大規模複雑なシステムのゲーム理論による考察

上　木　政　美
奥　田　和　重

1．はじめに

大規模複雑なシステムの最適化を図るという問題に対して，システムをいくつかのサブシステムに分割して考察するという分割原理の手法[1],[2]がある。その際，サブシステム間の独立性はかなり高いものとして扱い，システム全体には目的関数が存在するものとする。最適化の過程の中ではシステム間の情報を調整する機構としてコーディネータを設置し，それぞれのサブシステムの最適化を図ることによって全システムの最適化を図るというものである。分割原理は大規模複雑なシステムをいくつかのサブシステムに分割することで計算効率を上げ，システム全体の最適化に効果を得るという利点をもつが，反面，ある程度サブシステムの最適性は犠牲にされること，コーディネータによる調整のため各サブシステムの最適反応が多少遅れるなどマイナス面も持つ[1],[2]。

本論文では各サブシステムの独立性が高く，それぞれに目的関数が存在するが，システム全体としては明確な目的関数が存在しない場合を取り上げる。システム全体の目的関数が明確でない場合，サブシステムの情報が集中するコーディネータの設置はなじまず，サブシステム間の相互関係を満たすようにサブシステム自身が調整しなければならない。これを行うために，各サブシステムが持つ情報（目的関数や制約条件の構造，係数の値など）を最適化を行う前に互いに交換すれば，相互関係を満たす最適決定を行うことができる。このような決定問題はゲーム的決定問題[3]と呼ばれゲーム理論[4][5][6][7][8]を適用

することができる。

まず非協力ゲームの手法を取り上げる。ある意思決定主体が他の意思決定主体の決定のもとに自らの決定を行うときを「決定に優先権がある」といい，そのときの解を Stackelberg 均衡解という。決定に優先権がない場合の解を Nash 均衡解という。サブシステム間で交換できる情報には，最適決定を行う前に知ることのできる事前情報と，最適決定後に初めて明らかになる事後情報がある。前者は目的関数や制約条件式の構造，あるいはデータとしてあらかじめ与えられている係数の値，過去の決定変数の値などであり，後者は最適化問題を解くことによって決定される変数の値やそのときの目的関数の値などである。各サブシステムが事前情報をサブシステム間で交換することによって相互関係の調整を行うことができれば，サブシステムの最適解を得ることができるが，このようにして得た最適解はサブシステム間の相互関係を満たしているが，システム全体の最適解には必ずしもなっていない。しかしこれは各サブシステムが一種の均衡に達していると考えることができ，「均衡解」[1]，[2]と呼ばれ，さらにこの均衡解を求めることを「均衡化」[1]，[2]と呼んでいる。

次に協力ゲームの手法を取り上げる。一般的に，非協力で得られる利得（ここでは目的関数の値）より，協力で得られる利得の方が大きい。これは世間一般でいえば，会社同士が競争しあって商品の価格を下げるより，談合して価格を上げた方が儲かり，よく「闇カルテル」などとして新聞紙上に登場することからもわかる。しかし，N 個のサブシステムからなるシステム全体に n 人協力ゲームの理論をそのまま適用することは，その複雑さからいって極めて困難である。本論文では「Nash による 2 人交渉ゲーム理論」と「3 人協力ゲームのコア理論」を取り上げることにする。「Nash による 2 人交渉ゲーム理論」では，解に到達することができるので，この解を「Nash 交渉解」と呼ぶことにする。また，「3 人協力ゲームのコア理論」では，一意の解に到達はできないが集合としての解を得るので，これを「コアによる集合としての解」と呼ぶことにする。ただ，コアの中から特定の解を選び出すことは「仁」として知られており，本論文では扱わないが今後の課題としたい。

2．理　論　編

2．1　非協力ゲームによる考察

ここで対象とする大規模複雑なシステムはシステム全体としての目的関数は明確ではないが，各サブシステムは独自の目的関数を持つものとする。各サブシステムはサブシステムどうしの相互関係を満足しながら自らの目的関数を最適化するものとする。すなわち n 個の各サブシステムの最適化問題は次のように与えられるものとする。

$$\begin{array}{ll} Max & f_i(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \\ sub.to & \left.\begin{array}{ll} g_i(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_n) \leq b_i & \\ h_i(x_i) \leq 0 & \\ x_i \geq 0 \qquad i=1,\ldots,n & \end{array}\right\} \cdots\cdots(1) \end{array}$$

(a)　**Nash 均衡**（決定に優先権がない場合の均衡化）

サブシステムの決定に優先権がないときの均衡解は Nash 均衡解として知られており，次のように定義される[5]。

n 個のサブシステムが Nash 均衡解を採用しているとき，いずれのサブシステムについても自己の目的関数を改良するような解は存在しない。

この定義を式(1)に適用すれば，各サブシステムの同時最適化問題となり，

$$\begin{array}{ll} Max & f_i(x_1^*,\ldots,x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,\ldots,x_n^*) \\ sub.to & \left.\begin{array}{ll} g_i(x_1^*,\ldots,x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,\ldots,x_n^*) \leq b_i & \\ h_i(x_i) \leq 0 & \\ x_i \geq 0 \qquad i=1,\ldots,n & \end{array}\right\} \cdots\cdots(2) \end{array}$$

を満たす $\forall x_i (i=1,\ldots,n)$ に対して

$$f_i(x_1^*,\ldots,x_{i-1}^*, x_i, x_{i+1}^*,\ldots,x_n^*) \leq f_i(x_1^*,\ldots,x_{i-1}^*, x_i^*, x_{i+1}^*,\ldots,x_n^*) \cdots\cdots(3)$$

が成立すれば x_i^* は Nash 均衡解である。

つまり式(3)は，n 個のサブシステムそれぞれの最適化問題の同時最適化が実現されなければならないことを意味し，このとき均衡解に達したといえ，この状態を均衡化と呼んでいる。

式(2)の Lagrange 関数を以下のように定める。

$$L_i(x_1,\ldots,x_n,\ \lambda_i,\ \mu_i)=f_i(x_1^*,\ldots,x_n^*)+\lambda_i^T(g_i(x_1^*,\ldots,x_n^*)-b_i)+\mu_i^T h_i(x_1)$$

式(3)で定義される $x_i^*(i=1,\ldots,n)$ が Nash 均衡解であるための必要条件は

$$\frac{\partial L_i}{\partial x_i}=\frac{\partial}{\partial x_i}f_i(x_1^*,\ldots,x_n^*)+\lambda_i^{*T}\frac{\partial}{\partial x_i}g_i(x_1^*,\ldots,x_n^*)+\mu_i^{*T}\frac{\partial}{\partial x_i}h_i(x_1^*)=0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \lambda_i}=g_i(x_1^*,\ldots,x_n^*)-b_i\leq 0$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \mu_i}=h_i(x_i^*)\leq 0$$

$$\lambda_i^{*T}(g_i(x_1^*,\ldots,x_n^*)-b_i)=0$$

$$\mu_i^{*T}h_i(x_i^*)=0$$

$$\lambda_i^*,\ \mu_i^*\geq 0$$

であるが，一般的にこれらの必要条件を満たす Nash 均衡解は一意には定まらず，集合としての解が得られる。しかし，サブシステムの均衡化問題が2次計画問題等のときは一意の Nash 均衡解が得られることが知られている[9]。

(b) **Stackelberg 均衡**（決定に優先権がある場合の均衡化）

Stackelberg 均衡解の定義は，以下のようである[5]。

決定に先手と後手の区別があり，先手が戦略を示した後に後手がそれを知って自分の戦略を決定しゲームは終了する。

これは先手であるサブシステムにとって最も良好な解を合理的に決定するための規則である。後手であるサブシステムは先手に対して受動的で，先手が示した解のもとで自らの問題を最適化する。本論文では単純化のためサブシステ

ムが2つの場合を中心に扱うが，基本的には n 個のサブシステムにおける考え方も同様である。もちろん優先順位の決め方は $n!$ 通りある。

例（$n=2$ のとき）

サブシステム1が先手で決定に優先権があり，サブシステム2が後手である場合

サブシステム2はサブシステム1の任意の決定 $x_1^S \in X_1$ に対して

$$f_2(x_1^S, x_2^S) \geq f_2(x_1^S, x_2),\ x_2 \in X_2$$

となるように $x_2^S = T(x_1^S)$ を選択する。（T は反応関数と呼ばれる）

このとき $f_1(x_1^S, T(x_1^S)) \geq f_1(x_1, T(x_1)),\ x_1 \in X_1$ を満たす $x_1^S \in X_1,\ x_2^S = T(x_1^S)$ が存在すれば（x_1^S, x_2^S）はサブシステム1を先手とする Stackelberg 均衡解である。よってサブシステム2の均衡化問題は，任意の $x_1^0 \in X_1$ に対して以下のようになる。

$$\begin{aligned} &Max \quad f_2(x_1^0, x_2) \\ &sub.to \quad g_2(x_1^0, x_2) \leq b_2 \\ &\qquad\quad h_2(x_2) \leq 0 \\ &\qquad\quad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

この問題の Lagrange 関数は

$$L_2(x_1^0, x_2, \lambda_2, \mu_2) = f_2(x_1^0, x_2) + \lambda_2^T(g_2(x_1^0, x_2) - b_2) + \mu_2^T h_2(x_2)$$

であり，最適化の必要条件は以下のようになる。

$$\frac{\partial L_2}{\partial x_2} = \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1^0, x_2^*) + \lambda_2^{*T} \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(x_1^0, x_2^*) + \mu_2^{*T} \frac{\partial}{\partial x_2} h_2(x_2^*) = 0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \lambda_2} = g_2(x_1^0, x_2^*) - b_2 \leq 0$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mu_2} = h_2(x_2^*) \leq 0$$

$$\lambda_2^{*T}(g_2(x_1^0, x_2^*) - b_2) = 0$$

$$\mu_2^{*T} h_2(x_2^*) = 0$$

$$\lambda_2^* \geq 0,\ \mu_2^* \geq 0$$

さて決定に優先権のあるサブシステム1の均衡化問題は，上記のサブシステム2の最適条件を考慮することになる。つまり

$$\begin{aligned} &Max \quad f_1(x_1, x_2) \\ &sub.to \quad g_1(x_1, x_2) \leq b_1 \\ &\qquad h_1(x_1) \leq 0 \\ &\qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2} + \lambda_2^T \frac{\partial g_2}{\partial x_2} + \mu_2^T \frac{\partial h_2}{\partial x_2} = 0 \\ &\qquad g_2(x_1, x_2) \leq b_2 \\ &\qquad h_2(x_2) \leq 0 \\ &\qquad x_2 \geq 0 \end{aligned}$$

となる。なお，この問題の Lagrange 関数，最適化の必要条件等は省略する。

2．2　協力ゲームによる考察

前節ではサブシステムには目的関数が存在するが，システム全体としては目的関数が明確でない大規模複雑なシステムの最適化にかわる概念として非協力ゲーム (Nash 均衡解と Stackelberg 均衡解) 均衡化について考察した。しかし，一般的に非協力ゲームによって獲得できる利得は，サブシステムが協力して得られる利得より小さい。ここに各サブシステムが協力しようとする誘因がある。協力することによってお互いの利得を増やすことができるなら話し合い(交渉)をする余地があり，N 個のサブシステムの利得の増加さらにはシステム全体にとってに協力ゲームの手法を取り入れることは有効と考えられる。

(a) 2人交渉ゲーム

まず，サブシステムが2つの場合に協力ゲームにおけるNashによる2人交渉ゲーム[5]の手法を取り入れてNashの均衡化の概念を考察してみよう。まず2つのサブシステムの最適化問題を次のように記述しよう。

サブシステム1

$$\left.\begin{array}{ll} Max & f_1(x_1, x_2) \\ sub.to & g_1(x_1, x_2) \leq b_1 \\ & h_1(x_1) \leq 0 \\ & x_1 \geq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (4)$$

サブシステム2

$$\left.\begin{array}{ll} Max & f_2(x_1, x_2) \\ sub.to & g_2(x_1, x_2) \leq b_2 \\ & h_2(x_2) \leq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots (5)$$

ここでx_1, x_2はサブシステム1，サブシステム2がそれぞれとる戦略であり，無限戦略と考える。それぞれの利得関数（目的関数）を次のように定義する。

$$u = f_1(x_1, x_2),\ \nu = f_2(x_1, x_2)$$

それぞれの制約条件の中でのu, νの取り得る値の組の集合を協力実現可能集合といい，$R = \{(u, \nu)\}$で表す。

2つのサブシステムはこの協力実現可能集合Rの中に交渉の基準点$c = (c_1, c_2)$を定め，交渉をすることによってお互いの利得を最大にしようとする。基準点については2つのサブシステムが共通の認識としてあらかじめ定めている場合（固定基準点）と交渉の過程で基準点そのものについて駆け引きが行われる場合（脅し点）とがある。

ここから，Nash による交渉の公準について説明する。交渉は協力実現可能集合 R と基準点 c との組 (R, c) の上で行われると考えることができる。この組 (R, c) を交渉の場と呼ぶことにする。交渉の場はつぎの性質をもつと仮定する。

前提1：R は平面上の有界閉な凸集合である
前提2：基準点 c を R に想定することができる
前提3：$u > c_1, \nu > c_2$ となるような (u, ν) が少なくとも1つ R に存在する

交渉というのは与えられた交渉の場 (R, c) から，交渉の妥結点として，R のある1つの点 $\bar{r}=(\bar{u}, \bar{\nu})$ を選び出すことであり，交渉ゲームとよばれる。このゲームの解を求めることは次のような関数を求めることである。

$$\Psi(R, c)=\bar{r} \quad \text{ただし} \quad \bar{r}=(\bar{u}, \bar{\nu}) \in R$$

この関数を決定する基準として Nash の公準を採用する。

「公準1」　個人合理性　$\bar{u} \geq c_1, \bar{\nu} \geq c_2$
プレイヤーの受け取る利得は，交渉が不成立の場合に得られる利得未満であってはならない。このことは交渉が成立する最低の条件である。

「公準2」　共同合理性（パレート最適性）
もし $(u, \nu) \in R$ で $u \geq \bar{u}, \nu \geq \bar{\nu}$ ならば $(u, \nu)=(\bar{u}, \bar{\nu})$ である。
交渉は双方がよりよくなる点がある限り継続される。

この「公準1」および「公準2」をみたす R の領域を交渉領域とよぶ。交渉はこの領域のどの点を選ぶかをめぐって行われ，妥結点は必ずこの領域になければならない。

「公準3」　正1次変換からの独立性

集合 $T=\{(u', \nu')\}$ および基準点 c' が，(R, c) から次の正1次変換によって得られるものとする。

$$u'=\alpha_1 u+\beta_1,\ \nu'=\alpha_2 \nu+\beta_2 \qquad c_1'=\alpha_1 c_1+\beta_1,\ c_2'=\alpha_2 c_2+\beta_2$$

ただし　$\alpha_1>0, \alpha_2>0$

このとき，$\Psi(R, c)=(\bar{u}, \bar{\nu})$ ならば $\Psi(T, c')=(\bar{u}', \bar{\nu}')$ である。すなわち，利得を測定する単位や尺度を変えても本質的に変わりはない。

「公準4」　対称性

R が座標の原点を通る45度線について対称で $c_1=c_2$ ならば $\bar{u}=\bar{\nu}$ である。このことは2人のプレイヤーの立場が交渉の場 (R, c) において対称なら，交渉の結果も対称であることを意味する。

「公準5」　不適切な選択肢からの独立性

$(\bar{u}, \bar{\nu}) \in T \subset R$ なる集合 T を考えても，$\Psi(T, c)=(\bar{u}, \bar{\nu})$ である。

ここで $c=(c_1, c_2) \in T$ である。

これらの公準のもとで次の定理が成立することを Nash は証明している[5]。

定理

固定基準点をもつ交渉ゲームにおいて，交渉の5つの公準をみたす関数

$$\Psi(R, c)=\bar{r} \text{ ただし } \bar{r}=(\bar{u}, \bar{\nu}) \in R$$

が一意に存在し，次の式から $\bar{r}=(\bar{u}, \bar{\nu})$ を求めることができる。

$$(\bar{u}-c_1)(\bar{\nu}-c_2)=\max_{\substack{(u, \nu) \in R \\ u \geq c_1 \\ \nu \geq c_2}} (u-c_1)(\nu-c_2)$$

ここで $\bar{r}=(\bar{u}, \bar{\nu}) \in R$ は交渉の妥結点を示し，交渉ゲームの Nash 交渉解と呼ば

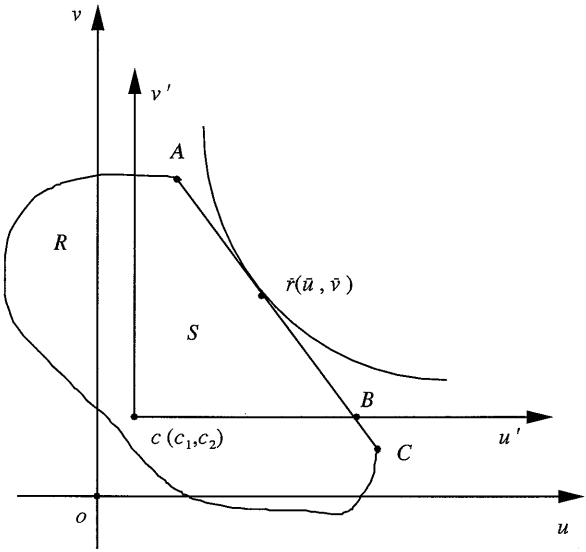

図1　Nash 交渉解

れる。

この定理の意味を図形的に考えてみる。

図1において，線分 AC 上の点はパレート最適であり，交渉領域は線分 AB である。$c=(c_1, c_2)$ を原点とする新しい座標軸 u', ν' によって表される点を (u', ν') とすると，$u'=u-c_1$, $\nu'=\nu-c_2$ であるから $(u-c_1)(\nu-c_2)=u'\nu'$ である。

$$u'\nu'=\kappa \qquad \kappa \text{ は定数}$$

とおくと，これは新しい座標軸 u', ν' を漸近線にもつ双曲線である。この定理の式は κ を R の範囲内で最大にすることであるから，κ を最大にする双曲線は R の右上方の境界，つまり，交渉領域 AB 上で R と接する双曲線であり，その接点を $(\bar{u}, \bar{\nu})$ とすると，その点が定理の式を満たす点であり，交渉の妥結点である。

先の2つのサブシステムの均衡化の問題(4), (5)に2人協力ゲームの手法を適用してみよう。

$$\left.\begin{array}{ll} Max & \{f_1(x_1, x_2)-c_1\}\ \{f_2(x_1, x_2)-c_2\} \\ sub.to & g_1(x_1, x_2) \leq b_1 \\ & g_2(x_1, x_2) \leq b_2 \\ & h_1(x_1) \leq 0 \\ & h_2(x_2) \leq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \end{array}\right\} \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (6)$$

この問題の Lagrange 関数は

$$\begin{aligned} & L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2, \mu_1, \mu_2,) \\ & = \{f_1(x_1, x_2)-c_1\}\ \{f_2(x_1, x_2)-c_2\} + \lambda_1^T(g_1(x_1, x_2)-b_1) + \lambda_2^T(g_2(x_1, x_2)-b_2) \\ & \quad + \mu_1^T h_1(x_1) + \mu_2^T h_2(x_2) \end{aligned}$$

となる。これより最適性の必要条件は

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= \frac{\partial}{\partial x_1} f_1(x_1, x_2)\{f_2(x_1, x_2)-c_2\} + \frac{\partial}{\partial x_1} f_2(x_1, x_2)\{f_1(x_1, x_2)-c_1\} \\ &\quad + \lambda_1^T \frac{\partial}{\partial x_1} g_1(x_1, x_2) + \lambda_2^T \frac{\partial}{\partial x_1} g_2(x_1, x_2) + \mu_1^T \frac{\partial}{\partial x_1} h_1(x_1) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= \frac{\partial}{\partial x_2} f_1(x_1, x_2)\{f_2(x_1, x_2)-c_2\} + \frac{\partial}{\partial x_2} f_2(x_1, x_2)\{f_1(x_1, x_2)-c_1\} \\ &\quad + \lambda_1^T \frac{\partial}{\partial x_2} g_1(x_1, x_2) + \lambda_2^T \frac{\partial}{\partial x_2} g_2(x_1, x_2) + \mu_2^T \frac{\partial}{\partial x_2} h_2(x_2) = 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= g_1(x_1, x_2) - b_1 \leq 0 \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= g_2(x_1, x_2) - b_2 \leq 0 \end{aligned}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_1} = h_1(x_2) \leq 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \mu_2} = h_2(x_2) \leq 0$$

である。

もし，この状態で2つのサブシステムの交渉が成立するならば，やはり一種の均衡状態にあると考えることができる。しかも非協力ゲームにおける均衡状態よりお互いの利得が増えるならそれぞれのサブシステムにとって望ましい状態であり，もし加法和のような単純な利得計算が許されるなら，システム全体にとっても明らかに非協力ゲームにおける均衡状態より優れている。交渉の基準の決定はまた別の難しい問題であるが，基準が決まれば，サブシステムの最適化は一種の均衡状態つまり，一意の解に到達できるのであり，我々はこれを2人交渉ゲームによる「Nash 交渉解」と呼ぶことにする。

(b) コアの概念

n 人協力ゲームにおける「コア」の概念[5]を導入するための準備をする。まず対象となる大規模複雑なシステムの各サブシステムは明確な目的関数を有するが，システム全体としては明確な目的関数はない。さらにそれぞれのサブシステムが他のサブシステムと提携（結託）して自分の利得を多くする（目的関数のよりよい値を得る）という行為を認める。またこの利得はサブシステム間で貨幣などで自由に譲渡されるものと考える。これはまさに実社会での企業活動そのものである。ライバルとしてしのぎを削りあってきた各企業（非協力ゲーム）がある日突然，技術提携や合併（協力ゲーム）を発表することはよくあることである。我々は「コア」を導入するにあたりサブシステムの利得を配分という概念で読み換えることにする。

① 譲渡可能効用と別払い

一般に利得あるいは効用が，何らの制限なく分割可能であり，貨幣とか労働とかその他何らかの方法によって，利得の一部をサブシステム間で自由に

譲渡でき，かつ，サブシステムAが他のサブシステムBに譲渡した場合に，Aの失った利得の大きさが，Bの得た利得の大きさに等しいとき，そのゲームは譲渡可能効用（transferable utility）をもつという。そして利得の一部を譲渡すること，およびその譲渡された利得を別払い（side payment）という。

② 特性関数形ゲーム

譲渡可能効用をもつ n 人ゲームを前提とし，ゲームのルールを以下のように定める。

(1) サブシステムの集合を $N=\{1, 2,\ldots,n\}$ とし，n は有限な正の整数とする。

(2) N の任意の部分集合は提携として行動することが可能である。すなわち，許容提携である。任意の提携を S, T 等の記号で表す。

(3) 譲渡可能効用が存在して，提携内で別払いが行われる。

このような協力ゲームを表現するにあたって，ここでは，von Neumann/Morgenstern の考え方によって，次のような関数（特性関数）を定義する。

(i) 任意の提携 S に対して，実数値 $\nu(S)$ を対応させる関数 ν が存在して，この関数を特性関数とよび，$\nu(S)$ を提携 S のもつ提携値という。

(ii) 提携 $T(\neq\emptyset)\subset N$ のもつ値 $\nu(T)$ は，T 以外のサブシステム $N-T$ が提携として，行動すると考えたときに，提携 T が最悪の場合でも確保できる値とする。ただし

$\nu(\emptyset)=0$ とする。

このようにして，サブシステムの集合 N と特性関数 ν との組 (N, ν) として定義されるゲームを特性関数形ゲームという。

もし，問題が標準形（戦略形）n人ゲームとして表現されている場合には，特性関数は次のようにして求めることができる。

いまサブシステム i のもつ戦略の集合を $S_{\{i\}}$ とする。そのとき，提携 T のもつ共同戦略の集合 S_T は $S_T=\prod_{i\in T}S_{\{i\}}$ である。ここで $\prod_{i\in T}$ は提携 T のすべてのサブシステムについての直積を表わす。$[S_T]$ を S_T の凸包とし，P_T を提携 T のもつ共同戦略とすると，$P_T=[S_T]$ である。

標準形 n 人ゲームを T（提携グループ）と $N-T$（非提携グループ）との2人ゲームにおきかえ，T と $N-T$ とのもつ共同戦略の集合をそれぞれ $P_T=\{p\}, P_{N-T}=\{q\}$ とし，サブシステム i の利得を $f_i(p, q)$ とすると，このゲームの特性関数は

(iii)　$\nu(T)=\max_{p\in P_T}\ \min_{q\in P_{N-T}}\ \sum_{i\in T} f_i(p, q)$　　ただし $\nu(\emptyset)=0$

によって求められる。

このような最悪の場合でも確保できる値という考え方で定義して得られる特性関数を von Neumann/Morgenstern 型特性関数という。

③　交渉領域と配分

n 人ゲームの交渉領域は次のように考えられる。

ゲーム（$N=\{1, 2,\ldots,n\}, \nu$）が与えられているとする。サブシステム i の利得を x_i とし利得ベクトルを $x=(x_1,\ldots,x_n)$ とすると，別払いのある協力実現可能集合[5]は $R=\{x=(x_1,\ldots,x_n)/\sum_{i\in T}x_i\leq\nu(N)\}$ とかける。

協力実現可能集合の点 x が交渉領域にあたるためには，次の2つの条件を満たしていなければならない。

(i)　個人合理性　　任意のサブシステム i について　　$x_i\geq\nu(\{i\})$

(ii)　全体合理性　　$\sum_{i\in N}x_i=\nu(N)$

そのときこの2つの条件（個人合理性と全体合理性）を満たす利得ベクトル

を配分という。すなわち交渉領域は配分の集合である。

④ 配分の支配

ゲーム (N, ν) が与えられ，その配分の集合を $A=\{x=(x_1,\ldots,x_n)\}$ とする。そのとき2つの配分の比較に関して次の条件を考える。

いま2つの配分 x, y について提携 S に関して，次の条件を考える。

(1) 有効条件 $\sum_{i\in S} x_i \leq \nu(S)$

(2) 選好条件 $x_i > y_i,\ \forall i \in S$

この2つの条件が成立するとき，提携 S に関して配分 x は配分 y を支配する（dominate）といい $x\ dom_s\ y$ とかく。

配分 x について有効条件が成立するとき，提携 S を x の有効集合（effective set）という。また2つの配分 x, y について適当な提携 S が存在して $x\ dom_s\ y$ となるとき，単に x は y を支配するといい $x\ dom\ y$ とかく。

⑤ コア

配分の支配という概念を用いると交渉の過程において支配される配分は何らかの提携によって拒否されて排除されることになり，支配されない配分が残ることになる。このようなゲームの解をコアと呼び次のように定義する。

定義 コア

ゲーム (N, ν) において，いかなる配分にも支配されない配分をコアという。

また，個人合理性を提携に拡張すれば，配分 x に対して任意の提携 S について $\sum_{i\in S} x_i \geq \nu(S)$ が成立するとき，x は提携合理性[5]の条件をみたしているという。このように，x がすべての提携について提携合理性を満たしてい

ればこのxは安定と考えられ，コアは次のようにも定義できる。

ゲーム（N, ν）において，次の二つの条件を満たす利得ベクトル$x=(x_1,\ldots,x_n)$の全体をコアと呼ぶ。

(i)　$\sum_{i\in N} x_i \leq \nu(N)$

(ii)　Nのすべての部分集合Sに対して　$\sum_{i\in S} x_i \geq \nu(S)$

大規模複雑なシステムの考察をするにあたり，サブシステムの独立性の高さによって，分割原理，非協力ゲーム，2人交渉ゲーム（協力ゲーム）とその手法を変えてきた。しかし，常にシステム全体の最適化，あるいは個々のシステムの最適化をめざし，一意の解が得られることを意識してきた。もちろん，非協力ゲームのNash均衡解では解は一意とは限らず，複数になることも認めてきた。しかし，n人協力ゲームの概念を導入するにあたり，集合としての解を認めることになる。

譲渡可能効用をもつn人協力ゲームは任意の提携を許すと極めて複雑な様相を呈する。解はほとんどの場合，集合として得られ，その中のどの配分に落ち着くかはさらに別の基準を必要としている。本論文では特に3人協力ゲームのコアまでを考えるが，他には安定集合，交渉集合といった解概念もある。特に交渉集合の仁はコアが空でないとき，コアの中の利得ベクトルを一意に定める手法として有用と考えられる。また別の機会に検討してみたい。

(c)　3人協力ゲーム（$N=\{1, 2, 3\}, \nu$）の場合

3人協力ゲームのサブシステムを1，2，3とし，それぞれの戦略をx, y, z（この場合無限戦略）また，それぞれの利得を表す関数を$f_1(x, y, z)$, $f_2(x, y, z)$, $f_3(x, y, z)$, と考えると，上記のような性質を持つ特性関数は以下のように定義できる。

$$\left.\begin{aligned}
&\nu(\{1\})=\max_{x}\min_{y,z} f_1(x,y,z)\\
&\nu(\{2\})=\max_{y}\min_{x,z} f_2(x,y,z)\\
&\nu(\{3\})=\max_{z}\min_{x,y} f_3(x,y,z)\\
&\nu(\{1,2\})=\max_{x,y}\min_{z}\{f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\}\\
&\nu(\{2,3\})=\max_{y,z}\min_{x}\{f_2(x,y,z)+f_3(x,y,z)\}\\
&\nu(\{1,3\})=\max_{x,z}\min_{y}\{f_1(x,y,z)+f_3(x,y,z)\}\\
&\nu(\{1,2,3\})=\max\{f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)+f_3(x,y,z)\}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(7)$$

また，3人協力ゲーム（$N=\{1,2,3\}$, ν）のコアが空でないための必要十分条件として次の定理が成立することが知られている。

定理　$\nu(\{1,2\})+\nu(\{1,3\})+\nu(\{2,3\})\leq 2\nu(\{1,2,3\})$

我々は上記の特性関数(7)に従う3人協力ゲームにこの定理を適用する。すなわち

$$\begin{aligned}
\max_{x,y}\min_{z}\{f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)\}&+\max_{y,z}\min_{x}\{f_2(x,y,z)+f_3(x,y,z)\}\\
&+\max_{x,z}\min_{y}\{f_1(x,y,z)+f_3(x,y,z)\}\\
\leq 2\max\{f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)+f_3(x,y,z)\}&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(8)
\end{aligned}$$

式(8)を満足する x, y, z が空でなく存在し，その x, y, z によって得られる利得 $f_1(x,y,z)+f_2(x,y,z)+f_3(x,y,z)$ を分配と考えれば，それは何ものにも支配されない分配利得である。つまりその意味で安定した状態になっていることになる。しかし，この分配利得は集合の形になり，無数に存在する。これを，「コアによる集合としての解」とよぶことにする。

3．モデルによる検討

3．1　サブシステム数が2個の場合

いままで述べてきた非協力ゲームによる「均衡化」の概念と，協力ゲーム（2

人協力ゲーム）による「Nash 交渉解」についての妥当性を検討するために2つのサブシステムで構成されるシステムを考える。単純化のため，各サブシステムの最適化問題を次のような目的関数を最大化する問題とする。

サブシステム1　　$f_1(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 + 2x_2$

サブシステム2　　$f_2(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 + 6x_2$

x_1, x_2 は戦略を，f_1, f_2 は利得を表す。

目的関数を図示すると図2のようになる。2つの目的関数が重ねたように描かれているが，上に凸でそれぞれ目的関数を最大にする点があることが推察される。

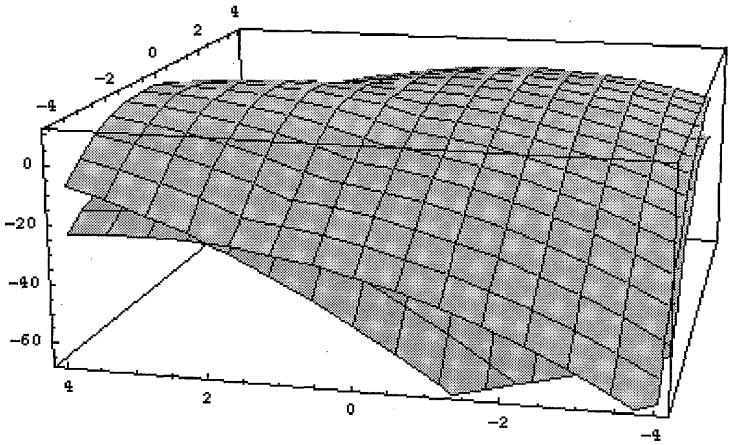

図2　目的関数の概観

(a)　単独で最適化した場合

サブシステム1について

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1} = -2x_1 - x_2 + 4 = 0,\ \frac{\partial f_1}{\partial x_2} = -2x_2 - x_1 + 2 = 0$$

を連立させて　$x_1^* = 2,\ x_2^* = 0$　　$f_1(x_1^*, x_2^*) = 4$　を得る。

サブシステム 2 について

同様に $\dfrac{\partial f_2}{\partial x_1}=-4x_1-2x_2+4=0,\ \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2}=-2x_2-2x_1+6=0$

を連立させて $x_1^*=-1,\ x_2^*=4$ $f_2(x_1^*, x_2^*)=10$ を得る。

(b) 目的関数の加法和を認めた場合

この場合は，上位の意志決定機構の存在を認め，システム全体の目的関数が存在する。もちろんサブシステムの独立性が高いときはこのような状態は考えにくい。

最適化問題は

$$Max \quad F(x_1, x_2)=f_1(x_1, x_2)+f_1(x_1, x_2)=-3x_1^2-3x_1x_2-2x_2^2+8x_1+8x_2$$

となり

$$\frac{\partial F}{\partial x_1}=-6x_1-3x_2+8=0,\ \frac{\partial F}{\partial x_2}=-4x_2-3x_1+8=0$$

を連立させて

$$x_1^+=\frac{8}{15},\ x_2^+=\frac{8}{5} \qquad f_1(x_1^+, x_2^+)=\frac{368}{225},\ f_2(x_1^+, x_2^+)=\frac{1552}{225},\ F(x_1^+, x_2^+)=\frac{128}{15}$$

を得る。

(c) Stackelberg 均衡解

サブシステム 1 が先手の場合

これは後手のサブシステム 2 の最適条件を制約条件とした次の問題を解くことになる。

$$Max \qquad f_1(x_1, x_2)=-x_1^2-x_1x_2-x_2^2+4x_1+2x_2 \cdots\cdots (9)$$

$$sub.\ to \qquad \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=-2x_2-2x_1+6=0 \cdots\cdots (10)$$

制約条件式(10)より $x_2=3-x_1$ これを式(9)に代入して

$$f_1(x_1)=-x_1^2-5x_1-3$$

これを解くと先手であるサブシステム1の均衡解は $x_1^{S1}=\frac{5}{2}$ となる。よって後手の均衡解は $x_2^{S1}=3-\frac{5}{2}=\frac{1}{2}$ となる。

また，それぞれの目的関数の値は $f_1^{S1}=\frac{13}{4}, f_2^{S1}=-\frac{9}{4}$ である。

サブシステム2が先手の場合

$$Max \quad f_2(x_1, x_2)=-2x_1^2-2x_1x_2-x_2^2+4x_1+6x_2$$

$$sub.\ to \quad \frac{\partial f_1}{\partial x_1}=-2x_1-x_2+4=0$$

同様に均衡解を求めると $x_1^{S2}=0, x_2^{S2}=4$ あり，そのときの目的関数の値は $f_1^{S2}=-8, f_2^{S2}=8$ となる。

(d) Nash 均衡解

サブシステム1，2の最適反応は

$$\frac{\partial f_1}{\partial x_1}=-2x_1-x_2+4=0, \frac{\partial f_2}{\partial x_2}=-2x_2-2x_1+6=0$$

であり，連立させると均衡解 $x_1^{Nash}=1, x_2^{Nash}=2$ を得る。
そのときの目的関数の値は $f_1^{Nash}=1, f_2^{Nash}=6$ となる。

以上の結果を図で検討してみよう。座標軸 x_1, x_2 としたのが，図3であり，座標軸 f_1, f_2 としたのが図4である。また表1が考察の結果をまとめたものである。サブシステムがそれぞれの最適化のみを考慮すると，他方のサブシステムまたはシステム全体としても利得（最適化）は必ずしも大きくないことがわかる。また，この例では Stackelberg 均衡解も好ましい利得とはいいがたいが，

Nash 均衡解は許容できる利得かもしれない。しかし，加法和を認めた場合はそれぞれのサブシステムにとってあるいはシステム全体にとっても最良の結果かもしれない。しかしこれはサブシステムを統括する上位の意志決定システムが存在するとき可能なのであり，サブシステムの独立性が高いときは実現が難しいと思われる。しかし，なんらかの話し合いがサブシステム間になされ，お互いあるいは全体にとって望ましい結果があるとすれば妥協の余地は残されていると考えられる。たとえば図4においての第1象限内の点C，Fなどは妥協点と考えられる点の近傍となるのではなかろうか。もちろんその点はパレート最適な点になるであろう。われわれはここで協力ゲーム（Nash による2人交渉ゲーム）の概念を導入し，「Nash 交渉解」を求めてみよう。

(e)　2人協力ゲームの Nash 交渉解

もう一度，最適化問題を記述する。

サブシステム　1　　Max　　$f_1(x_1, x_2) = -x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 + 2x_2$ ……(11)

サブシステム　2　　Max　　$f_2(x_1, x_2) = -2x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 + 6x_2$ ……(12)

ここで我々は2つのサブシステムの利得ベクトルを $(f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2))$ と考えて，このベクトルの最適化を考えればよい。もちろんこのベクトルはパレート最適性を満していなければならない

式(11)，(12)より変数 x_1 を消去して，変数 x_2 をパラメータとして座標軸を f_1, f_2 とすれば図5を得る。これらの実現可能な値 f_1, f_2 のなかに交渉解は存在すると推測される。パレート最適性を考慮して，Mathematica 3.0[10][11][12][13][14][15]を用いて，これら曲線群の包絡線を求めてみる。

式(11)，(12)より，x_1 を消去すると

$$4f_1^2 - 2f_1f_2 + f_2^2 + (4x_2^2 + 16x_2 - 16)f_1 + (16 - 18x_2 - 2x_2^2)f_2 + x_2^4 + 8x_2^3 + 12x_2^2 - 64x_2 = 0 \quad \cdots\cdots\cdots\cdots (13)$$

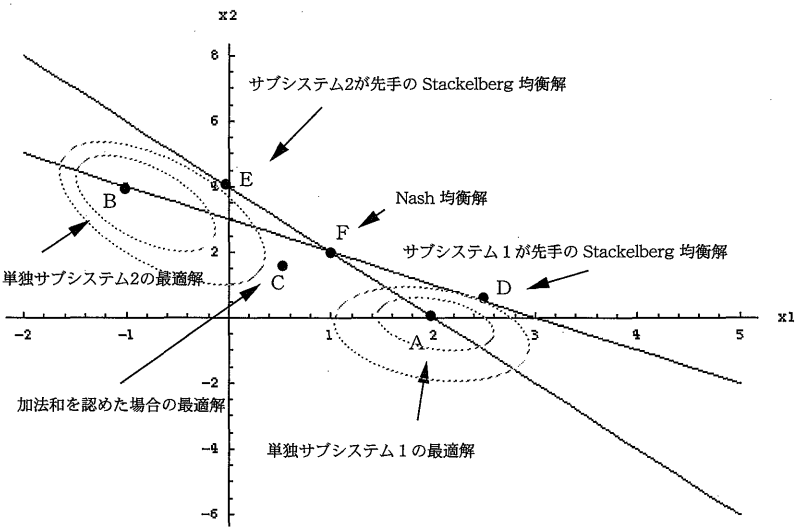

図3　戦略 x_1, x_2 を座標軸とした場合

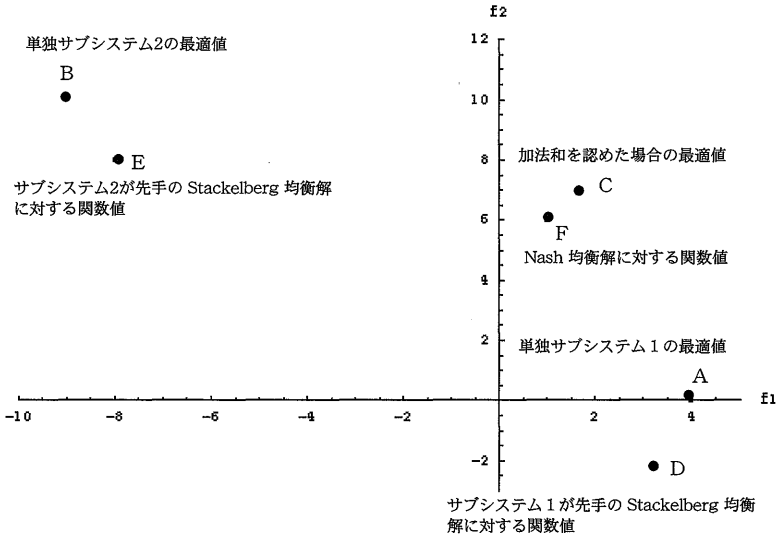

図4　利得 f_1, f_2 を座標軸とした場合

表1　戦略と利得の比較

	x1	x2	f1	f2	加法和(参考)	
単独サブシステム1	2	0	4.0000	0.0000	4.0000	
単独サブシステム2	−1	4	−9.0000	10.0000	1.0000	
加法和	0.533	1.6	1.6356	6.8978	8.5333	(α)
サブシステム1が先手のStackelberg均衡解	2.5	0.5	3.2500	−2.2500	1.0000	(β)
サブシステム2が先手のStackelberg均衡解	0	4	−8.0000	8.0000	0.0000	(γ)
Nash均衡解	1	2	1.0000	6.0000	7.0000	(δ)
Nash交渉解	1	2	1.0000	6.0000	7.0000	
	1	1.25	2.6875	5.4375	8.1250	
	1	−0.59	2.0619	−0.7081	1.3538	
	1	1.55	2.1475	5.7975	7.9450	
	1	5.29	−19.6941	−4.8241	−24.5182	
	0.02	2	0.0396	7.9992	8.0388	
	0.02	1.25	0.9921	5.9667	6.9588	
	0.02	−0.59	−1.4367	−3.7853	−5.2220	
	0.02	1.55	0.7461	6.9147	7.6608	
	0.02	5.29	−17.4303	3.6235	−13.8068	
	−1.73	2	−6.4529	2.0142	−4.4387	
	−1.73	1.25	−6.8129	−2.6433	−9.4562	
	−1.73	−0.59	−12.4617	−18.8353	−31.2970	
	−1.73	1.55	−6.5339	−0.6453	−7.1792	
	−1.73	5.29	−18.1653	9.1535	−9.0118	
	0.56	2	0.8064	7.3728	8.1792	
	0.56	1.25	2.1639	6.1503	8.3142	
	0.56	−0.59	0.7287	−1.6145	−0.8858	
	0.56	1.55	1.7559	6.7743	8.5302	(ε)
	0.56	5.29	−18.4401	−0.5561	−18.9962	
	2.93	2	−2.7249	−9.1698	−11.8947	
	2.93	1.25	0.4101	−6.8373	−6.4272	
	2.93	−0.59	3.3357	−5.8805	−2.5448	
	2.93	1.55	−0.7089	−7.6353	−8.3442	
	2.93	5.29	−29.7687	−32.6933	−62.4620	

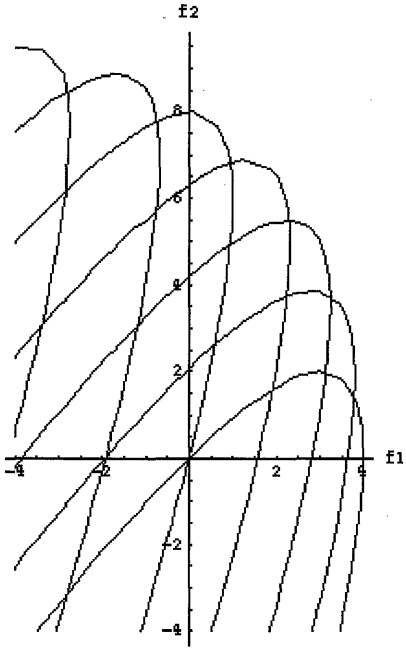

図5　x_2 をパラメータとした場合の利得の概観

これは変数 x_2 をパラメータとすると図5のような曲線群になる。また，式(13)を変数 x_2 について微分すると

$$-64+24x_2+24x_2^2+4x_2^3+16f_1+8x_2f_1-8f_2-4x_2f_2=0 \cdots\cdots (14)$$

となり，式(13)と式(14)を連立させて変数 x_2 を消去することによって次の包絡線を得る。

$$16f_1^4+f_1^3(656-64f_2)+f_1^2(-7388-328f_2+88f_2^2)$$
$$+f_1(39984+5276f_2-356f_2^2-48f_2^3)+9f_2^4+210f_2^3+457f_2^2-11760f_2-87808=0$$

これが包絡線の方程式であり，これを描いたものが図6である。

図6にはいままで考察してきた最適解等が描き込んである。第1象限の点F，

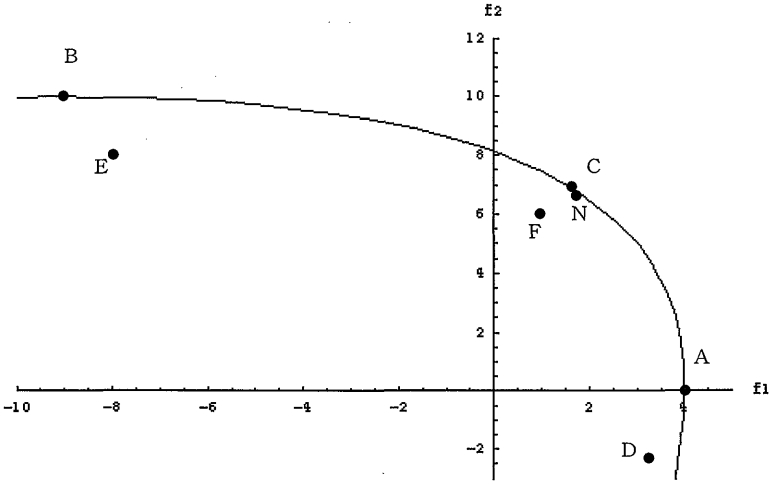

図6　包絡線の概観

Cの近傍の包絡線上の点がパレート最適性を満たすであろうことが視察される。

さて，Nashによる協力ゲーム（2人交渉ゲーム）の「Nash交渉解」を求めてみよう。交渉にあたって基準点をいかに決定するかは極めて困難な問題(脅し点等）であるが，ここでは単純化のためNash均衡解を採用し，基準点決定の論議はまた別の機会に譲ることにする。

式(6)よりNash交渉解は以下の条件を満足する点となる。

$$Max \quad F(x_1, x_2) = \{f_1(x_1, x_2) - 1\}\{f_2(x_1, x_2) - 6\}$$
$$= \{-x_1^2 - x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 + 2x_2 - 1\}\{-2x_1^2 - 2x_1x_2 - x_2^2 + 4x_1 + 6x_2 - 6\} \quad \cdots(15)$$

式(15)に極値を与える可能性のある点は，変数x_1, x_2についてそれぞれ偏微分し，ゼロとおいて連立させると得られる。すなわち

$$F(x_1, x_2) = 6 - 28x_1 + 24x_1^2 - 12x_1^3 + 2x_1^4 - 18x_2 + 40x_1x_2 - 22x_1^2x_2$$
$$+ 4x_1^3x_2 + 19x_2^2 - 18x_1x_2^2 + 5x_1^2x_2^2 - 8x_2^3 + 3x_1x_2^3 + x_2^4$$

この式を変数 x_1, x_2 についてそれぞれ偏微分してゼロとおくと，

$$-28+48x_1-36x_1^2+8x_1^3+40x_2-44x_1x_2+12x_1^2x_2-18x_2^2+10x_1x_2^2+3x_2^3=0$$
$$-18+40x_1-22x_1^2+4x_1^3+38x_2-36x_1x_2+10x_1^2x_2-24x_2^2+9x_1x_2^2+4x_2^3=0$$

連立させて変数 x_1, x_2 をそれぞれ消去すると以下の方程式を得る。

$$227-9946x_1+27727x_1^2-19434x_1^3-1655x_1^4$$
$$+4994x_1^5-2503x_1^6+666x_1^7-84x_1^8+8x_1^9=0$$
$$3072+1536x_2-62058x_2^2+640x_2^3+1688x_2^4$$
$$+128x_2^5-250x_2^6-28x_2^7+6x_2^8+x_2^9=0$$

これの近似解を求めると以下のようになる。

```
{{x→1.`},{x→0.0244628663363206655`},
 {x→2.48776856683184011`+5.88976159602672311`I},
 {x→2.48776856683184011`-5.88976159602672311`I},
 {x→-1.73789135521353221`},{x→0.564300743166107121`}
 {x→2.93689225939703533`},{x→1.36834917632519492`-2.82478289176970633`I}
 {x→1.36834917632519492`+2.8478289176970633`I}}

{{x2→2.`},{x2→1.25784221444840316`},
 {x2→-5.62892110722420202`+2.54476646267950856`I},
 {x2→-5.62892110722420113`-2.54476646267950856`I},
 {x2→-0.597057868958903359`},
 {x2→1.55782303332490723`},{x2→5.29793327964812199`},
 {x2→-2.12934922200706289`-1.39993641930100309`I},
 {x2→-2.12934922200706289`+1.39993641930100309`I}}
```

実数解だけ取り出して，Nash 交渉解の可能性を調べたのがやはり表1である。（ε）の $x_1 \fallingdotseq 0.56, x_2 \fallingdotseq 1.55$ のとき $f_1 \fallingdotseq 1.76, f_2 \fallingdotseq 6.77$，加法和は約 8.53 となり，

結果を図6の中に点Nとして描いてみた。点Cの極めて近傍にあり，理論通りの妥協点が得られたのではなかろうか。優先順位の無い非協力ゲームの均衡点（Nash 均衡）である点Fと比較した場合，それぞれのサブシステムにとって利得の改善がみられ協力するという誘因が存在する。

3．2　サブシステム数が3個の場合

次のようなモデルを想定する。

今，図7のようにある大都市近郊にリンゴを供給している3つの村，A村，B村，C村があるとしよう。苗木の特許権の関係で，A村では「つがる」，B村では「ふじ」，C村では「王林」をそれぞれ生産している。リンゴはそれぞれの村の農協を通じて大都市に供給されるが，価格はそれぞれの品種の供給量や消費者の好み天候による出来不出来など様々な要素で決定される。ここでは簡単のためそれぞれの品種の供給量で決まることにしよう。つまり，それぞれの村の利得には自身の品種の供給量が一番影響することになるが，他の品種（他の村）の供給量も影響することにする。そのような前提のもとに村単位での利得関数を次のように定義する。

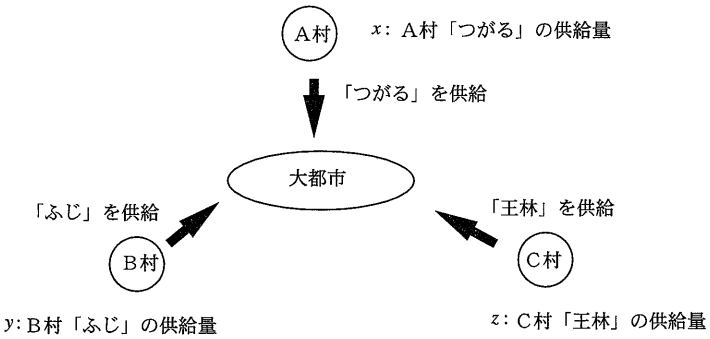

図7　リンゴを供給している村

A村の利得関数　$f_A(x, y, z) = -x^2 + 8x - \dfrac{x(y+z)}{4}$ ……(16)

B村の利得関数　$f_B(x, y, z) = -2y^2 + 12y - \dfrac{y(2x+z)}{3}$ ……(17)

C村の利得関数　$f_C(x, y, z) = -z^2 + 10z - \dfrac{2z(x+y)}{5}$ ……(18)

ここで $x \geq 0,\ y \geq 0,\ z \geq 0$ とする。

もちろんそれぞれの村はそれぞれの利得関数がより大きくなるように自らの供給量を調整することになる。非協力ゲームにおける Nash 均衡と協力ゲームにおける 3 人協力ゲームのコアの概念を用いてこれを考察することにする。

(a) **Nash 均衡**（非協力ゲームによる均衡化）

非協力ゲームの Nash 均衡解とは，式(16)，(17)，(18)において，おのおのの村は他の村の最適反応に自らも最適反応をする。つまり，以下の方程式を連立させれば，それぞれのリンゴの最適な供給量と利得を求めることができる。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_A}{\partial x} = 8 - 2x + \dfrac{1}{4}(-y-z) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_B}{\partial y} = 12 - 4y + \dfrac{1}{3}(-2x-z) = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_c}{\partial z} = 10 - \dfrac{2(x+y)}{5} - 2z = 0 \end{cases}$$

$$\therefore \quad x = \frac{1469}{453},\ y = \frac{322}{151},\ z = \frac{1778}{453}$$

$$f_A^{Nash}\left[\frac{1469}{453}, \frac{322}{151}, \frac{1778}{453}\right] = \frac{2157961}{205209} \fallingdotseq 10.516 \quad \cdots\cdots (19)$$

$$f_B^{Nash}\left[\frac{1469}{453}, \frac{322}{151}, \frac{1778}{453}\right] = \frac{207368}{22801} \fallingdotseq 9.095 \quad \cdots\cdots (20)$$

$$f_C^{Nash}\left[\frac{1469}{453}, \frac{322}{151}, \frac{1778}{453}\right] = \frac{3161284}{205209} \fallingdotseq 15.405 \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots (21)$$

各々の村が他の村と協力することなく，自らのリンゴの供給量を調整すればいずれはNash 均衡に到達し，式(19)，(20)，(21)のような利得を得ることになる。さてこれをもし，三つの村が協力したと仮定した場合と比較してみよう。
三つの村が協力するということは，各々の利得関数の和が最大になると考えられる。

$$\therefore \quad f_{A+B+C}(x, y, z) = f_A + f_B + f_C$$

$$= -x^2 - 2y^2 - z^2 - \frac{11xy}{12} - \frac{13xz}{20} - \frac{11yz}{15} + 8x + 12y + 10z \cdots\cdots (22)$$

式(22)の最大を求めてみよう。

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f_{A+B+C}}{\partial x} = 8 - 2x - \dfrac{2y}{3} + \dfrac{(-y-z)}{4} - \dfrac{2z}{5} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_{A+B+C}}{\partial y} = 12 - \dfrac{x}{4} - 4y + \dfrac{-2x-z}{3} - \dfrac{2z}{5} = 0 \\[2ex] \dfrac{\partial f_{A+B+C}}{\partial z} = 10 - \dfrac{x}{4} - \dfrac{y}{3} - \dfrac{2(x+y)}{5} - 2z = 0 \end{cases}$$

を連立させて

$$\therefore \quad x = \frac{21726}{11185}, \ y = \frac{42063}{22370}, \ z = \frac{16461}{4474}$$

よって最大値

$$f_{A+B+C}^{Nash}\left[\frac{21726}{11185}, \frac{42063}{22370}, \frac{16461}{4474}\right] = \frac{837711}{22370} \fallingdotseq 37.448 \quad \text{を得る。}$$

さて先ほどのNash 均衡解の場合と比較検討してみよう。

$$f_A^{Nash} + f_B^{Nash} + f_C^{Nash} \fallingdotseq 10.516 + 9.095 + 15.405 = 35.016 < 37.448 = f_{A+B+C}^{Nash} \cdots (23)$$

これは非協力の状態より協力の状態のほうが利得が大きいことを示している。つまり，利得が貨幣などとして譲渡可能であれば，三つの村で何らかの話し合いがなされる可能性があるということである。しかし，3者以上の協力ゲームはそれらの中での提携（結託）行動も考えられ，非常に複雑な様相を呈する。本論文ではコアの概念を導入し，非協力ゲームとの関係，集合としての解の意味について考察することにする。

(b)　コアによる集合としての解

特性関数をどのように決めるかという問題は重要である。定義の内容を吟味し，特性関数を以下のように考える。

$$\left.\begin{aligned}
&\nu(\{A\})=\max_{x}\min_{y,z} f_A(x,y,z)\\
&\nu(\{B\})=\max_{y}\min_{x,z} f_B(x,y,z)\\
&\nu(\{C\})=\max_{z}\min_{y,z} f_C(x,y,z)\\
&\nu(\{A,B\})=\max_{x,y}\min_{z}\{f_A(x,y,z)+f_B(x,y,z)\}\\
&\nu(\{B,C\})=\max_{y,z}\min_{x}\{f_B(x,y,z)+f_C(x,y,z)\}\\
&\nu(\{A,C\})=\max_{x,z}\min_{y}\{f_A(x,y,z)+f_C(x,y,z)\}\\
&\nu(\{A,B,C\})=\max\{f_A(x,y,z)+f_B(x,y,z)+f_C(x,y,z)\}
\end{aligned}\right\}\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots(24)$$

①　単独で利得を得ようとする場合

A村の利得関数は　$f_A(x,y,z)=-x^2+8x-\dfrac{x(y+z)}{4}$ ……(16)

であるが，$\nu(\{A\})$ はB，C村が提携した場合でもAが確保できる利得と考えられる。

そこで式(16)において y, z を所与として与えられたものとして，そんな中で x を変化させて得ることができる最大の値を $\nu(\{A\})$ と考える。

式(16)を x について偏微分して 0 とおく

$$\therefore \quad \frac{\partial f_A(x, y, z)}{\partial x} = 8 - 2x - \frac{y+z}{4} = 0 \qquad \therefore \quad x = 4 - \frac{y+z}{8}$$

式(16)へ代入

$$\therefore \quad \nu(\{A\}) = \min_{y,\, z} \left(\frac{y^2}{64} + \frac{z^2}{64} + \frac{yz}{32} - y - z + 16 \right)$$

計算すると供給量 x, y, z に制限が無い場合は $\nu(\{A\}) = 0$ という固定した値になるが，供給量に制限が付くことも考えられるので y, z の変化による利得を観察するため，最小という条件を取り除いた関数として図 8 にその概観を描いた。この場合は最小値 0 として観察される。以下同様の考え方で特性関数を描いた（図 8 ～図13)。

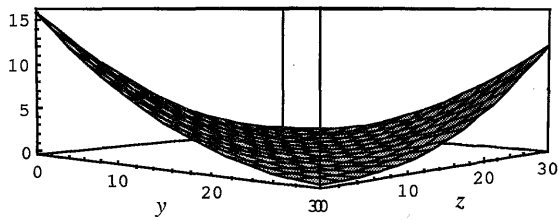

図 8　A 村の特性関数概観

同様に他の特性関数を求め以下に図示する。

B 村

$$\therefore \quad \nu(\{B\}) = \min_{x,\, z} \left(\frac{x^2}{18} + \frac{z^2}{72} + \frac{xz}{18} - 2x - z + 18 \right)$$

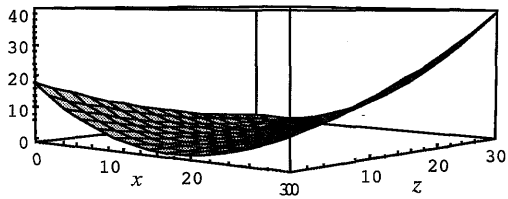

図 9　B 村の特性関数概観

C村

$$\therefore\quad \nu(\{C\})=\min_{x,\,y}\left(\frac{x^2}{25}+\frac{y^2}{25}+\frac{2xy}{25}-2x-2y+25\right)$$

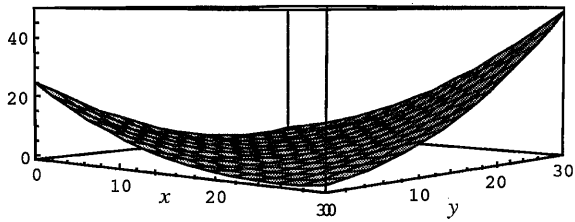

図10　C村の特性関数概観

②　2つの村が協力（提携）利得を得ようとする場合

A，B村が協力する場合

さて次に特性関数 $\nu(\{A,B\})=\max_{x,\,y}\min_{z}\{f_A(x,y,z)+f_B(x,y,z)\}$ を以下のように決めた。まず，A村とB村が協力（提携）する。つまり，お互いの利益関数について加法和をし，その後で貨幣などにより利得を分け合うと考える。z を所与のものと考えて，A村とB村が協力することによって得られる最大の利得を特性関数とした。

$$f_{A+B}(x,y,z)=f_A(x,y,z)+f_B(x,y,\ )$$

$$=-x^2-2y^2-\frac{x(y+z)}{4}-\frac{y(2x+z)}{3}+8x+12y\cdots\cdots\cdots\cdots(25)$$

を x, y についてそれぞれ偏微分して0とおく。

$$\therefore\quad 8-2x-\frac{2y}{3}-\frac{1}{4}(y+z)=0,\ 12-\frac{x}{4}-4y-\frac{1}{3}(2x+z)=0$$

これらを連立させ x, y を z で表すと

$$x=-\frac{4(-756+25z)}{1031},\ y=-\frac{3(-800+21z)}{1031}$$

これを式(25)に代入すると，特性関数は以下のようになる。

$$\therefore \quad \nu(\{A, B\}) = \min_{z}\left(\frac{23z^2}{1031} - \frac{1556z}{1031} + \frac{26496}{1031}\right)$$

図11がそれを描いたものである。かろうじて正の値を保っているようである。

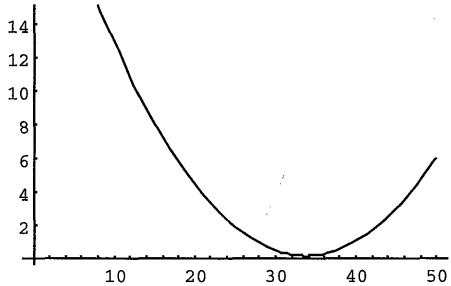

図11　A，B村が協力する場合の特性関数概観

B，C村が協力する場合

次に特性関数 $\nu(\{B, C\}) = \max_{y, z} \min_{x} \{f_B(x, y, z) + f_C(x, y, z)\}$ は以下のようである。まず，B村とC村が協力（提携）する。つまり，お互いの利得関数について加法和をし，その後で貨幣などにより利得を分け合うと考える。を所与のものと考えて，B村とC村が協力（提携）することによって得られる最大の利得を特性関数とした。

$$\begin{aligned} f_{B+C}(x, y, z) &= f_B(x, y, z) + f_C(x, y, z) \\ &= -2y^2 - z^2 - \frac{2(x+y)z}{5} - \frac{y(2x+z)}{3} + 12y + 10z \cdots\cdots\cdots (26) \end{aligned}$$

を y, z について偏微分して 0 とおく。

$$\therefore \quad 12 - 4y - \frac{2x+z}{3} - \frac{2z}{5} = 0,\ 10 - \frac{y}{3} - \frac{2(x+y)}{5} - 2z = 0$$

これらを連立させ y, z を x で表すと

$$y=-\frac{6(-625+39x)}{1679},\ z=-\frac{10(-702+25x)}{1679}$$

これを式(26)に代入すると，特性関数は以下のようになる。

$$\therefore\quad \nu(\{B,\ C\})=\min_{x}\left(\frac{128x^2}{1679}-\frac{5308x}{1679}+\frac{57600}{1679}\right)$$

図12がそれを描いたものである。これもどうにか正の値を保っているようである。

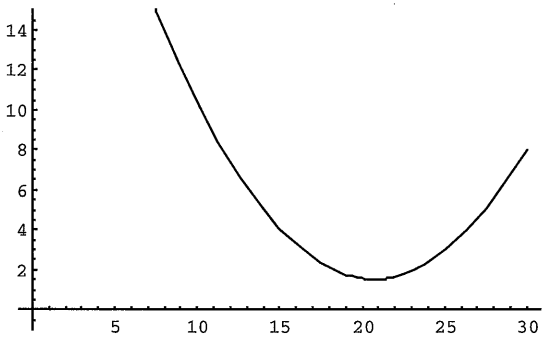

図12　B，C村が協力する場合の特性関数概観

A，C村が協力する場合

さて，3つ目の特性関数 $\nu(\{A,\ C\})=\max_{x,\ z}\ \min_{y}\{f_A(x,\ y,\ z)+f_C(x,\ y,\ z)\}$ は以下のようである。

まず，A村とC村が協力（提携）する。つまり，お互いの利得関数について加法和をし，その後貨幣などにより利得を分け合うと考える。y を所与のものと考えて，A村とC村が協力（提携）することによって得られる最大の利得を特性関数とした。

$$f_{A+C}(x,\ y,\ z)=f_A(x,\ y,\ z)+f_C(x,\ y,\ z)$$

$$=-x^2-z^2-\frac{2(x+y)z}{5}-\frac{x(y+z)}{4}+8x+10z\cdots\cdots\cdots\cdots(27)$$

を x, z について偏微分して 0 とおく。

$$\therefore\quad 8-2x-\frac{1}{4}(y+z)-\frac{2z}{5}=0,\ 10-\frac{x}{4}-\frac{2(x+y)}{5}-2z=0$$

これらを連立させ x, z を y で表すと

$$x=-\frac{8(-475+12y)}{1431},\ z=-\frac{5(-1184+51y)}{1431}$$

これを式(27)に代入すると，特性関数は以下のようになる。

$$\therefore\quad \nu(\{A, C\})=\min_{y}\left(\frac{7y^2}{159}-\frac{1106y}{477}+\frac{44800}{1431}\right)$$

図13がそれを描いたものである。これもどうにか正の値を保っているようである。

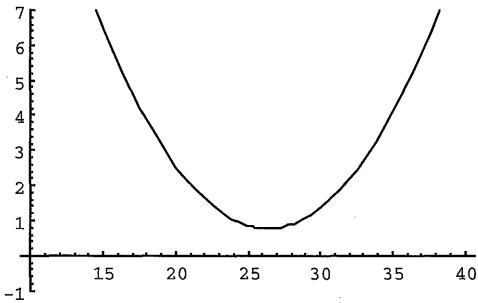

図13　A，C村が協力する場合の特性関数概観

③　コアによる集合としての解

3人協力ゲーム（$N=\{1, 2, 3\}, \nu$）のコアが空でないための必要十分条件として，前述したように，次式が成立することが知られている。

$$\nu(\{A, B\})+\nu(\{B, C\})+\nu(\{A, C\})\leq 2\nu(\{A, B, C\})\cdots\cdots(28)$$

さて，$\nu(\{A, B, C\})=\max\{f_A(x, y, z)+f_B(x, y, z)+f_C(x, y, z)\}$ の値は，先の計算で値 37.448 を得ている。

不等式(28)を満たすように前述の結果を代入すると以下の不等式が成立する。

$$\frac{23z^2}{1031}-\frac{1556z}{1031}+\frac{26496}{1031}+\frac{128x^2}{1679}-\frac{5308z}{1679}$$
$$+\frac{57600}{1679}+\frac{7y^2}{159}-\frac{1106y}{477}+\frac{44800}{1431}\leq 2\times 37.448\cdots(29)$$

つまり，この不等式(29)を満たす変数 x, y, z の領域が，それぞれの村の各リンゴの出荷量であり，またその x, y, z から得られる利得 f_A, f_B, f_C がこの3人協力ゲームの配分であり，「コアによる集合としての解」である。しかし，コアは一意の解を教えてはくれない。支配されない配分として，その意味で安定な状態を示している。さらに一意の解に行き着くには仁などの概念を導入しなければならないが，別の機会に譲る。

不等式(29)を満たす領域を示したものが図14である。領域はこの場合，立体的な図形であり，図14においては不等式(29)の右辺の値を変化させて描画させている。つまり，図14の中にあるいくつかの曲面に挟まれた（曲面も含む）部分に相当する。図14から分かる通り，このモデルのコアは空ではない。この場合3つのシステムはこの領域内のある利得の状態を容認する。しかし，

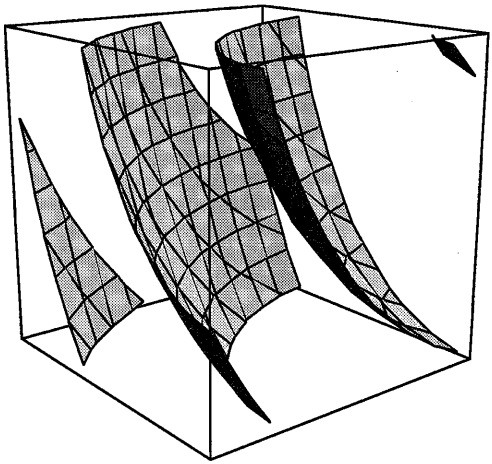

図14　「コアによる集合としての解」の概観

利得がある一意の状態になるか否かはわからない。利得の領域が示されただけで，その中のどの状態で収まるかはまた別の基準を必要とする。このリンゴを生産する村のモデルを現実社会と照らし合わせて考えてみよう。リンゴの出荷量は天候その他で年毎に変化するのであり，市場に出回ったリンゴの価格は市場が決定し，それによってもたらされる利得はある範囲内であればそれぞれの村で容認されるであろう。つまり，コアが空でないとき，それぞれのサブシステムの利得はある範囲の集合として容認され，安定した状態なると考えることができる。

配分の支配という概念を導入し，どの配分にも支配されない配分をコアとしてサブシステムどうしの関係を考察したが，コアが空の場合もある。それでも，ある配分に落ち着くことが安定集合として知られているが，考察は別の機会に譲る。

4. おわりに

対象となる大規模複雑なシステムは各サブシステムの独立性が高く，それぞれの目的関数は存在するがシステム全体としては目的関数が明確でないシステムである。そのようなシステムにゲームの理論の手法を用いて，その最適性等を検討した。

(i) サブシステムが2個の場合にモデルを想定し，非協力ゲームと協力ゲームの手法を用いて考察した。非協力ゲームでは先手後手の区別のあるStackelberg均衡解と区別のないNash均衡解における各サブシステムの利得や加法和について検討を加え，その結果が図3，4と表1にまとめてある。システムが非協力の状態では一種の均衡状態になることが確認され，それを均衡化と呼ぶことにした。Stackelberg均衡解を採用した場合はそれぞれ先手の方が利得が多いことがわかり，Nash均衡解より，それぞれのシステムにとってやはり利得は多い。本モデルでは手の決定を1回と決めて考察したが，連続して手を変えて最適反応を繰り返すとNash均衡解

（図3）に到達することが知られている[2]。また，システム全体（加法和）としての利得を比較した場合，Stackelberg 均衡解を採用した場合は利得がかなり小さい。（表1（β），（γ））本モデルでは先手のシステムが明らかに有利であること，そのため後手は小さな利得しか得られず，結果として加法和はかなり小さい。

Nash 均衡解を採用した場合（表1（δ））は各システムにとって自己が先手の Stackelberg 均衡解における利得よりやはり小さい。これは，非協力の状態でそれぞれが最善手を取り合えば先手有利の Stackelberg 均衡解のそれぞれの利得が平均化され小さくなることが観察され納得できる。しかし，加法和としての利得は Stackelberg 均衡解の場合と比較してかなり改善されていることがわかる。

さて，2つのサブシステムの目的関数は認めるが独自性を認めない場合，つまりシステム全体の目的関数が明確な場合（本モデルでは単純な加法和：表1（α））は Nash 均衡解における利得の加法和より大きいことが観察でき，各システムが非協力の状態ではシステム全体としての利得には限界があることが分かり，協力の状態に移行する誘因が存在することが確認できる。

そこで，協力ゲームにおける2人協力ゲームの Nash 交渉解を採用した場合の利得（表1（ε））と比較してみよう。交渉の基準を決めることは難しい問題なので本論文では Nash 均衡解を採用して検討し，その結果が図6とやはり表1である。Nash 均衡解と比較した場合，それぞれのシステムにとって利得の改善がみられ，システム全体としても単純な加法和に匹敵する利得が得られることが分かる。やはり，非協力より協力の方がシステム全体として利得が大きくなるのであり，例えばライバル企業同士の合併など社会における現象が数値的にも確認されたことになる。

(ii) サブシステムが n 個の場合は極めて複雑になるため，システム数を3個としてモデルを設定し非協力ゲームの Nash 均衡解の手法，協力ゲームのコアによる集合としての解の概念を適応して考察した。まず，非協力の

場合であるがNash均衡解については3個の各サブシステムがそれぞれ均衡に達して利得を獲得する。その利得を3個の各サブシステムが完全に協力した場合（各目的関数の加法和）の利得と比較すると小さいことが分かった。(式 (23)) つまり，利得が貨幣などで譲渡可能であれば協力して利得を増やそうとする誘因が存在する。しかし，3者以上の協力ゲームはそれらの中での提携（結託）行動も考えられ，非常に複雑な様相を呈する。そこで，協力ゲームのコアによる集合としての解の概念を適応した。利得は貨幣等で譲渡可能と見なし，特性関数を式(24)として，コアが空でない条件，式(28), (29)としてその存在を調べた。コアとは支配されない利得配分を表し，その意味で安定した状態を示している。式(29)を満たす領域は図14として存在するすることが確認されたが，解は集合として与えられただけで無数に存在し，一意の結論に至るには他の基準を必要としている。また，2つのサブシステムが提携した場合等，残りのサブシステムの利得は極めて小さくなることも観察された。(図8～図13) これらは，実社会でいえば，ある商品のシェアを争っていた（非協力）数社の企業の内，2社が合併（協力；提携）し，結果売り上げを伸ばしシェアを大きくする（他社は小さくなる）という例として散見される。その複雑な様相を数値で確認したことになる。また，本モデルではコアは空では無かったが，空の場合でもある種の状態で安定（安定集合）する事が知られており今後の課題としたい。

参考文献

[1] 奥田和重：分権的システム－分割原理と非協力ゲームによるアプローチ，商学討究，Vol.38，No2，pp.53-76，1987.
[2] 奥田和重：大規模複雑なシステムの最適化理論と均衡化理論，商学討究，Vol.47，No4，pp.73-90，1997.
[3] 市川惇信：意志決定論，共立出版，1983。
[4] 鈴木光男，中村健二郎：社会システム，共立出版，1976。
[5] 鈴木光男：ゲーム理論入門，共立出版，1981。
[6] 鈴木光男：新ゲーム理論，勁草書房 1994。
[7] 岡田章：ゲーム理論，有斐閣，1996。
[8] 西田俊夫：ゲームの理論，日科技連，1992。
[9] T. Basr, G. T. Olsder : Dynamic Noncooperative Game Theory, Academic Press, pp.243-245，1982.
[10] Stephen Wolfram : Mathematica Second Edition, アジソン・ウェスレイ・ジャパン，1994.
[11] Theodore W. Gray and Daniel R. Grayson, 時田節 訳： Exploring Mathematics with Mathematica, Addison-Wesley Toppan, 1994.
[12] 小林道正：Mathematica による関数グラフィックス，森北出版，1997。
[13] 白石修二：例題で学ぶ Mathematica「グラフィックス編」，森北出版，1996。
[14] Theodore W. Gray and Jerry Glynn, 榊原進 訳：Mathematica ビギナーズガイド， Addison-Wesley Toppan, 1994.
[15] 小池真一：Mathematica 数式処理入門，技術評論社，1991。