

一般化確率ペトリネットによる有限容量同時サービス並進待ち行列のモデル化

中 村 隆 志

1. ま え が き

独立な到着過程を持つ複数個の待合室があり、すべての待合室に客がいるときに扱ひ者が各待合室から一人ずつ客を受け入れて同時にサービスを行うような待ち行列を同時サービス並進待ち行列と呼ぶ [2]。例としては、複数の下請会社からの部品の到着を待ち、それらのすべてが揃ったときに組み立てを行う工場やデータフロー計算機などが挙げられる。この待ち行列システムはトラフィック密度の大小によらず、本質的に不安定であることが知られている [1, 2]。このため、現実のシステムにおいては何らかの安定化のための方策が必要となる。これには入力制御 [2, 3], 客の途中放棄 [4], 待合室の容量制限 [5, 6] などが考えられる。筆者らは文献 [7] において、待合室容量が有限の 2 並進システムを連続時間マルコフ連鎖としてモデル化して解析し、その基本的特性を明らかにした。

しかし、その後の検討により、一般化確率ペトリネットを用いて、このシステムを記述すれば、より簡潔にモデル化が可能であることがわかった。

ペトリネット [8, 9] は非同期的・並行的・分散的なシステムの挙動を記述するのに有用であり、事象生起の論理的な関係を記述するものであるが、これに確率的な時間の概念を導入したものが確率ペトリネットである。一般化確率ペトリネット (Generalized Stochastic Petri Net ; GSPN) [10, 11] は確率ペトリネットを拡張し、時間的な構造に加え、論理的な構造を記述可能にした

ものであり、指数分布の発火遅延時間を持つ時間トランジション (timed transition) と、ゼロ時間で発火する瞬間トランジション (immediate transition) の2種のトランジションを持つ。

本論文では、この一般化確率ペトリネットによる有限容量同時サービス並進待ち行列のモデル化について述べ、その有用性を明らかにする。

2. 同時サービス並進待ち行列の GSPN によるモデル化

本論文で扱う同時サービス並進待ち行列システムとは図1のようなものである。M個の待合室があり、客は待合室 Q_m ($1 \leq m \leq M$) に独立にそれぞれ到着率 λ_m で到着する。扱いはすべての待合室に少なくとも一人の客がいるときに、それぞれ一人ずつ先着順に客を受け入れて、同時にサービス率 μ の指数サービスを行う。すべての待合室に客が揃わない場合には、たとえ窓口が空きであってもサービスを開始しない。

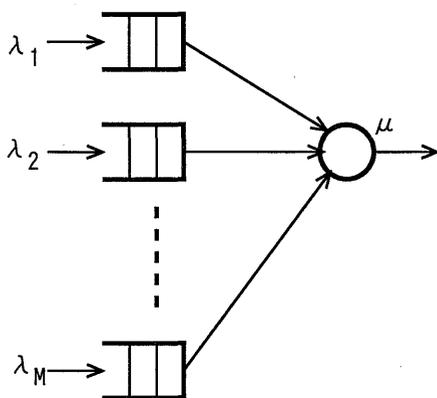


図1 同時サービス並進待ち行列

このシステムを GSPN で表現すると図2のようにになる。各トランジションとプレースの意味は次のとおりである。

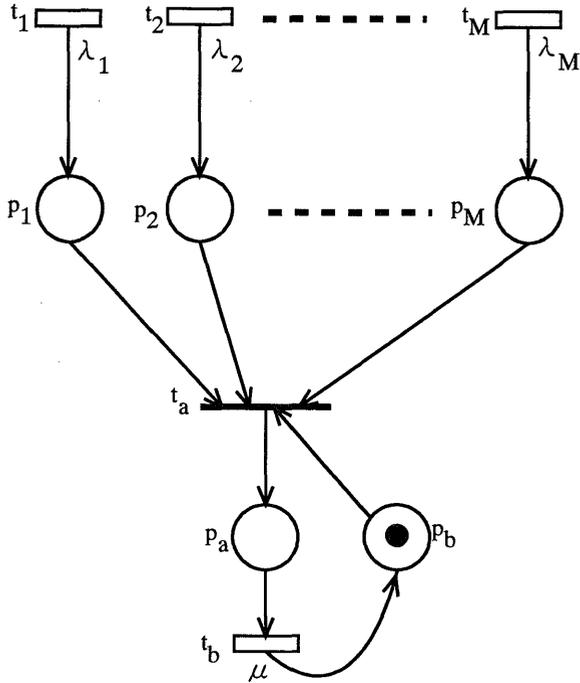


図2 同時サービス並進待ち行列のGSPNによる表現

t_1, t_2, \dots, t_M : 待合室 1, 2, ..., M への客の到着 (時間トランジション; 発火率 $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M$)

t_a : サービスの開始 (瞬間トランジション)

t_b : サービスの終了 (時間トランジション; 発火率 μ)

p_1, p_2, \dots, p_M : 客が待合室 1, 2, ..., M で待機中

p_a : サービス中

p_b : 窓口が空き

本論文ではシステム安定化のために待合室の容量を制限することとする。すなわち、待合室の容量は Q_1, Q_2, \dots, Q_M とも、すべて N とする。また、以下では簡単のため 2 並進 ($M=2$) の場合のみを扱う。この場合の GSPN は図 3 のようになる。 p'_1, p'_2 は待合室の容量を有限とするために必要となる p_1 と p_2 との

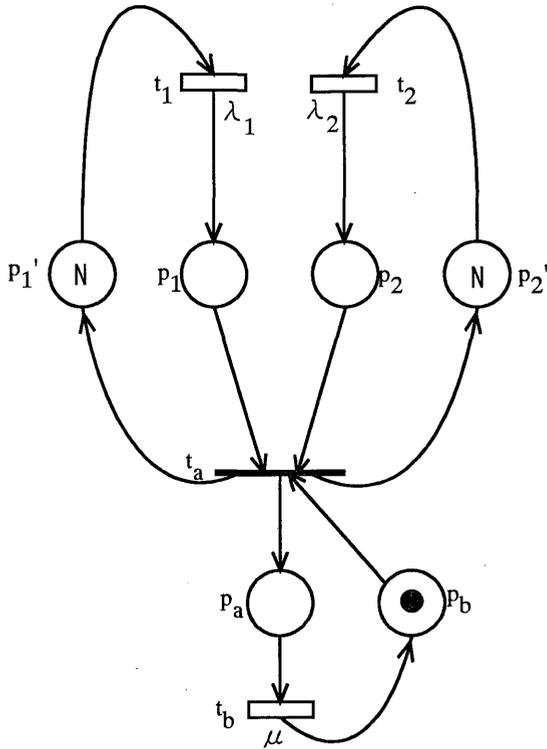


図3 有限容量2並進の場合のGSPN

補プレースであり、それぞれ、 Q_1, Q_2 の空き容量を示す。図3はシステムに客がない状態を表している。瞬間トランジションは t_a 1個のみであるので、瞬間トランジションのプライオリティや重みを考える必要はない。

マーキングを

$$M_k = (M(p_1), M(p_1'), M(p_2), M(p_2'), M(p_a), M(p_b)) \quad (1)$$

で表す。ここで、 $M(p_x)$ はプレース p_x のトークン数である。

$N=4$ とし、初期マーキング $M_0 = (0, 4, 0, 4, 0, 1)$ として求めた可達グラフを図4に示す。点線で囲っている16個のマーキングは瞬間トランジション

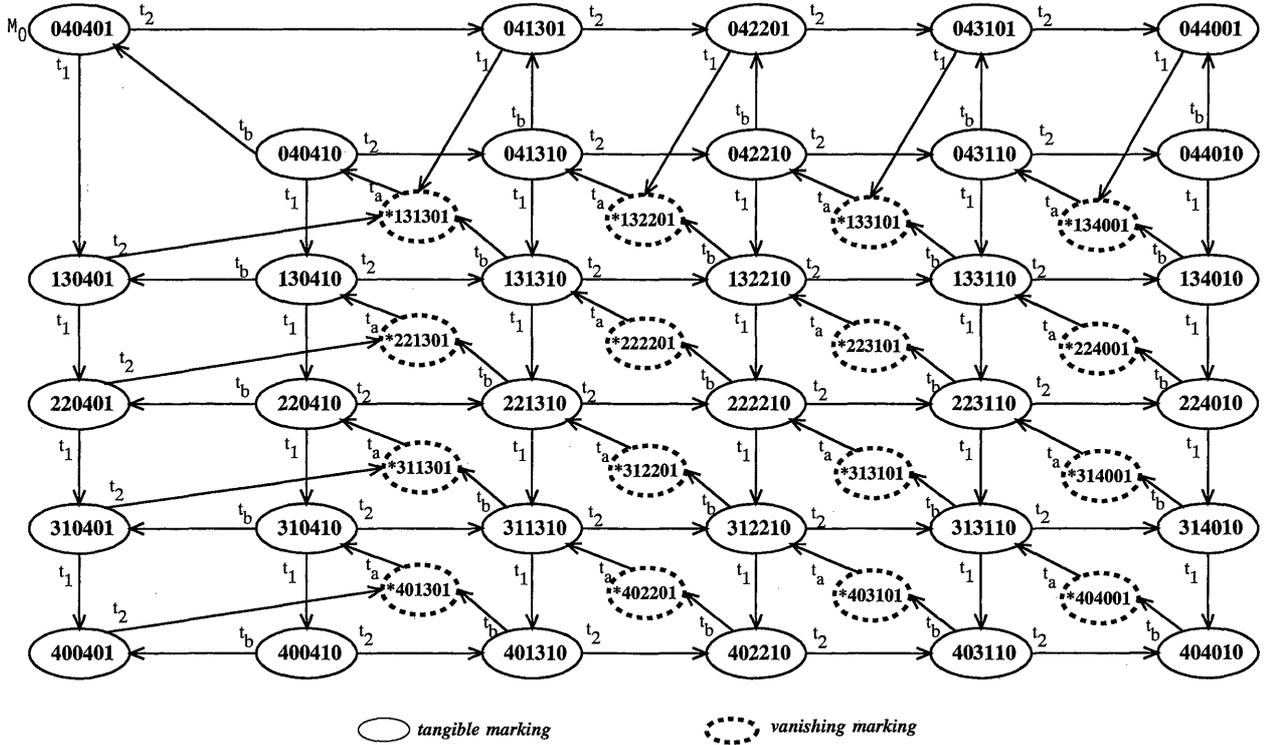


図4 可達グラフ

t_a を発火可能とするバニシングマーキングであり、他は、時間トランジションが発火可能なタンジブルマーキングである。

3. 解 析

3. 1 一般的解析法

有界な GPSN の挙動は、有限状態空間の連続時間セミ・マルコフ過程として表現できる。各マーキングはセミ・マルコフ過程の状態に対応し、推移 (GPSN の発火) 時点に着目した隠れマルコフ連鎖 (Embedded Markov Chain; 以後 EMC と略記) を用いて、その平衡状態確率等を求めることができる [11]。その概略は次のとおりである。

GPSN のトランジションの集合を

$$T = \{t_1, t_2, \dots, t_L\} \quad (2)$$

とする。また、

$$W = \{w_1, w_2, \dots, w_L\} \quad (3)$$

とする。 W の要素 w_k は各トランジションに対応し、 t_k が時間トランジションの場合は発火率 (発火遅延の指数分布パラメータ)、瞬間トランジションの場合は発火確率計算のための重みを表す。

R_S を状態空間 (可達集合)、 TRS をタンジブルマーキングに対応する状態部分集合、 VRS をバニシングマーキングに対応する状態部分集合とする。

$$R_S = TRS \cup VRS, \quad TRS \cap VRS = \phi \quad (4)$$

EMC の推移確率行列 $U = [u_{ij}]$ は次式で得られる。

$$u_{ij} = \left(\sum_{k: t_k \in E_j(M_i)} w_k \right) / q_i \quad (5)$$

ここで,

$$q_i = \sum_{k: k \in E_j(M_i)} w_k \tag{6}$$

である。 $E_j(M_i)$ はマーキング M_i で発火可能なトランジションの中で発火することにより M_i に遷移するトランジションの集合, $E(M_i)$ はマーキング M_i で発火可能なトランジションの集合を表す。

状態の番号を適当に付け替えて, バニシングマーキングに対応する状態に若い番号を与えると, U は次のように表される。

$$U = A + B = \begin{pmatrix} C & D \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ E & F \end{pmatrix} \tag{7}$$

行列 A は VRS 内の状態からの推移確率のみ, 行列 B は TRS 内の状態からの推移確率のみを記述し, 他は 0 としたものである。

$$C = [c_{ij}], \quad D = [d_{ij}], \quad E = [e_{ij}], \quad F = [f_{ij}] \tag{8}$$

とする。

Ψ を EMC の平衡状態確率ベクトルとすると, これは,

$$\begin{cases} \Psi = \Psi U \\ \Psi \mathbf{1}^T = 1 \end{cases} \tag{9}$$

を解くことにより得られる。ここで $\mathbf{1}$ は, すべての要素が 1 の行ベクトルである。GSPN に対応するセミ・マルコフ過程の平衡状態確率は, Ψ と各状態の平均滞在時間を用いて求めることができる。

しかしながら, バニシングマーキングに対応する状態の滞在時間は 0 であることは明らかであるので, タンジブルマーキング間の状態推移のみに着目した縮約隠れマルコフ連鎖 (Reduced EMC ; 以後 REMC と略記) にモデルを縮小することにより, 推移確率行列のサイズを小さくして計算を容易にすること

ができる。

この REMC の推移確率行列 $U' = [u'_{ij}]$ は次のように求められる。

$$u'_{ij} = f_{ij} + \sum_{r: M_r \in VRS} e_{ir} P\{r \rightarrow s\} d_{sj} \quad (10)$$

ここで、 $P\{r \rightarrow s\} d_{sj}$ はバニシングマーキング M_r からタンジブルマーキング M_j へ、バニシングマーキングのみを経由して任意のステップで推移する確率である。

$$\begin{cases} \Psi' = \Psi' U' \\ \Psi' \mathbf{1}^T = 1 \end{cases} \quad (11)$$

を解くことにより REMC の平衡状態確率ベクトル $\Psi' = [\Psi'_j]$ が得られる。

マーキング M_i を基準マーキングとし、連続する 2 回の M_i への訪問の間に任意のマーキング M_j を訪問する平均回数 v_{ij} は

$$v_{ij} = \Psi'_j / \Psi'_i \quad (12)$$

となる。

タンジブルマーキング M_j に対応するセミ・マルコフ過程の平衡状態確率 π_j は次式となる。

$$\pi_j = v_{ij} E[SJ_j] / CY(M_i) \quad (13)$$

ここで、 $E[SJ_j]$ は状態 j の平均滞在時間、 $CY(M_i)$ はマーキング M_i を出発してから戻ってくるまでの平均時間であり、それぞれ次のように求められる。

$$E[SJ_j] = 1/q_j \quad (14)$$

$$CY(M_i) = \sum_{k: M_k \in TRS} v_{ik} E[SJ_k] \quad (15)$$

タンジブルマーキングに対応する状態集合 TRS 上で REMC を生成することは GSPN に対応するセミ・マルコフ過程を連続時間マルコフ連鎖に変換す

ることに相当する。この連続時間マルコフ連鎖の状態推移速度行列 $Q'=[q'_{ij}]$ は次のように求められる。

$$q'_{ij} = \begin{cases} u'_{ij}/E[SJ_i] & ; i \neq j \\ -\sum_{i \neq j} q'_{ij} & ; i = j \end{cases} \quad (16)$$

タンジブルマーキングに対応する状態の平衡状態確率ベクトル π は、次式から直接計算することができる。

$$\begin{cases} \pi Q' = 0 \\ \pi \mathbf{1}^T = 1 \end{cases} \quad (17)$$

3. 2 平衡状態確率と平均待ち行列長

図4のような可達グラフとなる本論文のGSPNの場合は、前述した手法を適用すると、結局、バニシングマーキングを、それに続くタンジブルマーキングに併合して消去した図5のような連続時間マルコフ連鎖と同等となる。これより、式(17)を用いて平衡状態確率を計算できる。総状態数は $(N+1)^2 + 2N + 1$ 個である。

状態 $(M(p_1), M(p_1'), M(p_2), M(p_2'), M(p_a), M(p_b))$ の平衡状態確率を $\pi(M(p_1), M(p_1'), M(p_2), M(p_2'), M(p_a), M(p_b))$

で表す。

待合室 Q_m に i 人いる確率 π_{mi} (待合室容量 = N) は、次式により求められる。

$$\begin{aligned} \pi_{ii} &= P\{M(p_1) = i\} \\ &= \pi(i, N-i, 0, N, 0, 1) \\ &+ \sum_{k=0}^N \pi(i, N-i, k, N-k, 1, 0) \quad ; i = 1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (18)$$

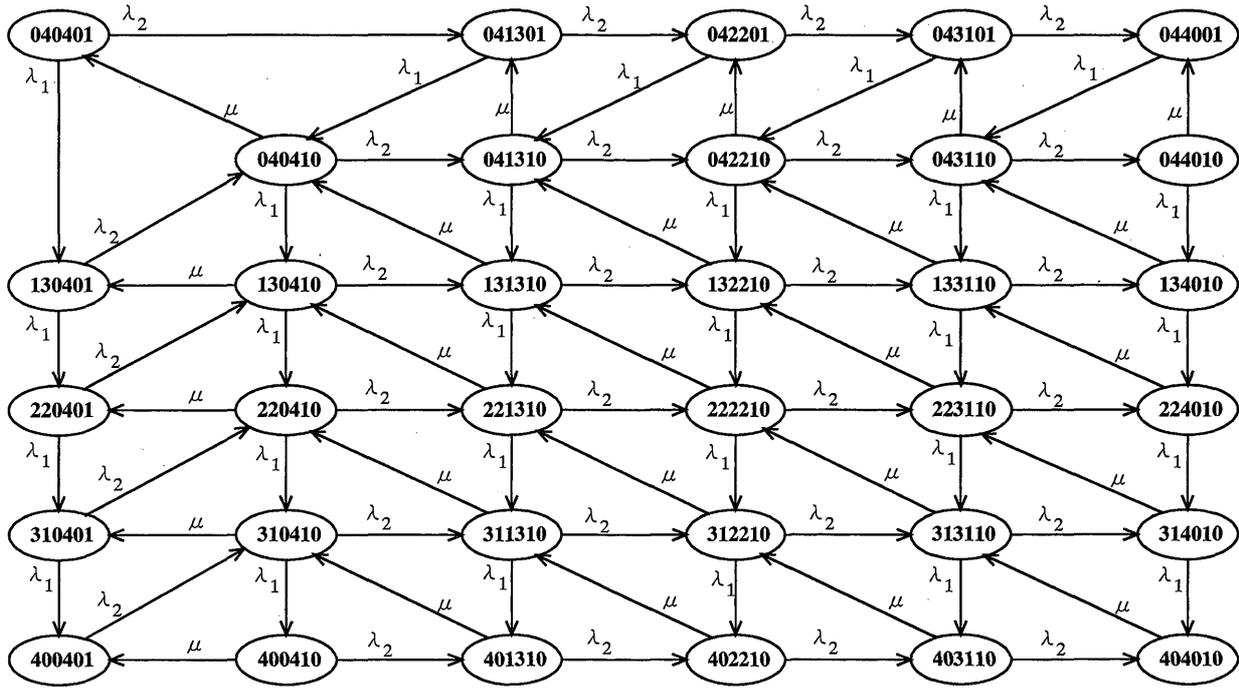


図5 連続時間マルコフ連鎖の状態推移速度図

$$\begin{aligned} \pi_{10} &= P\{M(p_1) = 0\} \\ &= \sum_{j=0}^N \sum_{k=0}^1 \pi(0, N, k, N-k, j, 1-j) \end{aligned} \quad (19)$$

$$\begin{aligned} \pi_{2i} &= P\{M(p_2) = i\} \\ &= \pi(0, N, i, N-i, 0, 1) \\ &\quad + \sum_{k=0}^N \pi(k, N-k, i, N-i, 1, 0) \quad ; i=1, 2, \dots, N \end{aligned} \quad (20)$$

$$\begin{aligned} \pi_{20} &= P\{M(p_2) = 0\} \\ &= \sum_{j=0}^1 \sum_{k=0}^N \pi(k, N-k, 0, N, j, 1-j) \end{aligned} \quad (21)$$

$$L_m = \sum_{i=1}^N i \pi_{mi} \quad (22)$$

$\pi_{mN} (m=1, 2)$ は待合室 m がすべて塞がっている確率となる。

$Q_m (m=1, 2)$ の平均待ち行列長 L_m は次のように求められる。

なお、この待ち行列の解析結果に関する考察は、すでに文献 [7] で述べているので、ここでは記さない。

4. む す び

二つの到着過程を持つ有限容量同時サービス並進待ち行列を一般化確率ペトリネットによりモデル化し、その解析法を示した。これにより、このシステムの挙動が一般化確率ペトリネットで容易に記述可能であることがわかった。

今後の課題として、到着過程が三つ以上の一般的なシステムの解析と考察、及び、各待合室への到着客が待合室を共有する場合の一般化確率ペトリネットによるモデル化の検討などが残されている。

文 献

- [1] J. M. Harrison : "Assembly-like queues", J. Applied Probability, 10, pp. 354-367 (1973).
- [2] 福田明, 佐藤正二, 椋本介士 : "同時サービス並進待ち行列とその入力制御", 信学論 (A), J69-A, 7, pp.829-839 (1986-7).
- [3] 福田明, 佐藤正二, 椋本介士 : "同時サービス並進待ち行列の入力制御", 信学論 (A), J69-A, 11, pp.1310-1318 (1986-11).
- [4] 佐藤正二, 福田明 : "途中放棄のある同時サービス並進待ち行列について", 信学論 (A), J70-A, 10, pp.1497-1500 (1987-10).
- [5] 能上慎也, 片山勁 : "データフロー制御方式における有限待合室をもつ同時処理モデルについて", 信学論 (B), J70-B, 10, pp.1260-1262 (1987-10).
- [6] U. Narayan Bhat : "Finite Capacity Assembly-like queues", Queuing Systems, 1, pp.85-101 (1986).
- [7] 中村隆志, 菱川善文 : "有限容量同時サービス並進待ち行列の解析", 小樽商大商学討究, 43, 1・2 合併号, pp.49-61 (1992-10).
- [8] 村田忠夫 : ペトリネットの解析と応用, 近代科学社 (1992).
- [9] 奥川峻史 : ペトリネットの基礎, 共立出版 (1995).
- [10] M. Ajmone Marsan, G. Conte : "A Class of Generalized Stochastic Petri Nets for the Performance Evaluation of Multiprocessor Systems", ACM Transaction on Computer Systems, Vol. 2, No. 2, pp. 93-122 (1984).
- [11] M. Ajmone Marsan, G. Balbo, G. Conte, S. Donatelli, G. Franceschinis : Modeling with Generalized Stochastic Petri Nets, John Wiley & Sons (1995).