The Japanese Journal of Psychology
1999, Vol. 70, No. 4, 333-338

資料

規準化直接オブリミン解の標準誤差

小樽商科大学 小笠原春彦

Standard errors for the direct oblimin solution with Kaiser's normalization

Haruhiko Ogasawara (*Department of Information and Management Science, Otaru University of Commerce, Midori, Otaru 047-8501*)

Kaiser's normalization is widely used in factor rotation. In this paper the asymptotic standard errors for rotated parameters are obtained when Kaiser's normalization is employed for the direct oblimin method which is one of the most frequently used oblique rotations. The method of estimating the standard errors is based on the augmented information matrix for parameters with restrictions. A Monte Carlo simulation is carried out to confirm the accuracy of the method. Further, it is shown by artificial data that the values of the standard errors with Kaiser's normalization can be significantly different from those without the normalization. That is, Kaiser's normalization tends to decrease the standard errors of the loadings for the variables with small communalities and to increase those of the correlations among oblique factors.

Key words: Kaiser's normalization, direct oblimin, standard errors, information matrix, restriction for estimators.

因子分析における回転の方法にはさまざまなものがあるが，各観測変数の回転における影響の大きさを均一にするためにいわゆるKaiserによる規準化を行うことが多い．これは回転の対象となる負荷行列を各観測変数の共通性の平方根で除し，新たな共通性をすべて1にした上で回転し，回転後にもとの共通性になるように負荷行列を再び変換するものである．すなわち，p変量k因子の回転前負荷行列を$\Lambda(p\times k)$，回転（変換）行列を$T(k\times k)$，i番目の変数の共通性の平方根$(\sqrt{c_i})$をi番目の対角要素とする対角行列を$C(p\times p)=\mathrm{diag}(\sqrt{c_1},\cdots,\sqrt{c_p})$とすると，回転（直交または斜交）の対象となる負荷行列は$C^{-1}\Lambda$であり，回転後の負荷行列Bは

$$B=C(C^{-1}\Lambda T)=\Lambda T \qquad (1)$$

である．

典型的な統計解析プログラムパッケージであるSAS（SAS Institute Inc., 1990），BMDP（Dixon, 1992），SPSS（SPSS Inc., 1990）では回転を行う場合はKaiserによる規準化の有無を選択できるが，デフォルト値はいずれも規準化を行うようになっている．したがって，現在までに因子分析の適用においておびただしい数の分析が規準化をともなって行われてきたと推測される．

ところで，因子分析結果の評価には実質科学的な知識に基づく因子の解釈とともにさまざまな統計的な指標が有用である．そのひとつはパラメータの推定値の標準誤差である．直交回転後の因子負荷の標準誤差の一般的な導出方法はArcher & Jennrich（1973）およびJennrich（1974）によって得られた．これらの結果に基づき，最もよく使用される回転法のひとつであるバリマックス法を含むオーソマックス法について，Kaiserの規準化をともなう解の標準誤差は小笠原（1996）によって示された．

一方，斜交回転後の結果については一般的な標準誤差の導出方法はJennrich（1973）によって得られ，一般化されたCrawford-Ferguson族（後に“4次基準の一般化対称族”（Clarkson & Jennrich, 1988）と呼ばれるもの）に対して，具体的な計算方法が示された．また，プロマックス法についてはOgasawara（1998a）により，直交・斜交プロクラステス法についてはOgasawara（1999）により，回転解の標準誤差が示された．しかし，これらの回転はKaiserの規準化をともなわないケースを対象としたものである．

行動科学でよく用いられる相関行列を対象とした斜交回転解についてはOgasawara（1998b）は情報行列を用いた標準誤差の導出方法を示し，素（raw; Kaiserの規準化を行わない意）直接および間接オブリミン解について具体例を与えた．また，同論文には回転後の因子寄与の標準誤差の算出方法も示されている．

本研究では斜交回転解のうち最も一般的な方法のひ

とつである直接オブリミン法（Jennrich & Sampson, 1966 参照）の解について Kaiser の規準化をともなう場合の標準誤差の求め方を示す．

斜交解におけるパラメータの制約

因子負荷を対象とする斜交回転後のパラメータの制約とそれに基づく標準誤差の一般的な解法は前述のように Jennrich（1973）により得られたが，その導出過程は複雑である．Ogasawara（1998b）は同じ制約をラグランジュの未定乗数法を用いて簡単に求めているので，その要点を記す．

回転前の直交因子の負荷行列を $\Lambda(p\times k)$ とすると回転後の結果は

$$B=\Lambda T'^{-1},\ \Phi=T'T,\ \mathrm{Diag}(\Phi)=I_k \qquad (2)$$

である．ここで B, Φ は回転後斜交因子の負荷行列と相関行列である．I_k は k 次の単位行列であり，$\mathrm{Diag}(\cdot)$ は( )内の行列の非対角要素を 0 とすることを表す．回転後の B の推定値は B の何らかの関数である $u(B)$ を最適化するものである．回転行列 T に制約があるのでラグランジュの未定乗数を対角要素とする対角行列 $L(k\times k)$ を導入すると B の推定値は次の f を極値化するものとして得られる．

$$f=u(B)+\frac{1}{2}\mathrm{tr}\{(T'T-I_k)L\} \qquad (3)$$

ここで f の T に関する微分をとると

$$\begin{aligned} df&=\mathrm{tr}\left(\frac{\partial u}{\partial B'}dB\right)+\mathrm{tr}(LT'dT)\\ &=\mathrm{tr}\left\{\left(-T^{-1}\Lambda'\frac{\partial u}{\partial B}T^{-1}+LT'\right)dT\right\} \end{aligned} \qquad (4)$$

となる．$\partial f/\partial T=O$ より，

$$T^{-1}\Lambda'\frac{\partial u}{\partial B}T^{-1}=LT' \qquad (5)$$

が得られる．右より $T(T'T)^{-1}$ をかけると

$$B'\frac{\partial u}{\partial B}\Phi^{-1}=L \qquad (6)$$

である．すなわち，左辺の k^2-k 個の非対角要素を 0 とおいた式が B と Φ に関する制約となる．B と Φ の漸近標準誤差は最尤解においては制約付推定量の標準誤差を求める一般的な方法である拡大された情報行列を用いる方法から得られる（Silvey, 1975 参照）．

規準化直接オブリミン解の標準誤差

素直接オブリミン基準は $\beta_{ij}=(B)_{ij}$ とすると

$$u_0=\frac{1}{4}\sum_{u>v}\left\{\sum_{i=1}^{p}\beta_{iu}^2\beta_{iv}^2-\frac{\gamma}{p}\left(\sum_{i=1}^{p}\beta_{iu}^2\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\beta_{iv}^2\right)\right\} \qquad (7)$$

である．ここで，γ は多くの場合 0—1 の値が用いられる，オブリミン・ウェイトである．規準化（以下 "Kaiser の" を略す）オブリミン法の最適化基準は

$$\begin{aligned} u&=\frac{1}{4}\sum_{u>v}\left\{\sum_{i=1}^{p}\frac{\beta_{iu}^2\beta_{iv}^2}{c_i^2}-\frac{\gamma}{p}\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\beta_{iu}^2}{c_i}\right)\left(\sum_{i=1}^{p}\frac{\beta_{iv}^2}{c_i}\right)\right\}\\ c_i&=(B\Phi B')_{ii} \end{aligned} \qquad (8)$$

である．式(6)の左辺 (r, s) 要素を g_{rs} とし，c_i は β_{uv} にかかわらず一定であることに注意すると

$$g_{rs}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k}\sum_{v\neq j}\left(\frac{\beta_{iv}^2}{c_i}-\frac{\gamma}{p}\sum_{m=1}^{p}\frac{\beta_{mv}^2}{c_m}\right)\frac{\beta_{ij}\beta_{ir}}{c_i}\phi^{sj} \qquad (9)$$
$$(r\neq s)$$

となる．ここで $\phi^{sj}=(\Phi^{-1})_{sj}$ であり，また $\phi_{sj}=(\Phi)_{sj}$ とする．式(9)を k^2-k 個の要素をもつベクトルに並べたものを $\underline{g}$ とすると $\underline{g}=\underline{0}$ が制約式となる．

以上の制約式は共分散行列のモデルと相関行列のモデルのいずれにもあてはまるものであるが，母共分散行列の構造モデルは各モデルの順に次のようになる．

$$\begin{aligned} \Sigma&=B\Phi B'+\Psi,\\ \Sigma&=D(B\Phi B'+\mathrm{Diag}(I_p-B\Phi B'))D \end{aligned} \qquad (10)$$

ここで Ψ は独自性を対角要素とする対角行列，D は観測変数の母標準偏差を対角要素とする対角行列である．式(9)の各モデル別にパラメータを並べたベクトルを $\underline{\theta}$ として一般的に表すと，拡大された情報行列 I の逆行列は

$$I^{-1}=\begin{bmatrix} I(\underline{\theta}), & \dfrac{\partial \underline{g}'}{\partial \underline{\theta}} \\ \dfrac{\partial \underline{g}}{\partial \underline{\theta}'}, & O \end{bmatrix}^{-1}=\begin{bmatrix} I^*(\underline{\theta}), & \# \\ \#, & \# \end{bmatrix} \qquad (11)$$

とかける．$I(\underline{\theta})$ は $\underline{\theta}$ に関する情報行列で共分散行列モデルではよく知られている．相関行列の場合は Ogasawara（1998b）に示されている．$I^*(\underline{\theta})$ は I^{-1} において $\underline{\theta}$ に対応する部分行列で，#はそこに適当な値が入ることを表す．$\underline{\theta}$ の最尤推定量の漸近共分散行列は $I^*(\underline{\theta})$ であり，これに $\underline{\theta}$ の推定値を代入するとその推定値が得られる．$\partial\underline{g}'/\partial\underline{\theta}$ の具体的な形は付録にある．

因子寄与の標準誤差

斜交回転後の因子寄与は直交回転の場合と異なりさまざまに定義される．たとえば Harman（1976）では各因子ごとの因子負荷の 2 乗和（直接寄与）や異なる因子間の 2×共分散の和（結合寄与）を定義し，柳井・繁桝・前川・市川（1990）では $B\Phi$ の i 列の 2 乗和（他の因子を無視した寄与；以下 c_{ni}）や i 因子と規準化された反イメージの共分散の 2 乗和（i 因子以外の因子の影響を除いた寄与；以下 c_{ei}）を挙げている．これらの標準誤差は Ogasawara（1998b）が素直接オブリミン解について求めているが，規準化直接オブリミン解の場合も同様の方法が利用できる．

すなわち，ある因子に関する各種の寄与を一般的に c_* で表すと，c_* は B と Φ のある関数であるが，デルタ法により，

$$I^*(c_*)=\frac{\partial c_*}{\partial \underline{\theta}'}I^*(\underline{\theta})\frac{\partial c_*}{\partial \underline{\theta}} \qquad (12)$$

と表され，これが c_* の漸近分散となる．$\partial c_*/\partial\underline{\theta}$ はたとえば上記の c_{ni} と c_{ei} の場合

Table 1
Rotated results by direct oblimin method ($\gamma=0$)

	Variable No.	Raw oblimin Loadings I	II	III	Normal oblimin Loadings I	II	III	Comm-unality
Data A	3	.62	.16		.61	.17		.53
	6	−.03	.83		−.06	.84		.65
	ϕ_{21}	.61			.62			
SS of structures		2.13	2.20		2.12	2.23		
Anti-image cont.		.90	.97		.87	.98		
Twelve psycho. tests	4	−.11	.72	.07	−.10	.71	.07	.48
	8	.79	.04	.04	.79	.05	.04	.71
	12	−.01	−.01	.54	−.03	−.02	.55	.28
	ϕ_{21}, ϕ_{31}, ϕ_{32}	.53	.58	.40	.52	.61	.43	
SS of structures		4.05	3.66	2.79	4.04	3.64	2.93	
Anti-image cont.		1.40	1.73	.70	1.38	1.72	.70	

$$c_{ni}=\sum_{j=1}^{p}\left(\sum_{u=1}^{k}\beta_{ju}\phi_{ui}\right)^2,\quad c_{ei}=\sum_{j=1}^{p}\beta_{ji}^2/\phi^{ii} \qquad (13)$$

より容易に得られる．Ogasawara (1998b) にはこれらを含む4種の寄与について $\partial c_*/\partial\underline{\theta}$ が示されている．

数値例による考察

以上は規準化オブリミン解におけるパラメータの最尤推定量の漸近分散の理論的な結果である．数値例の前半ではその適切性を確かめるためにシミュレーションの結果を示す．ところで，オブリミン法では Jennrich & Sampson (1966) が指摘しているように $\gamma=0$ のクォーティミン法で単純構造が得られるのに $\gamma=0$ 以外では（バイクォーティミン法，コバリミン法など）では単純構造にならないことがある．著者も実際にこれを経験している．さらに，直接オブリミン法では $\gamma=0$ 以外では解の収束が得られないことも珍しくない．そこで，実際場面で有用性の高いと考えられる $\gamma=0$ の直接クォーティミン法についてのみ検討する．

シミュレーションのためのデータは二つであり，第一のもの（以下データA）は次の人工的な直交因子の負荷行列 Λ を回転前の構造として設定している．また，観測変数の母分散はすべて1とした．

$$\Lambda'=\begin{bmatrix} .7 & .7 & .7 & .4 & .4 & .4 \\ .0 & .1 & .2 & .5 & .6 & .7 \end{bmatrix}$$

第二のデータは Harman (1976, p. 401) の12の心理テストの相関行列($N=355$)である．各データにそれぞれ2因子または3因子を仮定し，規準化直接オブリミン解を求めたもの（一部）が Table 1 に示されている．12の心理テストデータでは回転前の解は最尤解である．規準化の有無による因子パターンと寄与の相違は，共通性にかなり異なるものが含まれているにもかかわらず（特に12の心理テストデータ）わずかである．

Table 2, 3の N の見出しに対応する数値は共分散および相関行列の各モデルの素および規準化オブリミン解($\gamma=0$)に関する代表的なパラメータと寄与の理論的な標準誤差である．見出しのSの数値はシミュレーションによる結果であるが，これは次のようにして求めた．すなわち，二つのデータの各因子分析結果から再構成した相関行列を母共分散行列とみなして，被験者数（データAでは300を仮定）に等しい標本を多変量正規分布を仮定して無作為に発生させる．次にこの標本からひとつのオブリミン解を求める．この手続きを1 000回繰り返し，1 000回の推定値から求めた標準偏差をシミュレーションによる標準誤差とする．Table 2, 3の規準化オブリミン解のNとSの標準誤差を比べると両者はかなり接近していて，理論的な値の正しさが示唆されている．

しかし，あわせて示されている素オブリミン解の結果をみると，もともと規準化の有無による因子パターンの相違が小さいことに対応して，規準化オブリミン解の標準誤差との相違がわかりにくい．そこで次のような単純な指標の結果を示す．素および規準化オブリミン解の理論的な標準誤差をそれぞれ Nr, Nn とし，同じくシミュレーションによるものを Sr, Sn とする．表のH (hit) は($Nr>Nn$ かつ $Sr>Sn$) または ($Nr<Nn$ かつ $Sr<Sn$) を表し，F (fail) は ($Nr>Nn$ かつ $Sr<Sn$) または ($Nr<Nn$ かつ $Sr>Sn$) を表し，−は等号を含む場合とする．この結果，表ではデータAの場合は表にない負荷の部分に共分散および相関行列の各モデルにひとつずつFがあるほかはすべてHである．12の心理テストのデータでも表にない部分では共分散および相関行列の各モデルの負荷にひとつずつ−があるほかはすべてHで，Fは表の寄与の部分に二つあるだけである．これらのデータは

Table 2
Standard errers for artificial data A (direct oblimin, $\gamma=0$)

	Variable No.	Covariance model					Correlation model				
		Raw		Normal			Raw		Normal		
		N	S	N	S	H/F	N	S	N	S	H/F
Factor I	3	.0905	.0895	.0863	.0864	H	.0821	.0831	.0792	.0808	H
Loadings	6	.0356	.0455	.0555	.0573	H	.0353	.0453	.0555	.0572	H
Factor II	3	.0860	.0866	.0825	.0836	H	.0856	.0860	.0820	.0827	H
Loadings	6	.0730	.0776	.0837	.0850	H	.0591	.0648	.0709	.0729	H
	ϕ_{21}	.0661	.0614	.0579	.0531	H	.0651	.0605	.0579	.0531	H
SS of	I	.2505	.2417	.2449	.2365	H	.1772	.1750	.1727	.1686	H
Structures	II	.2440	.2388	.2405	.2341	H	.1629	.1611	.1567	.1541	H
Anti-image	I	.1389	.1339	.1285	.1229	H	.1220	.1195	.1124	.1094	H
contribution	II	.1578	.1588	.1506	.1478	H	.1405	.1402	.1328	.1292	H

Note: N=normal theory, S=simulation, H/F=hit or fail.

Table 3
Standard errors for twelve-psychological-test data (direct oblimin, $\gamma=0$)

	Variable No.	Covariance model					Correlation model				
		Raw		Normal			Raw		Normal		
		N	S	N	S	H/F	N	S	N	S	H/F
Factor I	4	.0517	.0491	.0447	.0438	H	.0516	.0491	.0445	.0435	H
Loadings	8	.0605	.0579	.0607	.0589	H	.0464	.0452	.0482	.0489	H
	12	.0700	.0731	.0445	.0544	H	.0698	.0725	.0444	.0543	H
Factor II	4	.0566	.0590	.0565	.0589	H	.0422	.0430	.0418	.0428	H
Loadings	8	.0369	.0362	.0384	.0383	H	.0367	.0362	.0384	.0382	H
	12	.0553	.0530	.0366	.0375	H	.0551	.0531	.0366	.0375	H
Factor III	4	.0598	.0591	.0556	.0568	H	.0598	.0592	.0555	.0566	H
Loadings	8	.0506	.0503	.0541	.0567	H	.0501	.0499	.0541	.0565	H
	12	.0876	.0937	.0796	.0898	H	.0815	.0871	.0727	.0825	H
	ϕ_{21}	.0458	.0454	.0478	.0476	H	.0450	.0447	.0478	.0476	H
	ϕ_{31}	.0670	.0651	.0609	.0554	H	.0657	.0626	.0609	.0554	H
	ϕ_{32}	.0680	.0686	.0639	.0634	H	.0667	.0666	.0639	.0634	H
SS of	I	.3787	.3800	.3759	.3755	H	.2356	.2368	.2357	.2378	H
Structures	II	.3614	.3615	.3609	.3591	H	.2384	.2400	.2420	.2426	H
	III	.4377	.4326	.4334	.4191	H	.3760	.3736	.3771	.3633	F
Anti-image	I	.1870	.1924	.1913	.1860	F	.1675	.1668	.1763	.1676	H
contribution	II	.1676	.1700	.1661	.1685	H	.1269	.1286	.1264	.1286	—
	III	.1100	.1094	.1081	.1060	H	.1001	.0977	.0988	.0948	H

Note: N=normal theory, S=simulation, H/F=hit or fail.

Table 1からわかるように，規準化の有無によって因子パターンは大きくは変化していない．しかし，Table 2のNo. 6の変量やTable 3の因子I，IIのNo. 12の変量の負荷は規準化の有無によって理論値とシミュレーション値のいずれもかなり変化していることがわかる．これらの結果は規準化オブリミン解の標準誤差の理論的な推定値の適切性を示している．

次に規準化の有無が標準誤差に著しく影響する人工的な例を相関行列モデルについて理論値により示す．Table 4は二つのデータ（データBとC）の結果である．これらは斜交回転前の直交因子の負荷行列をデータBでは

$$\Lambda'=\begin{bmatrix} .80 & .80 & .10 & .40 & .30 & .01 \\ .40 & .30 & .01 & .80 & .80 & .10 \end{bmatrix}$$

データCでは

$$\Lambda'=\begin{bmatrix} .800 & .100 & .100 & .400 & .099 & .099 \\ .400 & .099 & .099 & .800 & .100 & .100 \end{bmatrix}$$

としたもので，標準誤差の算出には $N=300$ を仮定した．

データBは小さな共通性の変量を含む例であるが，規準化オブリミン解では小さな共通性の負荷の標準誤差が素オブリミン解のものより相対的に小さくなって

Table 4
Results for artificial data B and C (correlation model, $\gamma=0$)

	Variable No.	Raw oblimin Loadings I(SE)	Raw oblimin Loadings II(SE)	Normal oblimin Loadings I(SE)	Normal oblimin Loadings II(SE)	Comm-unality
Data B	1	.84(.30)	.08(.26)	.77(.28)	.22(.39)	.80
	2	.89(.19)	−.05(.10)	.80(.26)	.11(.39)	.73
	3	.13(.10)	−.04(.10)	.11(.07)	−.02(.03)	.01
	4	.08(.26)	.84(.30)	.22(.39)	.77(.28)	.80
	5	−.05(.10)	.89(.19)	.11(.39)	.80(.26)	.73
	6	−.04(.10)	.13(.10)	−.02(.03)	.11(.07)	.01
	ϕ_{21}	.72(.06)		.46(.47)		
SS of structures		2.35(.15)	2.35(.15)	2.06(.82)	2.06(.82)	
Anti-image cont.		.73(.14)	.73(.14)	1.02(.82)	1.02(.82)	
Data C	1	.89(54.)	−.00(.19)	.85(179.)	−.28(210.)	.80
	2	.08(40.)	.07(40.)	.14(.60)	−.00(6.3)	.02
	3	.08(40.)	.07(40.)	.14(.60)	−.00(6.3)	.02
	4	−.00(.19)	.89(54.)	.85(179.)	.28(210.)	.80
	5	.07(40.)	.08(40.)	.14(.60)	.00(6.3)	.02
	6	.07(40.)	.08(40.)	.14(.60)	.00(6.3)	.02
	ϕ_{21}	.80(1.70)		.00(589.)		
SS of structures		1.38(26.)	1.38(26.)	1.52(1.61)	.16(1.70)	
Anti-image cont.		.30(26.)	.30(26.)	1.52(1.61)	.16(1.70)	

Note: SE=standard error.

いるのがわかる．(Table 3 の No. 12 の変量の負荷も規準化によって標準誤差が小さくなっているが，この変量の共通性 .28 は 12 の変量の中で最小である．) また，規準化オブリミン解では因子間相関の標準誤差が著しく大きくなっている．

データ C は単純でないパターンをもち，共通性の小さい変量を含む場合であるが，きわめて大きな標準誤差が得られている．また，データ B で指摘した傾向がここでも指摘できる．なお，規準化オブリミン解では二つの因子は素オブリミン解のように対称にはなっていない．

データ B と C は特殊な人工例であるが，これらから共通性が小さい変量が多数含まれる場合に規準化を行うと共通性の相対的に大であるものの推定値のばらつきが大となりやすいことが示唆されている．これは実際の因子分析の適用に際しても留意すべきことであろう．すなわち，規準化をしない方法でも分析を行うことや共通性が小さい変量が含まれている場合には，その変量を除いて結果を比較することなどが望ましいといえる．

引用文献

Archer, C. O., & Jennrich, R. I. 1973 Standard errors for rotated factor loadings. *Psychometrika*, **38**, 581-592.

Clarkson, D. B., & Jennrich, R. I. 1988 Quartic rotation criteria and algorithms. *Psychometrika*, **53**, 251-259.

Dixon, W. J. (Ed.) 1992 *BMDP statistical software manual*. Vol. 1. Los Angels: University of California Press.

Harman, H. H. 1976 *Modern factor analysis*. 3rd ed. Chicago: University of Chicago Press.

Jennrich, R. I. 1973 Standard errors for obliquely rotated factors. *Psychometrika*. **38**, 593-604.

Jennrich, R. I. 1974 Simplified formulae for standard errors in maximum likelihood factor analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **27**, 122-131.

Jennrich, R. I., & Sampson, P. F. 1966 Rotation for simple loadings. *Psychometrika*, **31**, 313-323.

小笠原春彦 1996 規準化オーソマックス法における因子負荷の標準誤差 行動計量学, **23**, 122-129.

Ogasawara, H. 1998a Standard errors for rotation matrices with an application to the promax solution. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **51**, 163-178.

Ogasawara, H. 1998b Standard errors of several indices for unrotated and rotated factors. *Economic Review* (*Otaru University of Commerce*), **49** (1), 21-69.

Ogasawara, H. 1999 Standard errors for procrustes solutions. *Japanese Psychological Research*, **41**, 121-130.

SAS Institute Inc. 1990 *SAS/STAT user's guide*. Vol. 1. Version 6, 4th ed. Cary, NC: Author.

Silvey, S. D. 1975 *Statistical inference*. New York: Chapman and Hall.

SPSS Inc. 1990 *SPSS reference guide*. Chicago: Author.

柳井晴夫・繁桝算男・前川眞一・市川雅教 1990 因子分析——その理論と方法—— 朝倉書店

——1997. 2. 14 受稿, 1999. 2. 27 受理——

付　録

制約式のパラメータに関する偏微分

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial \beta_{ij}}=\sum_{v\neq j}\frac{\beta_{ij}\beta_{iv}\beta_{ir}}{c_i^2}\phi^{sv}-\frac{\gamma}{p}\frac{\beta_{ij}}{c_i}\sum_{a=1}^{p}\sum_{v\neq j}\frac{\beta_{av}\beta_{ar}}{c_a}\phi^{sv}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{v\neq j}\left(\frac{\beta_{iv}^2}{c_i}-\frac{\gamma}{p}\sum_{m=1}^{p}\frac{\beta_{mv}^2}{c_m}\right)\frac{\beta_{ir}}{c_i}\phi^{sj}$$
$$+\frac{\delta_{rj}}{2}\sum_{u=1}^{k}\sum_{v\neq u}\left(\frac{\beta_{iv}^2}{c_i}-\frac{\gamma}{p}\sum_{m=1}^{p}\frac{\beta_{mv}^2}{c_m}\right)\frac{\beta_{iu}}{c_i}\phi^{su}$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{u=1}^{k}\sum_{v\neq u}\left\{\sum_{a=1}^{p}\frac{\gamma}{p}\frac{\beta_{iv}^2\beta_{au}\beta_{ar}}{c_i^2c_a}\phi^{su}\right.$$
$$\left.-\left(\frac{2\beta_{iv}^2}{c_i}-\frac{\gamma}{p}\sum_{m=1}^{p}\frac{\beta_{mv}^2}{c_m}\right)\frac{\beta_{iu}\beta_{ir}}{c_i^2}\phi^{su}\right\}\frac{\partial c_i}{\partial \beta_{ij}}$$
$$(r\neq s)$$

ただし，$\frac{\partial c_i}{\partial \beta_{ij}}=2\sum_{u=1}^{k}\beta_{iu}\phi_{uj}$，$\delta_{ij}$ はクロネッカーのデルタである．

$$\frac{\partial g_{rs}}{\partial \phi_{ef}}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{k}\sum_{v\neq j}\left\{-\left(\frac{\beta_{iv}^2}{c_i}-\frac{\gamma}{p}\sum_{m=1}^{p}\frac{\beta_{mv}^2}{c_m}\right)\frac{\beta_{ij}\beta_{ir}}{c_i}\right.$$
$$\cdot(\phi^{se}\phi^{jf}+\phi^{sf}\phi^{je})$$
$$+\left(-\frac{\beta_{iv}^2}{c_i^2}\frac{\partial c_i}{\partial \phi_{ef}}+\frac{\gamma}{p}\sum_{m=1}^{p}\frac{\beta_{mv}^2}{c_m^2}\frac{\partial c_m}{\partial \phi_{ef}}\right)\frac{\beta_{ij}\beta_{ir}}{c_i}\phi^{sj}$$
$$\left.-\left(\frac{\beta_{iv}^2}{c_i}-\frac{\gamma}{p}\sum_{m=1}^{p}\frac{\beta_{mv}^2}{c_m}\right)\frac{\beta_{ij}\beta_{ir}}{c_i^2}\frac{\partial c_i}{\partial \phi_{ef}}\phi^{sj}\right\}$$
$$(r\neq s;\ e>f)$$

ただし，$\frac{\partial c_i}{\partial \phi_{ef}}=2\beta_{ie}\beta_{if}$ である．