and asymmetry models for contingency tables with or without missing entries. *Annals of Statistics*, 13, 10-69.

Goodman, L. A. (1986). Some useful extension of the usual correspondence analysis approach and the usual log-linear models approach in the analysis of contingency tables (with discussion). *International Statistical Review*, 54, 243-309.

Goodman, L. A. (1991). Measures, models, and graphical displays in the analysis of cross-classified data (with discussion). *Journal of the American Statistical Association*, 86, 1085-1138.

Goodman, L. A., & Haberman, S. J. (1990). The analysis of nonadditivity in two-way analysis of variance. *Journal of the American Statistical Association,* 85, 139-145.

Greenacre, M. J. (1984). *Theory and applications of correspondence analysis.* London: Academic Press.

Haberman, S. J. (1979). *Analysis of qualitative data* (Vol. 2). New York: Academic Press.

Hakstian, A. R. (1976). Two-matrix orthogonal rotation procedures. *Psychometrika,* 41, 267-272.

Harman, H. H. (1976). *Modern factor analysis* (3rd ed.). Chicago: The University of Chicago Press.

Jennrich, R. I. (1973). On the stability of rotated factor loadings: The Wexler phenomenon. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* 26, 167-176.

Jennrich, R. I. (1974). Simplified formulae for standard errors in maximum-likelihood factor analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology,* 27, 122-131.

Kaiser, H. F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika,* 23, 187-200.

Kruskal, J. B. (1981). Multilinear models for data analysis. *Behaviormetrika,* No.10, 1-20.

Magnus, J. R., & Neudecker, H. (1988). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics.* New York: Wiley.

McCullagh, P., & Nelder, J. A. (1989). *Generalized linear models* (2nd ed.). London: Chapman & Hall.

Okamoto, M. (1972). Four techniques of principal component analysis. *Journal of Japan Statistical Society,* 2(2), 63-69.

小笠原春彦（1986）．インターバッテリー法における因子変換　心理学研究，

第57巻，75-82.

小笠原春彦（1996）．規準化オーソマックス法における因子負荷の標準誤差，行動計量学掲載予定.

Ogasawara, H. (1996a) A proposal of Poisson factor analysis. *The 26th Internatonal Congress of Psychology at Montréal.*

Ogasawara, H. (1996b). A log-bilinear model which includes latent variables. Submitted for publication.

芝 祐順（1979）．因子分析法（第2版），東京大学出版会.

Silvey, S. D. (1975). *Statistical inference.* New York: Chapman & Hall.

竹内啓・柳井晴夫 (1972). 多変量解析の基礎 - 線型空間への射影による方法 -, 東洋経済新報社 .

柳井晴夫・繁桝算男・前川眞一・市川雅教 (1990). 因子分析 - その理論と方法 -, 朝倉書店 .