

一般化ポアソン分布におけるテストデータ解析のためのパラメータの変換

鉄道総合技術研究所¹ 小笠原春彦

Transformations of parameters in the generalized Poisson distribution for test data analysis
Haruhiko Ogasawara (Railway Technical Research Institute, Hikari-cho, Kokubunji 185)

The generalized Poisson distribution is a distribution which approximates various forms of mixtures of Poisson distributions. The mean and variance of the generalized Poisson distribution, which are simple functions of the two parameters of the distribution, are more useful than the original parameters in test data analysis. Therefore, we adopted two types of transformations of parameters. The first model has new parameters of mean and standard deviation. The second model contains new parameters of mean and variance/mean. An example indicates that the transformed parameters are convenient to understand the properties of data.

Key words: Poisson distribution, generalized Poisson distribution, transformation of parameters, psychological tests, errors in tests.

ポアソン分布 (Poisson distribution) は、比較的まれな事象の発生数にあてはめられることが多い分布である。心理学においては作業や心理テストに現れるエラーの数等の分布にあてはめられることがある。例えば西川 (1973) は特定個人における内田クレペリン検査のエラーの発生数が、ポアソン分布に従うことを確かめている。また、Rasch (1980 内田監訳, 1985) は複数の特定個人における複数の特定課題の誤答数のモデルとしてポアソン分布のパラメータを異なる性質のパラメータの積に分解したモデル (Rasch の乗法的ポアソンモデル) を提案している。

一方、特定個人についてではなく、集団における事象発生数の周辺分布を問題にする場合、通常は事象の発生傾向 (ポアソン分布のパラメータの値に対応) に個人差があるために、周辺分布はポアソン分布があてはまらないことが多い。これは、集団における事象発生数の分布は異なるポアソン分布の混合分布と考えられるからである。混合分布の種類としては、ポアソン分布のパラメータ λ が形状パラメータ h/b および尺度パラメータ b をもつガンマ分布 (gamma distribution) に従うという仮定をし、 λ を積分して消去した形から得られる負の二項分布 (negative binomial distribution) が用いられることが少なくない。負の二項

分布は別の導出において、極限分布を求める前の分布名を用いて、ポリア-エゲンベルガー分布 (Polya-Eggenberger distribution) と呼ばれることもある。印東 (1957)、西川 (1973) および伊田・東福寺 (1981) は、集団における作業やテストにおけるエラー数の分布に負の二項分布があてはめられることを示している。

負の二項分布を導くためのガンマ分布は、指数型の分布、歪みのある分布、対称に近い分布等さまざまな分布型を表現できることがわかっているため、当分布は応用範囲の広い分布と言える。しかし、ポアソン分布の混合分布は各種のものが提案されており、心理学における事象発生数の分布に対して、どの分布をあてはめたらよいかについての理論的な事前の知識がない場合には、パラメータの分布の選択は恣意的にならざるを得ない。

Consul & Jain (1973a, 1973b) は、このような問題に答えるねらいも含めて、さまざまな混合分布に近似する分布として、一般化ポアソン分布 (generalized Poisson distribution: 以下 GP 分布) を提案した (Consul, 1989 参照)。これは、事象発生数 x の出現確率 $\Pr(x)$ がパラメータ λ_1 と λ_2 により次のように記述されるものである。

$$\Pr(x) = \lambda_1(\lambda_1 + \lambda_2 x)^{x-1} \exp(-(\lambda_1 + \lambda_2 x)) / x!,$$
$$|\lambda_2| < 1 \quad (1)$$

¹ 現所属：小樽商科大学。

式(1)から明らかなように GP 分布はポアソン分布のパラメータ λ が $\lambda_1 + \lambda_2 x$ に対応した形式をしており、 λ_1 と λ_2 の値の組合せにより、分布の形状は L 型、歪みのある分布、対称に近い分布等とさまざまに変化する。

一般化ポアソン分布のパラメータの構造化

小笠原 (1992a) は、GP 分布の λ_1 と λ_2 を個人が所属する集団の特徴を表す共変量を含むように構造化したモデルを提案した。小笠原 (1992b)、小笠原・金野 (1994) はさまざまな心理テストデータにこのモデルをあてはめ、データの記述やテストの標準化に有効であることを示した。

GP 分布はポアソン分布のさまざまな混合分布に近似する一方、混合分布以外の分布を表現することが可能である。ポアソン分布の混合分布では、一般に次の関係が導かれる (Meredith, 1971)。

$$\sigma^2(x) = \sigma^2(\lambda) + E(x) \quad (2)$$

ここで、 $E(x)$ と $\sigma^2(x)$ は周辺分布における事象発生数 x の平均 (期待値) と分散、 $\sigma^2(\lambda)$ はポアソン分布のパラメータ λ の分布の分散である。これより、 $\sigma^2(\lambda) = 0$ でない限り、 $\sigma^2(x) > E(x)$ が得られる。すなわち、単一のポアソン分布では、周知のように $\sigma^2(x) = E(x) = \lambda$ であるが、混合分布では、分散が平均よりも $\sigma^2(\lambda)$ だけ大となる。この現象は過大変動 (overdispersion; Van Duijn, 1993 参照) として知られている。小笠原 (1992b)、小笠原・金野 (1994) のデータにおいても GP 分布のモデルをあてはめたものは、すべて過大変動を示していた。逆に分散が、平均よりも小さい場合 (過小変動, under dispersion) は混合分布ではあり得ない。しかし、GP 分布では過小変動を示す分布も表現可能である。すなわち、式(1)より GP 分布に従う確率変数 x の平均と分散は次のようになる (Consul & Jain, 1973a, 1973b)。

$$E(x) = \lambda_1 / (1 - \lambda_2), \quad \sigma^2(x) = \lambda_1 / (1 - \lambda_2)^3 \quad (3)$$

従って、 $0 < \lambda_2 < 1$, $\lambda_2 = 0$, $-1 < \lambda_2 < 0$ はそれぞれ過大変動、ポアソン分布、過小変動に対応する。

ところで、パラメータ λ_1 と λ_2 はモーメントを用いると

$$\lambda_1 = (E(x))^{3/2} / \sigma(x), \quad \lambda_2 = 1 - (E(x) / \sigma^2(x))^{1/2} \quad (4)$$

と表現でき、 λ_2 が平均と分散の比のみの関数となっているが、 λ_1 は平均のべき乗と標準偏差の比になっており単純ではない。

小笠原 (1992a) の構造化モデルでは λ_1 と λ_2 は、個人の所属する集団の特徴を表す変数のベクトル t の関数として構成されることを想定しており、一般的に次のように表される。

$$\lambda_{1i} = \lambda_1(\theta_1, t_i), \quad \lambda_{2i} = \lambda_2(\theta_2, t_i) \quad (i=1, \dots, N) \quad (5)$$

ここで、添え字 i は i 番目の観測個体の値であることを示し、 θ_1 と θ_2 は t_i の関数である λ_{1i} と λ_{2i} にお

けるパラメータのベクトルである。式(5)のモデルでは λ_1 と λ_2 の推定に代わって、 θ_1 と θ_2 を推定することに問題は帰着する。このモデルは GP 分布のあてはまる集団が、 t と共にその分布が相違する状況を記述するモデルである。

一般化ポアソン分布のパラメータの変換

小笠原 (1992a, 1992b)、小笠原・金野 (1994) の例では、 t は年齢であり、集団における誤答数の分布が年齢と共に変化する状況を把握することが応用上の目的である。そこでは分布の平均と分散の変化 (あるいは平均と分散の差や比) に関心が向けられるが、このような場合では、GP 分布を λ_1 と λ_2 のパラメータで表現するのは必ずしも適当ではない。すなわち、 λ_1 と λ_2 を t の関数として式(5)のように表現し、 θ_1 と θ_2 を推定した上で、式(3)に λ_1 と λ_2 の推定値を代入し、平均と分散の変化を記述することは可能である。しかし、平均の変化を成長曲線や多項式で表現したいという場合には、 λ_1 と λ_2 のパラメータで GP 分布を表現することは解釈上の問題から見ると適当ではない。あるいは標準偏差の増大傾向を平均の変化とは独立に記述したいという場合にも λ_1 と λ_2 による表現は適当ではない。そこで、 λ_1 と λ_2 のパラメータの変換として、次の二つのモデルを提案する。

パラメータ変換後のモデル

モデル A: パラメータ μ と σ による表現 これは式(3)における平均と標準偏差をそれぞれ新たにパラメータ μ, σ としたもので、

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda_1 / (1 - \lambda_2), \quad \sigma = \lambda_1^{1/2} / (1 - \lambda_2)^{3/2} \\ (\lambda_1 &= \mu^3 / \sigma, \quad \lambda_2 = 1 - (\mu^{1/2} / \sigma)) \end{aligned} \quad (6)$$

である。式(5)に対応する構造化モデルは

$$\mu_i = \mu(\theta_\mu, t_i), \quad \sigma_i = \sigma(\theta_\sigma, t_i) \quad (i=1, \dots, N)$$

である。ここで θ_μ と θ_σ は、構造化されたモデルにおけるパラメータのベクトルである。

モデル B: パラメータ μ と ρ による表現 これは平均と分散/平均をそれぞれ新たなパラメータ μ, ρ としたもので

$$\begin{aligned} \mu &= \lambda_1 / (1 - \lambda_2), \quad \rho = 1 / (1 - \lambda_2)^2 \\ (\lambda_1 &= \mu \rho^{1/2}, \quad \lambda_2 = 1 - (1 / \rho^{1/2})) \end{aligned} \quad (7)$$

である。構造化モデルでは

$$\mu_i = \mu(\theta_\mu, t_i), \quad \rho_i = \rho(\theta_\rho, t_i) \quad (i=1, \dots, N)$$

であり、 θ_μ と θ_ρ はパラメータのベクトルである。パラメータ ρ (分散/平均) の意味はテスト理論における信頼性の観点から次のように解釈できる (Meredith, 1971)。式(2)において $\sigma^2(x)$ は $\sigma^2(\lambda)$ と $E(x)$ の和に分解されるが、 $\sigma^2(\lambda)$ は偶然によらない個人差の分散といういわば真の得点の分散に相当するものであり、 $\sigma^2(\lambda) / \sigma^2(x)$ は信頼性と解釈できる。逆に $E(x)$ は個人内の偶然的な変動に起因するものと解釈

できるので、新しいパラメータ ρ を用いると信頼性は $1 - (1/\rho)$ となる。なお、 $1 - (E(x)/\sigma^2(x))$ を信頼性と定義するのは Gulliksen (1950) が Kuder-Richardson の 21 公式をスピード検査のケースにあてはまるように修正したものに一致することが知られている (Meredith, 1971)。

なお、ポアソン分布の混合分布の一つである前述の負の二項分布では、

$$E(x) = h, \sigma^2(x) = h(1+b) \quad (8)$$

であり、 ρ は $1+b$ に相当し、負の二項分布モデルとの比較にも便利である。

パラメータの推定 パラメータのベクトルの推定は最尤法により、次のように行う。モデル A において $t_i, x_i, i=1, \dots, N$ が与えられたときの θ_μ と θ_σ の尤度 L は観測個体の相互の独立性を仮定すると

$$L(\theta_\mu, \theta_\sigma | t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \frac{\mu_i^{3/2}}{\sigma_i} \left\{ \frac{\mu_i^{3/2}}{\sigma_i} + \left(1 - \frac{\mu_i^{1/2}}{\sigma_i}\right) x_i \right\}^{x_i - 1} \times \exp \left\{ -\frac{\mu_i^{3/2}}{\sigma_i} - \left(1 - \frac{\mu_i^{1/2}}{\sigma_i}\right) x_i \right\} / x_i! \quad (9)$$

となる。 f を負の対数尤度 ($f = -\ln L$) とすると f を最小化する値が θ_μ と θ_σ の最尤推定値である。この最小化を解析的に得ることは困難であるので、ここでは、ニュートン-ラフソン法により求める。これに必要なグラディエントベクトルとヘシアン行列は付録に示した。なお、 θ_μ と θ_σ には共通なパラメータの要素はないものとする。推定値の標準誤差の推定にはパラメータ値推定の際に得られる情報行列の近似としてヘシアン行列を求め、その逆行列の主対角要素の平方根をこれにあてる。

モデル B においては θ_μ と θ_ρ の尤度は

$$L(\theta_\mu, \theta_\rho | t_1, \dots, t_N, x_1, \dots, x_N) = \prod_{i=1}^N \frac{\mu_i}{\rho_i^{1/2}} \left\{ \frac{\mu_i}{\rho_i^{1/2}} + \left(1 - \frac{1}{\rho_i^{1/2}}\right) x_i \right\}^{x_i - 1} \times \exp \left\{ -\frac{\mu_i}{\rho_i^{1/2}} - \left(1 - \frac{1}{\rho_i^{1/2}}\right) x_i \right\} / x_i! \quad (10)$$

となる。 θ_μ と θ_ρ の推定のためのグラディエントベクトルとヘシアン行列は付録に示した。なおモデル A と同様に θ_μ と θ_ρ には共通なパラメータの要素はないものとする。

適用例

ここで用いるデータは抹消検査の一種であるアメフリ検査に関するもので 20-54 歳の男子鉄道従事員 ($N=2957$) のデータである。これは、小笠原 (1992b) で用いられたものと同一データである。アメフリ検査は、ランダムに近い状態に並んだカタカナの並びの中から“ア”“メ”“フ”“リ”の 4 文字のいずれかをできるだけ速く正確に 3 分間抹消するものである (検査 I)。休憩後、今度は“ア”“メ”“フ”

“リ”以外の文字を 3 分間抹消させる (検査 II)。ここでは検査 I と II におけるそれぞれの誤答数 (誤って抹消したものおよび抹消すべき文字を見落としたもの) を変数 x とする。分析のねらいは成人以降年齢 (t) と共に x の分布がどのように変化するかを調べることにある。小笠原 (1992b) は λ_1 と λ_2 の構造化モデルとして、 t に関する多項式モデルを採用している。すなわち λ_1 と λ_2 のそれぞれに 0-3 次の t に関する多項式を想定し、 λ_1 と λ_2 のすべての組合せにおけるモデルの推定結果から AIC (赤池情報量; Akaike, 1973) 等を参考にしながら、適切なモデルを選択した。Figure 1 (小笠原, 1992b) は実際のデータにおける誤答平均±標準偏差 (縦棒) と最小 AIC モデルのあてはめ結果から計算される誤答平均±標準偏差を示している。ここで、あてはめたモデルは検査 I においては λ_1 と λ_2 がともに t の 1 次の多項式、検査 II においては λ_1 と λ_2 はそれぞれ t の 2 次および 1 次の多項式である。

ところで、実際のデータにおける x の分布 (図の縦棒) が、検査 I では平均値が年齢と共に増加していることおよびばらつきも大きくなっていること、逆に検査 II では平均とばらつきがともに減少傾向である

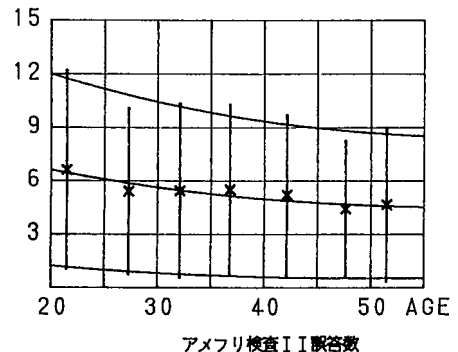
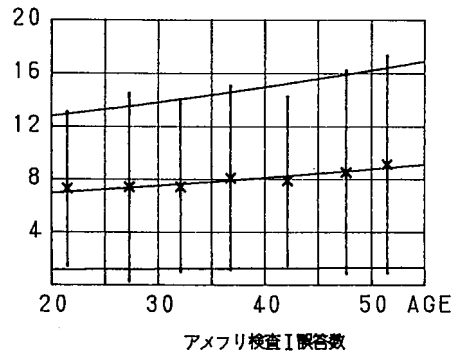


Figure 1. 年齢段階別の実際の平均±標準偏差 (縦棒) とモデル O における最小 AIC モデルのあてはめ (3 本の曲線) (小笠原, 1992b)。

Table I
各モデルの AIC

モデル	λ_1, μ の 次数	アメフリ検査 I				アメフリ検査 II			
		λ_2, σ, ρ の次数				λ_2, σ, ρ の次数			
		0	1	2	3	0	1	2	3
O	0	34.19	12.44	12.82	14.58	151.12	118.16	119.42	121.40
	1	15.94	<u>10.18</u>	10.33	12.09	99.96	97.30	98.21	100.21
	2	16.19	10.70	12.07	13.80	98.72	<u>96.68</u>	98.66	100.66
	3	17.91	12.48	13.88	15.77	99.49	97.63	99.62	101.15
A	0	34.19	36.19	38.06	40.01	151.12	151.72	153.66	155.29
	1	23.87	<u>10.79</u>	12.79	14.75	114.83	97.97	99.65	99.99
	2	24.96	11.74	12.20	14.15	114.19	<u>97.34</u>	98.81	99.04
	3	26.80	13.65	14.13	15.76	114.39	97.79	99.24	100.85
B	0	34.19	36.19	38.06	40.01	151.12	151.72	153.66	155.26
	1	15.94	<u>10.79</u>	12.79	14.74	99.96	97.96	99.62	99.83
	2	16.19	10.99	12.20	14.14	98.72	<u>96.79</u>	98.77	98.97
	3	17.91	12.78	14.02	15.75	99.49	97.82	99.80	100.79

注) AIC の値はアメフリ検査 I (II) の結果から 18200 (15700) を減じたものが示されている。下線はモデル O, A, B の各モデルの中での最小の AIC を示す。

ことがわかる。このような情報に基づいて、モデルをデータにあてはめる場合には従来のパラメータ表現だけでなく、ここで提案したモデルを適用する意味がある。

Table 1 は小笠原 (1992a) のモデル (モデル O) との比較のためにモデル A と B についてもそれぞれのパラメータに 0-3 次の年齢 (t) に関する多項式を想定し、そのすべての組合せでモデルをあてはめた結果得られた AIC を示したものである。表における下線はモデル O, A, B の各々のモデルのなかでの最小の AIC を示している。このデータではたまたま最小 AIC モデルの多項式の次数の組合せは、パラメータの組を (λ_1, λ_2) , (μ, σ) , (μ, ρ) で互いに対応させた場合に一致している。最小 AIC の値は、検査 I と検査 II のそれぞれの中での相違は 1 未満の小さい値である。このデータについてみると多項式という特定のモデルではあるが、新しいモデル A と B も従来のモデル O と同程度にあてはまっている。Table 2 は最小 AIC モデルのあてはめ結果の平均値と標準偏差を四つの年齢について計算した結果である。これらの類似性からもあてはまりの程度は同程度であることがわかる。

Table 3 は最小 AIC モデルの多項式の推定結果と多項式における最高次数の係数の t 値 (推定値/推定値の標準誤差) を示している。従来のモデル O では平均値の変化の傾向は λ_1 と λ_2 の関数であるために λ_2 が一定であるような場合を除いては表から直接読みとることができない。これに対してモデル A, B では検

Table 2
最小 AIC モデルにおける平均と標準偏差の推定値

モデル	年齢	アメフリ検査 I		アメフリ検査 II	
		$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$	$\hat{\mu}$	$\hat{\sigma}$
O	22	7.100	5.907	6.404	5.248
	32	7.657	6.404	5.492	4.705
	42	8.265	6.960	4.898	4.305
	52	8.931	7.584	4.594	4.044
A	22	7.093	5.910	6.337	5.148
	32	7.691	6.448	5.533	4.763
	42	8.288	6.986	4.942	4.378
	52	8.885	7.524	4.562	3.993
B	22	7.094	5.910	6.392	5.230
	32	7.691	6.448	5.500	4.713
	42	8.288	6.986	4.900	4.313
	52	8.885	7.524	4.593	4.041

査 I では平均、標準偏差および分散/平均が線型に増加していることが容易に読みとれる。また t 値の値も十分大きく、線型増加の統計的な有意性が示されている。また、検査 II においては平均の傾向がゆるやかな放物線 (頂点はモデル A では 64.8 歳、モデル B では 57.5 歳にある) であることがわかる。また、ゆるやかな放物線であることに対応して t 値もモデル A と B のそれぞれについて 1.62, 1.78 という値で、2 次式のモデルを受容するには十分大きな値ではない。そ

Table 3
最小 AIC モデルの推定結果

モデル	アメフリ検査 I	アメフリ検査 II
O	$\hat{\lambda}_1 = 2.970 + .01057t$ (2.07) $\hat{\lambda}_2 = .5071 + .001900t$ (2.79)	$\hat{\lambda}_1 = 4.335 - .07147t + .0006718t^2$ (1.61) $\hat{\lambda}_2 = .5529 - .001595t$ (-2.01)
A	$\hat{\mu} = 5.780 + .05973t$ (5.36) $\hat{\sigma} = 4.726 + .05381t$ (4.03)	$\hat{\mu} = 8.852 - .1376t + .001061t^2$ (1.62) $\hat{\sigma} = 5.994 - .03848t$ (-4.23)
B	$\hat{\mu} = 5.780 + .05973t$ (5.36) $\hat{\rho} = 3.862 + .04825t$ (2.75)	$\hat{\mu} = 9.386 - .1683t + .001463t^2$ (1.78) $\hat{\rho} = 4.812 - .02418t$ (-1.95)

注) t は年齢, () 内は多項式の最高次数の係数の t 値 (推定値/推定値の標準誤差) を表す。

ここで 2 次の多項式の代わりに 1 次の多項式もモデルの候補になるが, Table 1 の AIC はモデル A, B のそれぞれについて 0.6, 1.2 程度の増加が見られるのみで有力であることがわかる。また, 標準偏差と分散/平均も年齢と共に減少しその傾向も比較的大きな t 値の絶対値であり, 有意であることもわかる。

引用文献

Akaike, H. 1973 Information theory and an extension of the maximum likelihood principle. In B. N. Petrov & F. Casaki (Eds.), *Second international symposium on information theory*. Budapest: Akademiai Kiado. Pp. 267-281.

Consul, P. C. 1989 *Generalized Poisson distribution*. New York: Dekker.

Consul, P. C., & Jain, G. C. 1973a A generalization of the Poisson distribution. *Technometrics*, **15**, 791-799.

Consul, P. C., & Jain, G. C. 1973b On some interesting properties of the generalized Poisson distribution. *Biometrische Zeitschrift*, **15**, 495-500.

Gulliksen, H. 1950 The reliability of speeded tests. *Psychometrika*, **15**, 259-269.

伊田政司・東福寺一郎 1981 単純作業における誤りの発生過程 *心理学研究*, **52**, 15-22.

印東太郎 1957 確率及び統計 コロナ社

Meredith, W. 1971 Poisson distribution of error in mental test theory. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **24**, 49-82.

西川泰夫 1973 誤りの発生過程——単純課題反復時における個人内変動——*心理学研究*, **44**, 32-40.

小笠原春彦 1992a 一般化ポアソン分布及びポリアーエゲンベルガー分布の構造化パラメータを用いた誤答数のモデル *行動計量学*, **19**(2), 1-13.

小笠原春彦 1992b 経時性等の補助情報を考慮した共分散構造モデルに関する研究 東京工業大学大学院総合理工学研究科博士論文 (未刊)

小笠原春彦・金野祥子 1994 運転適性検査における作業性検査 J-2001 の評価規準の作成 鉄道総研報

告, **8**(1), 9-14.

ラッシュ G. 内田良男 (監訳) 1985 心理テストの確率モデル 名古屋大学出版会
(Rasch, G. 1980 *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*. Chicago: The University of Chicago Press. (Original work in 1960))

Van Duijn, M. A. J. 1993 *Mixed models for repeated count data*. Leiden: DSWO Press.

——1994. 2. 18 受稿, 1995. 9. 9 受理——

付 録

数値計算に必要なグラディエントベクトルとヘシアン行列

(1) モデル A

$$f = -\ln L = \sum_{i=1}^N \left[-\ln \left(\frac{\mu_i^{3/2}}{\sigma_i} \right) - (x_i - 1) \times \ln \left\{ \frac{\mu_i^{3/2}}{\sigma_i} + \left(1 - \frac{\mu_i^{1/2}}{\sigma_i} \right) x_i \right\} + \frac{\mu_i^{3/2}}{\sigma_i} + \left(1 - \frac{\mu_i^{1/2}}{\sigma_i} \right) x_i + \ln x_i! \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \mu_i} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{3}{2} \mu_i^{-1/2} - \frac{(x_i - 1)(3\mu_i^{1/2} - \mu_i^{-1/2} x_i)}{2(\mu_i^{3/2} + (\sigma_i - \mu_i^{1/2}) x_i)} + \frac{3\mu_i^{1/2} - \mu_i^{-1/2} x_i}{2\sigma_i} \right\} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_\mu}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \sigma_i} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{\sigma_i} - \frac{(x_i - 1)(-\mu_i^{3/2} + \mu_i^{1/2} x_i)}{\sigma_i \mu_i^{3/2} + \sigma_i (\sigma_i - \mu_i^{1/2}) x_i} - \frac{-\mu_i^{3/2} + \mu_i^{1/2} x_i}{\sigma_i^2} \right\} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta_\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_\mu \partial \theta_\mu} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \theta_\mu \partial \theta_\mu} + \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{3}{2} \mu_i^{-3/2} - \frac{(x_i - 1)(3\mu_i^{-1/2} + \mu_i^{-3/2} x_i)}{4(\mu_i^{3/2} + (\sigma_i - \mu_i^{1/2}) x_i)} + \frac{(x_i - 1)(3\mu_i^{1/2} - \mu_i^{-1/2} x_i)^2}{4(\mu_i^{3/2} + (\sigma_i - \mu_i^{1/2}) x_i)^2} + \frac{3\mu_i^{-1/2} + \mu_i^{-3/2} x_i}{4\sigma_i} \right\} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_\mu} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_\mu}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_\sigma \partial \theta_\sigma} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{(x_i - 1)(3\mu_i^{1/2} - \mu_i^{-1/2} x_i) x_i}{2(\mu_i^{3/2} + (\sigma_i - \mu_i^{1/2}) x_i)^2} + \frac{-3\mu_i^{1/2} + \mu_i^{-1/2} x_i}{2\sigma_i^2} \right\} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta_\sigma} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_\sigma}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_\sigma \partial \theta_\sigma} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial \sigma_i} \frac{\partial^2 \sigma_i}{\partial \theta_\sigma \partial \theta_\sigma} + \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{\sigma_i^2} + \frac{(x_i - 1)(-\mu_i^{3/2} + \mu_i^{1/2} x_i)(\mu_i^{3/2} + (2\sigma_i - \mu_i^{1/2})x_i)}{(\sigma_i \mu_i^{3/2} + \sigma_i(\sigma_i - \mu_i^{1/2})x_i)^2} + \frac{2(\mu_i^{3/2} - \mu_i^{1/2} x_i)}{\sigma_i^3} \right\} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta_\sigma} \frac{\partial \sigma_i}{\partial \theta_\sigma}$$

(2) モデル B

$$f = -\ln L = \sum_{i=1}^N \left[-\ln \left(\frac{\mu_i}{\rho_i^{1/2}} \right) - (x_i - 1) \ln \left\{ \frac{\mu_i}{\rho_i^{1/2}} + \left(1 - \frac{1}{\rho_i^{1/2}} \right) x_i \right\} + \frac{\mu_i}{\rho_i^{1/2}} + \left(1 - \frac{1}{\rho_i^{1/2}} \right) x_i + \ln x_i! \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_\mu} = \sum_{i=1}^N \left\{ -\mu_i^{-1} - \frac{x_i - 1}{\mu_i + (\rho_i^{1/2} - 1)x_i} + \rho_i^{-1/2} \right\} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_\mu}$$

$$\frac{\partial f}{\partial \theta_\rho} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{1}{2} \rho_i^{-1} - \frac{(x_i - 1)(-\mu_i + x_i)}{2(\rho_i \mu_i + (\rho_i^{3/2} - \rho_i)x_i)} \right.$$

$$\left. + \frac{1}{2} \rho_i^{-3/2} (-\mu_i + x_i) \right\} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_\rho}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_\mu \partial \theta_\mu} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial \mu_i} \frac{\partial^2 \mu_i}{\partial \theta_\mu \partial \theta_\mu}$$

$$+ \sum_{i=1}^N \left\{ \mu_i^{-2} + \frac{x_i - 1}{(\mu_i + (\rho_i^{1/2} - 1)x_i)^2} \right\} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_\mu} \frac{\partial \mu_i}{\partial \theta_\mu}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_\rho \partial \theta_\rho} = \sum_{i=1}^N \left\{ \frac{(x_i - 1) \rho_i^{-1/2} x_i}{2(\mu_i + (\rho_i^{1/2} - 1)x_i)^2} - \frac{1}{2} \rho_i^{-3/2} \right\} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_\rho} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_\rho}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial \theta_\rho \partial \theta_\rho} = \sum_{i=1}^N \frac{\partial f}{\partial \rho_i} \frac{\partial^2 \rho_i}{\partial \theta_\rho \partial \theta_\rho} + \sum_{i=1}^N \left\{ -\frac{1}{2} \rho_i^{-2} \right.$$

$$\left. \frac{(x_i - 1)(-\mu_i + x_i)(\mu_i + (\frac{3}{2} \rho_i^{1/2} - 1)x_i)}{2(\rho_i \mu_i + (\rho_i^{3/2} - \rho_i)x_i)^2} \right.$$

$$\left. + \frac{3}{4} \rho_i^{-5/2} (\mu_i - x_i) \right\} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_\rho} \frac{\partial \rho_i}{\partial \theta_\rho}$$