

刺激—反応データにおける順序 カテゴリー間隔比例モデル

小 笠 原 春 彦*

PROPORTIONAL INTERVAL MODEL OF ORDERED CATEGORIES FOR
THE STIMULUS—RESPONSE DATA

Haruhiko OGASAWARA

In this paper, we propose an individual-difference model based on the models by Samejima (1969) and Andrich (1978a), that can be effectively used in the analysis of ordered categorical responses. In this model each individual has his own values of the thresholds of categories with proportional intervals.

The method of maximum likelihood estimation for the parameters in the model, using Fisher's scoring method, is presented. The advantage of the model is that it is possible to estimate the thresholds' parameters even when an individual has no responses for some categories. Finally, an example is presented, in which the model provides productive findings.

1. はじめに

3つ以上の反応カテゴリーが順序づけられており、反応が刺激の量に対応して変動する現象を記述する確率モデルは、当初生物測定・疫学関係で開発された。Aitchson & Silvey (1957) 及び Ashford (1959) は、プロビットモデルの最尤解を導き、Gurland et al. (1960) はロジットモデルを含めて、ノーミット及びロジット最小 x^2 解を得た。

心理学における項目反応理論 (IRT: Item Response Theory) においては、正答誤答の2値反応を扱う場合が圧倒的に多いが (Lord & Novick, 1968; Lord, 1980), 多肢選択項目において選択肢が順序づけられている場合のモデルが、Samejima (1969) によりまず開発された。

これは今日では、Aitchson & Silvey (1957) のモデルの再発見と位置づけられることがあるが、Aitchson & Silvey (1957) では刺激の量が観察されるものであるのに対し、Samejima (1969) ではこれに対応するも

のは、個人の能力を表す潜在的な変量あるいは推定すべき未知のパラメータである点異なる。

また、心理学における順序づけられた評定尺度のモデルとして、上記のものとは異なるモデルが Andrich (1978a, b) により、さらに、その特殊なケースが、Matsers (1982) により提案された。Andrich のものは、疫学関係において、順序カテゴリーを持つ分割表のモデルとしての適用もなされている (Andrich, 1979)。

反応カテゴリーが順序づけられていない名義尺度のモデルでは Mantel (1966) のものがあり、心理学への適用は Baker & Gurland (1968) がある。後者では、生物測定における用量に対応するものが、個人が所属するグループをあらわす観察される量 (教育レベル等) として設定されている。さらに、個人の能力が未知のパラメータであるモデルが Bock (1972) により提案され、順序づけられたカテゴリーのモデルとあわせてコンピュータプログラムも整備されている (Kolakowski & Bock, 1973)。

なお、反応カテゴリーが順序を構成する場合と名義尺度の場合では、まったく別のモデルのように見えるが中間的な場合をも考慮する統一的なモデルの解釈の試みが、IRT の文脈の中でなされている (Thissen &

* 鉄道総合技術研究所 (Railway Technical Research Institute)

Steinberg, 1986).

さて、IRTにおいては個人差(能力差)は、Finney (1944)が早くから指摘するように生物測定における用量-反応関係で形式上、用量に対応するパラメータとして表現される。一方、精神物理学的な刺激-反応関係では、個人毎に刺激の量をかえて繰り返し測定を行うことにより、IRTにおける項目パラメータ(弁別力と困難度)に相当するものが個人ごとに得られる。すなわち、弁別力に相当するものは、刺激量の変化に対する、反応カテゴリーへの反応確率の変化の程度をあらわし、困難度に相当するものは、平均的な反応カテゴリーの水準を表現する。生物測定においては先の Gurland et al. (1960)は、個人差を一般的に条件差ととらえて、実験群と対照群の反応関数の相違が、ロジットまたはプロビットにおいて差のパラメータであらわされる一般化平行線分析モデル(Generalized parallel line assay model)を提案した。

さて、順序カテゴリーの数を M 個とし、個人(一般的には集団や条件) i ($i=1, \dots, N$) がカテゴリー k 以下の反応をする確率 \bar{P}_{ik} を

$$\bar{P}_{ik} = F(\tau_k, \mu_i) \quad (1)$$

であらわす。ここで τ_k は、カテゴリー k と $k+1$ の境界をあらわすパラメータであり、 μ_i は個人 i の位置をあらわすパラメータである。また F には正規分布関数、ロジスティック分布関数、正弦反応関数(西里 1975)等の対称な分布関数が採用されることが多いが、非対称な分布関数を用いた一般的なモデルも提案されている(Prentice, 1976; Goto et al., 1986; 後藤他, 1987)。一方、個人差をあらわすベクトル $\mu = (\mu_1, \dots, \mu_N)$ が構造化されたモデルとして、Bock (1975) は、 $\mu = K\theta$ というモデルを開発した。これは、Gurland et al. (1960) をさらに一般化したものに相当し、 K はデザイン行列であり、 θ は個人の特徴を表すパラメータのベクトルである。

また、特定の個人を問題にするのではなく、反応の全変動における個人差の変動の割合を問題にする、いわば変量模型の一例として、Andersen & Aitkin (1985)のモデルがある。その論文では社会調査におけるインタビューアーの回答への影響が評価されている。一方、精神物理学的な状況では、個人差以外に刺激の量が各カテゴリーへの反応確率を決定する要因として存在する。ここではこのような状態で、順序カテゴリー反応におけるより一般的な個人差モデルを提案

する。なお2値反応においては、共分散構造分析における LISREL モデルを援用した、一般化された構造モデルが Muthén (1979) により開発されている。

2. 個人差モデル

刺激の量を x であらわし、反応関数における x の係数を β とする。以下、 F はロジスティック分布関数の場合を考察する。Andrich (1978a) のモデルは、ロジスティック分布関数を用いたモデルであるが、カテゴリー k 以下の確率を考える Samejima (1969) のモデルとは異なり、隣合うカテゴリー間の反応確率の比を問題にする。すなわち、これは(1)式のかわりに

$$P_{ik}^* = P_{i,k+1} / (P_{i,k} + P_{i,k+1}) \quad (2)$$

がロジスティック関数であらわされるとするものである。ここで P_{ik} は個人 i のカテゴリー k への反応確率である。

以下では、 \bar{P}_{ik} を用いたモデルを Samejima 型モデル、 P_{ik}^* を用いたモデルを Andrich 型モデルとよび区別する。両者のモデルは異なる観点から順序カテゴリーへの反応確率の構造化を行っている。しかし、(1)式の τ_k がカテゴリー k と $k+1$ の境界値を表すパラメータであること、 μ_i が個人 i の位置を表すパラメータであることは共通である。

さて、個人差を考慮した順序カテゴリー反応のモデルで最もパラメータの多いモデルは、個人ごとに τ_k を設定するものである。すなわち、Samejima 型モデルでは、

$$\bar{P}_{ik} = 1 / (1 + \exp(\tau_{ki} - \beta_i x)) \quad (3)$$

である。ここで、 τ_{ki} は個人 i におけるカテゴリー k と $k+1$ の境界を表すパラメータであり、 β_i は個人 i における x の係数(弁別力)である。Andrich 型モデルでは

$$P_{ik}^* = \exp(\tau_{ki} - \beta_i x) / (1 + \exp(\tau_{ki} - \beta_i x)) \quad (4)$$

である。Samejima 型モデルでカテゴリー k 以下と $k+1$ 以上のカテゴリーをそれぞれ Andrich 型モデルにおける隣接するふたつのカテゴリー k' 、 $k'+1$ とみなし、その反応確率の比を求めると $P_{i,k+1} / P_{ik} = (1 - \bar{P}_{ik}) / \bar{P}_{ik} = P_{ik}^* / (1 - P_{ik}^*) = \exp(\tau_{k-i} - \beta_i x)$ であることがわかる。すなわち、両モデルの本質的な相違は、カテゴリー k 以下と $k+1$ 以上の確率の比を問題にするのか(Samejima 型)、カテゴリー k と $k+1$ だけの

確率の比を問題にするのか (Andrich 型) にあり、それらのパラメータによる表現は同一である。

このことは、以下に説明する各モデルについて成立するので、繰り返しを避けるために、以下では Samejima 型の表現のみを示す。(3)式または(4)式においては、ふたつの型のモデルとも、独立なパラメータは τ_{ki} ($k=1, \dots, M-1; i=1, \dots, N$), β_i ($i=1, \dots, N$) で NM 個である。このモデルを個別モデルとよぶ。

各個人の反応が共通な順序カテゴリーにもとづいているとするならば、個人間で共通なパラメータを想定することが可能である。そこで、新しい個人差モデルとして、

$$\tilde{P}_{ik} = 1 / (1 + \exp(\alpha_i \tau_k + \gamma_i - \beta_i x)) \quad (5)$$

を提案する。ここで、モデルの一意性を得るために、 $\alpha_N = 1, \gamma_N = 0$ とする。すなわち、独立なパラメータは、 τ_k ($k=1, \dots, M-1$), β_i ($i=1, \dots, N$), γ_i ($i=1, \dots, N-1$), α_i ($i=1, \dots, N-1$) で、 $M+3N-3$ 個である。

さて、(5)式において、 \tilde{P}_{ik} がある一定値 P_0 をとる時のロジットを L_0 とあらわし、これに対応する $M-1$ 個の x の値を $x_{i1}, \dots, x_{i, M-1}$ とすると

$$x_{ik} = (L_0 + \alpha_i \tau_k + \gamma_i) / \beta_i \quad (6)$$

となる。ここで $x_{ik} - x_{i, k-1}$, すなわち、ロジットが L_0 のレベルの反応確率において、隣接するカテゴリー境界値間の差を x の単位で求めると、

$$x_{ik} - x_{i, k-1} = (\tau_k - \tau_{k-1}) \alpha_i / \beta_i \quad (7)$$

となる。

(7)式と k' についての(7)式の値との比を求めると

$$\frac{x_{ik'} - x_{i, k'-1}}{x_{ik} - x_{i, k-1}} = \frac{\tau_{k'} - \tau_{k'-1}}{\tau_k - \tau_{k-1}} \quad (8)$$

となり、個人 i に依存しない値とする。すなわち、(5)式のモデルは、個人にとって意味するカテゴリー間の間隔は、個人ごとに異なるが、間隔間の比は一定であるとするモデルである。ここでは、これを順序カテゴリー間隔比例モデルとよぶ。(7)式において α_i / β_i を改めて α_i と置いてもモデルは等価であるので、この置きかえを行うと、 α_i は個人 i にとって意味するカテゴリー境界値のばらつき指標ととらえることができる。

Andrich (1982) は(7)式の特種なケースとして $\tau_{k-1} - \tau_k = \text{一定} > 0$ ($k=2, \dots, M-1$) のモデルを提案して

いる。そこでは、 α_i をカテゴリーの境界値のばらつきの指標として解釈している。一般に $\alpha_i > 0$ であるが $\alpha_i = 0$ のときは、 $P_{ik}^* = P_{i, k-1}^* = 1 / (1 + \exp(\gamma_i - \beta_i))$ ($k=2, \dots, M-1$) で個人 i における各カテゴリーへの反応確率は等しく、 $\alpha_i < 0$ では順序カテゴリーへの反応確率の分布は U 字型である。すなわち、 α_i は値が大である程、カテゴリーの境界値のばらつきが小さく、値が小さいほどばらつきが大きいことを意味する。

順序カテゴリー反応においては、各カテゴリーへの反応確率は単一の極大値を持つ分布が通常であり、 $\alpha_i > 0$ であることが多いが、中央のカテゴリーへの反応が少なく両端の反応 (中央のカテゴリーからの隔たりが等しいという類似点を持つ) が多いということもあり得る。これは、Andrich (1982) も指摘するように Guttman 尺度 (Guttman, 1954) の第 2 番目の成分である強度 (Intensity) の値が大きい場合に相当する。

さて、Andrich (1982) は、Rasch モデル (Rasch, 1980) の発展として、IRT における個人や項目のパラメータに関して互いに他のパラメータを含まない十分統計量が存在するという Rasch モデルの特質 (Rasch, 1961; Andersen, 1977) の枠組みの中でモデルを扱っているために $\tau_1, \dots, \tau_{M-1}$ は与えられたものであった。しかし、通常はカテゴリー間の境界値は等間隔ではなく、(5)式のモデルの方が一般的である。また、順序カテゴリー間隔比例モデルは、Andrich 型のモデルのみでなく、Samejima 型のモデルでも同様の意味づけを持たせて適用できる。ただし、Samejima 型モデルでは、 i にかかわらず α_i の符号は同一であり $\alpha_i > 0$ ($\alpha_i < 0$) のときは、刺激の量の増加とともに小さな値のコードのカテゴリーへの反応が多くなるとすると、 $\tau_1, \dots, \tau_{M-1}$ は減少 (増加) 数列であることが必要である。

ところで、カテゴリーの数が 3 の時は、順序カテゴリー間隔比例モデルは個別モデルと等価になる。実際 (8)式は $k=k'$ の時のみ計算可能であり、 τ_1 と τ_2 は任意の異なる 2 つの値であればよい。この時

$$\begin{aligned} \alpha_i \tau_1 + \gamma_i &= \tau_{1i} \\ \alpha_i \tau_2 + \gamma_i &= \tau_{2i} \end{aligned} \quad (9)$$

であり、 (α_i, γ_i) と (τ_{1i}, τ_{2i}) のパラメータの組は個人 i ごとに交換可能である。

また、カテゴリー間隔比例モデルと個別モデルの独立なパラメータの数の差は $(N-1)(M-3)$ であり、 N と M の増加に従い、急増する。

次に順序カテゴリー間隔比例モデルの特殊ケースとして α_i = 一定 ($i=1, \dots, N$) のモデルを考える。(5)式は $\bar{P}_{ik} = 1/(1 + \exp(\tau_k + \gamma_i - \beta_i x))$ となる。ここで、モデルの一意性のために $\gamma_N = 0$ とすると独立なパラメータは τ_k ($k=1, \dots, M-1$), β_i ($i=1, \dots, N$), γ_i ($i=1, \dots, N-1$) で、 $M+2N-2$ 個である。このモデルを、個人ごとにロジットの x に関する勾配が異なることから個人勾配モデルとよぶ。

個人勾配モデルでも (8) 式は成立するが、(7) 式は

$$x_{ik} - x_{i,k-1} = (\tau_k - \tau_{k-1})/\beta_i \quad (10)$$

となり、弁別力のパラメータの逆数に比例している。(10) 式は個人 i におけるカテゴリー境界値のばらつき指標のひとつと考えることができるが、これが、弁別力の関数であることの積極的な理由はない。そこで、(5) 式のモデルに限って、順序カテゴリー間隔比例モデルと呼ぶ。

次に、個人勾配モデルの特殊モデルに相当し、個人差を表すパラメータを含む最も簡単なモデルは、前述の平行線分析のモデルであり、 $\bar{P}_{ik} = 1/(1 + \exp(\tau_k + \gamma_i - \beta_i x))$ である。ここで、モデルの一意性のために $\gamma_N = 0$ とおくと独立なパラメータは τ_k ($k=1, \dots, M-1$), β_i , γ_i ($i=1, \dots, N-1$) で、 $M+N-1$ 個である。平行線分析モデルの特徴は、モデルの名前が示すようにどの個人においてもロジットについてみると x に関する変化率が一定、すなわち、刺激の量に関する弁別力が一定という強い制約があることである。

最後に、個人差モデルとの比較のためのモデルとして個人差無視モデルを $\bar{P}_{ik} = 1/(1 + \exp(\tau_k - \beta_i x))$ と表す。独立なパラメータは τ_k ($k=1, \dots, M-1$), β_i で M 個である。

3. パラメータの推定とモデルの評価

物理量が特定の値のみをとるグループ化されたデータでは、パラメータの最小 x^2 推定が可能である。ただし、前節のモデルのうち、カテゴリー間隔比例モデルでは代数的な解は得られない。そこでここでは最尤推定を考えることとする。個人勾配モデル及び平行線分析モデルは順序カテゴリー間隔比例モデルの特殊モデルに相当するので、以下では当モデルのみの場合について述べる。

個人 i ($i=1, \dots, N$) に、刺激 x_{ji} ($j=1, \dots, L_i$) が与えられた時にカテゴリー k ($k=1, \dots, M$) に反応する確率 P_{ijk} は、Samejima 型モデルでは、

$$\begin{aligned} P_{ijk} &= \bar{P}_{ijk} - \bar{P}_{ijk-1} \\ &= 1/(1 + \exp(\alpha_i \tau_k + \gamma_i - \beta_i x_{ji})) \\ &\quad - 1/(1 + \exp(\alpha_i \tau_{k-1} + \gamma_i - \beta_i x_{ji})) \\ &\quad (\bar{P}_{ijM} = 1, \bar{P}_{ij0} = 0) \end{aligned} \quad (11)$$

である。

Andrich 型モデルでは、

$$\begin{aligned} P_{ijk} &= \frac{\exp\left\{\alpha_i \sum_{h=1}^{k-1} \tau_h + (k-1)\gamma_i - (k-1)\beta_i x_{ji}\right\}}{1 + \sum_{g=2}^M \exp\left\{\alpha_i \sum_{h=1}^{g-1} \tau_h + (g-1)\gamma_i - (g-1)\beta_i x_{ji}\right\}} \\ &\quad (k \geq 2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P_{ijk} &= \frac{1}{1 + \sum_{g=2}^M \exp\left\{\alpha_i \sum_{h=1}^{g-1} \tau_h + (g-1)\gamma_i - (g-1)\beta_i x_{ji}\right\}} \\ &\quad (k=1) \end{aligned} \quad (12)$$

である。

個人 i の、 x_{ji} が与えられた時の反応が、カテゴリー k であった時のダミー変数として S_{ijm} を $S_{ijm} = \delta_{mk}$ ($\delta_{mk} = 1 (m=k)$, $\delta_{mk} = 0 (m \neq k)$; $m=1, \dots, M$) で定義する。 S_{ijk} ($i=1, \dots, N$; $j=1, \dots, L_i$; $k=1, \dots, M$) があたえられた時 (これらのデータの集合を S であらわす) のパラメータのベクトル $\theta' = (\tau_1, \dots, \tau_{M-1}, \beta_1, \dots, \beta_N, \gamma_1, \dots, \gamma_{N-1}, \alpha_1, \dots, \alpha_{N-1})$ の尤度は反応の相互の独立性を仮定して

$$L(\theta | S) = \prod_{i=1}^N \prod_{j=1}^{L_i} P_{ij1}^{S_{ij1}} P_{ij2}^{S_{ij2}} \dots P_{ijM}^{S_{ijM}} \quad (13)$$

と書ける。ここで θ は、一般性を失うことなく $\gamma_N = 0$, $\alpha_N = 1$ とした場合の結果を用いている。

対数尤度 l は、

$$l = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^{L_i} \sum_{k=1}^M S_{ijk} \log P_{ijk} \quad (14)$$

となる。ここで L , S_{ijk} , P_{ijk} はそれぞれ L_i , S_{ijm} , P_{ijk} の略記であり、以下 x_{ji} を x_j と略記することとあわせて用いる。 θ の最尤推定値は、(14) 式を最大化することにより得られるが、ここでは Fisher のスコア法を用いる。すなわち

$$g^{(i)} = \frac{\partial l}{\partial \theta^{(i)}}, \quad I_{(i)} = - \frac{\partial^2 l}{\partial \theta^{(i)} \partial \theta^{(i)'}}$$

とすると、

$$\theta_{(i+1)} = \theta_{(i)} + t_{(i)} I_{(i)}^{-1} g_{(i)} \quad (15)$$

である。ここで (i) は i 回目の繰り返しにおける各値をあらわし、 $t_{(i)}$ は i 回目の繰り返しにおけるステップサイズである。

順序カテゴリー間隔比例モデルでは、 α_i と τ_k は非線型な関係にあるため、推定値を得る収束の過程は不安定であることが予想される。そこで、収束を可能にするためには、適切な初期値から出発することが重要である。そのひとつの方法は、データを刺激の量に応じて適当にグループ化し、最小 χ^2 推定を行い、これを初期値とするものである。

Andrich 型の個人差無視モデルでの簡便な初期値は、データを刺激の量に応じて L 個のグループに分け

$$f = \sum_{k=1}^{M-1} \sum_{j=1}^L \{ (\tau_k - \beta x_j) - \log(p_{j,k+1}/p_{j,k}) \} \quad (16)$$

を最小にする解である。ここで p_{jk} は j 番目の物理量水準における k 番目のカテゴリーの標本における比率である。これから、最尤解を求め、その解を平行線分析モデルの初期値にする。さらに、この解を個人勾配モデルの初期値とし最尤解を求め、これを順序カテゴリー間隔比例モデルの初期値とする方法が勧められる。

計算に必要なグラディエントベクトルおよび情報行列は付録にある。繰り返し計算において、グラディエントベクトルのすべての要素の絶対値が十分小さくなった時点で繰り返しを終了する。その時の情報行列の逆行列の対角要素の平方根から、パラメータの漸近的な標準誤差を得ることができる。

モデルの適合度の検定は、データがグループ化されており、最小 χ^2 推定を行った場合には可能であるが、最尤解の場合には適当な統計量がない。この事情は、2 値反応を扱う通常のロジットモデル、プロビットモデルでも同様である(後藤他, 1980)。しかし、モデル間の比較は、一方のモデルがもう一方のモデルの入れ子になっている場合は $-2 \times$ 対数尤度比が漸近的に χ^2 分布することをを用いて一方のモデルにのみ含まれるパラメータの有意性検定を行うことができる。また、異なったタイプのモデルに関しては AIC を用いてモデルの比較検討を行うことができる(赤池, 1976; 坂元他, 1983)。さらに、パラメータの役割をスコア法の収束結果から得られるパラメータの漸近的な標準誤差を

用いて検討することも可能である。すなわち、問題としているパラメータの推定値を対応する標準誤差で除した値が、標準偏差が 1 の正規分布に漸近的に従うことを利用して推定値の大きさを評価する。

4. 適用例

ここで用いるデータは、小笠原他(1988)のデータであり、新幹線列車の振動に関する乗心地を SD 法で 10 人の被験者が評価したものである。SD 法の尺度は(快い, 不快)(弱い, 強い)(単調な, 変化のある)(良い, 悪い)(柔らかい, 固い)(安定な, 不安定な)の 6 種類があり、7 段階の順序カテゴリー(非常に, かなり, やや, どちらでもない, やや, かなり, 非常に)のいずれかに反応するようになっている。刺激 x は、列車走行 10 秒間における前後, 左右, 上下の 3 方向を合成した等価振動レベル(単位: dB)であり、150 区間について評価が行われた。

図 1 は 2 種類の尺度(カテゴリーには振動の大きな方に対応する方から 1~7 のコードを付してある)についての個人(A~J)別の各カテゴリーへの反応数である。一見して個人差があることが明らかで、反応の全体的なレベルと各カテゴリーへの反応のばらつきはいずれにおいても個人差がみとめられる。

前述の Samejima 型及び Andrich 型の各モデルをこのデータにあてはめた。この際、コード 1 のカテゴリーは極端に反応が少ないのでコード 2 以下を一つのカテゴリーにまとめた。これを 10 人の 6 カテゴリーデータとよぶ。ただし、このようにしてもコード 6 と 7 に反応のない個人がいるので、このデータに関しては各個人に同一のパラメータ数を持つ個別モデルのあてはめは行わなかった。一方、個別モデルと他のモデルとの比較を行う必要もあるので、SD 法の各尺度のいずれかにコード 6 と 7 の反応がない個人(D, G, J)を除いたデータを作成し、コード 6 と 7 を一つのコードにまとめ、これに対して各モデルのあてはめを行った。このデータを 7 人の 5 カテゴリーデータとよぶ。

表 1 は Samejima 型の順序カテゴリー間隔比例モデルのパラメータの推定値と標準誤差を 2 つの SD 法の尺度について示したものである。表 2 は、Andrich 型モデルの対応する結果である。ふたつのモデルのあてはめの結果から、パラメータの推定値の大小関係がかなり共通していることがわかる。

境界値 τ_k についてみると、境界値間の間隔は順序カテゴリーの中央はせまく、両端は相対的に広いとい

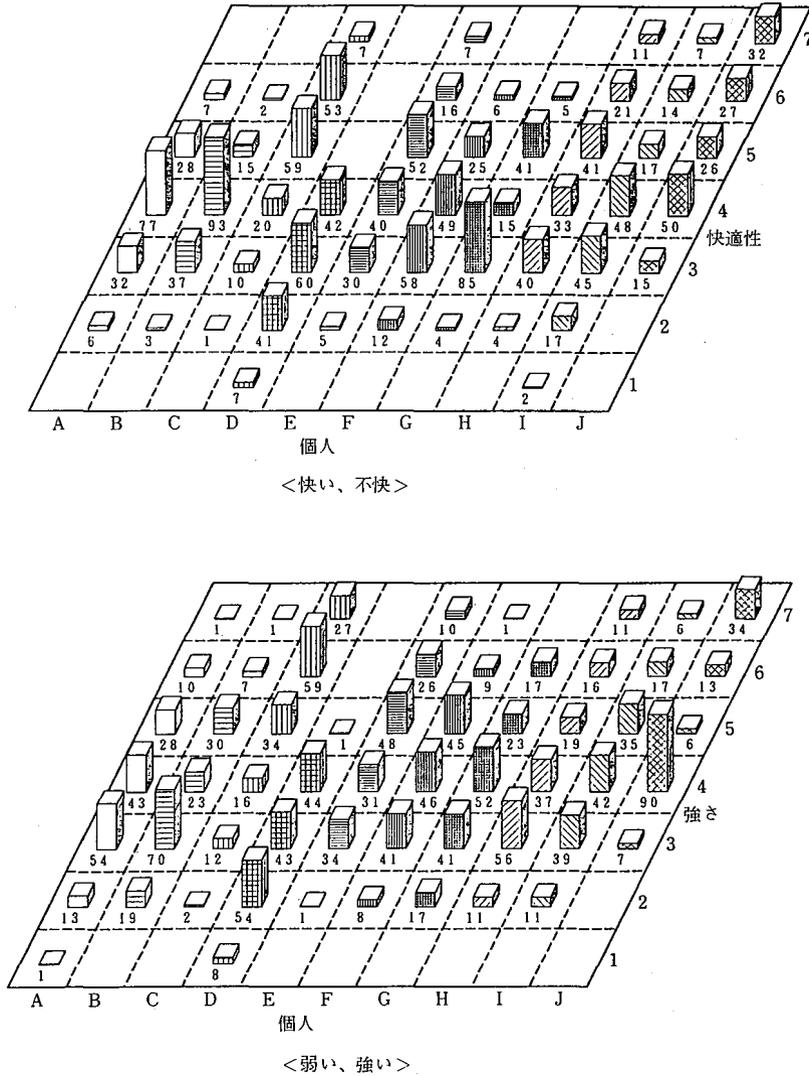


図1. 各カテゴリーへの個人別反応数

う結果が Samejima 型及び Andrich 型のいずれのモデルについても示されており、Andrich(1982)の提案する、カテゴリーの境界値が等間隔にあるモデルが、不十分であることが示されている。なお、Andrich型モデルの7人の5カテゴリーのデータの(弱い、強い)の尺度で τ_2 と τ_3 の推定値が小数1位で等しくなっているが、正確にはそれぞれ 30.27 と 30.34 である。

各カテゴリーへの反応確率の分布が単峰で上に凸の場合には、 τ_i はこの結果のように単調な増減を示す。しかし、一般には τ_i は、単調な数列ではない。これは、

Andrich型モデルの特徴のひとつといえるが、今回のモデルのあてはめでもこのことが示されている。例えば、〈弱い、強い〉の尺度について5カテゴリーにまとめた、個人Bのデータに個別モデルをあてはめると τ_1, \dots, τ_4 の推定値は、それぞれ 32.2, 29.5, 30.5, 28.3 となる。これは、図1からもわかるように、確率分布にふたつの極大値があるためである。

また、カテゴリー間隔のばらつきを表す α_i も Samejima 型及び Andrich 型のいずれの結果においても個人差がよく示されている。特に、(快い、不快な)

表1. Samejima型の順序カテゴリ—間隔比例モデルにおけるパラメータの推定値と漸近的な標準誤差(カッコ内)

データ パラ メータ	10人の6カテゴリのデータ		7人の5カテゴリのデータ	
	快い 不快な	弱い 強い	快い 不快な	弱い 強い
τ_1	27.1 (6.2)	20.7 (5.9)	62.3 (8.3)	63.0 (8.6)
τ_2	25.5 (6.1)	19.1 (5.9)	60.3 (8.3)	60.4 (8.5)
τ_3	24.4 (6.1)	17.9 (5.8)	58.8 (8.2)	59.1 (8.5)
τ_4	23.3 (6.1)	16.8 (5.8)	57.2 (8.1)	57.3 (8.4)
τ_5	21.9 (6.1)	15.4 (5.8)		
β_1	.31 (.07)	.48 (.08)	.32 (.07)	.49 (.08)
β_2	.68 (.10)	.59 (.08)	.70 (.10)	.62 (.09)
β_3	.34 (.07)	.69 (.10)	.43 (.09)	.70 (.12)
β_4	.39 (.08)	.33 (.07)		
β_5	.60 (.08)	.59 (.09)	.55 (.09)	.54 (.09)
β_6	.45 (.08)	.41 (.08)	.45 (.08)	.41 (.08)
β_7	.40 (.08)	.40 (.07)		
β_8	.36 (.07)	.46 (.08)	.34 (.08)	.46 (.08)
β_9	.69 (.09)	.71 (.09)	.70 (.10)	.70 (.10)
β_{10}	.28 (.07)	.21 (.07)		
γ_1	-21.2 (13.1)	14.2 (10.1)	-57.5 (12.8)	-19.5 (10.1)
γ_2	-23.0 (20.7)	23.4 (10.2)	-85.5 (20.6)	-8.6 (10.2)
γ_3	-11.3 (11.7)	35.6 (11.2)	-28.3 (12.1)	14.8 (12.0)
γ_4	-9.3 (11.6)	3.2 (9.3)		
γ_5	13.5 (11.0)	25.3 (10.4)	-19.6 (11.1)	-13.1 (10.7)
γ_6	-3.4 (11.5)	6.8 (10.5)	-35.8 (11.1)	-33.0 (10.9)
γ_7	-5.7 (11.1)	9.8 (9.4)		
γ_8	2.0 (9.0)	19.2 (8.7)	-22.2 (9.2)	-9.1 (9.0)
γ_9	25.9 (10.1)	34.7 (10.5)		
α_1	1.92 (.22)	1.42 (.16)	1.42 (.17)	1.02 (.12)
α_2	3.23 (.41)	1.42 (.16)	2.42 (.31)	1.01 (.12)
α_3	1.70 (.19)	1.40 (.16)	1.12 (.15)	.80 (.11)
α_4	1.62 (.21)	1.23 (.15)		
α_5	1.53 (.17)	1.40 (.15)	1.13 (.13)	1.01 (.12)
α_6	1.64 (.19)	1.52 (.17)	1.23 (.14)	1.13 (.13)
α_7	1.56 (.18)	1.30 (.14)		
α_8	1.16 (.13)	1.09 (.12)	.87 (.10)	.81 (.10)
α_9	1.30 (.15)	1.40 (.15)		

表2. Andrich型の順序カテゴリー間隔比例モデルにおけるパラメータの推定値と漸近的な標準誤差(カッコ内)

データ 尺度 パラ メータ	10人の6カテゴリーのデータ		7人の5カテゴリーのデータ	
	快 不 快 な	弱 強 い	快 不 快 な	弱 強 い
τ_1	11.0 (3.0)	7.5 (2.7)	36.0 (5.7)	32.2 (5.2)
τ_2	10.4 (3.0)	6.8 (2.6)	35.1 (5.6)	30.3 (5.0)
τ_3	10.0 (3.0)	6.5 (2.6)	34.2 (5.5)	30.3 (5.0)
τ_4	9.6 (2.9)	6.1 (2.6)	33.6 (5.4)	29.4 (4.9)
τ_5	9.1 (2.9)	5.6 (2.6)		
β_1	.20 (.05)	.28 (.05)	.21 (.05)	.28 (.05)
β_2	.57 (.09)	.35 (.06)	.59 (.10)	.37 (.06)
β_3	.22 (.05)	.41 (.07)	.29 (.06)	.45 (.08)
β_4	.29 (.06)	.17 (.04)		
β_5	.28 (.05)	.29 (.05)	.28 (.05)	.30 (.06)
β_6	.27 (.05)	.25 (.05)	.28 (.05)	.25 (.05)
β_7	.23 (.05)	.22 (.04)		
β_8	.15 (.04)	.22 (.04)	.14 (.04)	.24 (.05)
β_9	.38 (.06)	.36 (.06)	.41 (.07)	.35 (.06)
β_{10}	.11 (.03)	.07 (.03)		
γ_1	-17.6 (11.6)	8.1 (7.1)	-42.8 (11.3)	-10.4 (7.6)
γ_2	-29.1 (24.8)	13.9 (7.4)	-82.1 (23.3)	-6.1 (8.1)
γ_3	-7.5 (9.3)	22.8 (7.2)	-7.7 (9.4)	24.1 (7.4)
γ_4	-10.2 (11.3)	3.3 (5.3)		
γ_5	2.0 (7.5)	10.5 (6.9)	-13.5 (8.0)	-12.3 (9.4)
γ_6	-6.1 (9.6)	3.4 (7.9)	-26.3 (9.4)	-19.2 (9.2)
γ_7	-7.7 (8.9)	5.8 (5.9)		
γ_8	-.8 (5.1)	9.8 (4.6)	-10.2 (6.2)	-4.2 (6.2)
γ_9	13.5 (6.7)	17.0 (6.9)		
α_1	3.44 (.84)	2.30 (.57)	1.75 (.37)	1.11 (.25)
α_2	7.59 (1.91)	2.37 (.59)	3.80 (.81)	1.22 (.27)
α_{∞}	2.73 (.66)	2.01 (.52)	.98 (.30)	.50 (.25)
α_4	3.22 (.87)	1.54 (.45)		
α_5	2.18 (.53)	2.17 (.53)	1.09 (.26)	1.26 (.32)
α_6	2.84 (.71)	2.63 (.64)	1.44 (.31)	1.35 (.31)
α_7	2.62 (.65)	1.87 (.47)		
α_8	1.36 (.35)	1.29 (.35)	.66 (.18)	.80 (.20)
α_9	1.82 (.47)	2.10 (.52)		

表3. Samejima型の順序カテゴリー間隔比例モデルにおけるカテゴリーコードの予測

(1) 尺度<快い, 不快な>(10人の6カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	6	計	
実際の コード	1	7	74	15	5	1	102	
	2	4	188	173	45	2	412	
	3		95	265	94	13	467	
	4		20	145	128	11	304	
	5			1	31	91	25	151
	6				3	37	16	64
計	11	378	632	400	68	11	1500	

誤分類数 879 (58.6%)

(2) 尺度<弱い, 強い>(10人の6カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	6	計	
実際の コード	1	19	96	28	2		145	
	2	8	178	174	31	5	397	
	3	5	99	211	100	9	424	
	4		27	144	74	22	269	
	5			5	48	67	46	174
	6				15	32	24	91
計	32	405	620	306	106	31	1500	

誤分類数 952 (63.5%)

(3) 尺度<快い, 不快な>(7人の5カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	計	
実際の コード	1	1	29	15	4	1	50
	2		82	136	33	1	252
	3		53	245	59	3	360
	4		7	120	97	13	237
	5			1	31	77	42
計	1	172	547	270	60	1050	

誤分類数 583 (55.5%)

(4) 尺度<弱い, 強い>(7人の5カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	計	
実際の コード	1		46	18	2		66
	2	1	154	117	29	5	306
	3		61	126	44	7	238
	4		30	100	84	25	239
	5			4	30	70	97
計	1	295	391	229	134	1050	

誤分類数 589 (56.1%)

の尺度で a_2 (個人Bに対応する) の値が両モデルとも大きくなっているが、図1でわかるように個人Bがこの尺度でコード4に非常に多く反応しており、反応のばらつきが、小さいことと対応しており、 a_i の意味をよくあらわしている。 a_i は a_n との比の推定値であるが、それぞれの標準誤差の大きさからみて、 a_i をすべて1とするモデルが不適切であることがわかる。

次に、順序カテゴリー間隔比例モデルの適合性を評価するために、モデルを用いた反応カテゴリーの予測を行う。予測の方法には、パラメータの推定値を与えられたものとして、各カテゴリーへの反応確率の事後分布を用いるものや、カテゴリー k 以下の確率と $k-1$ 以下の確率の間に0.5がある場合カテゴリー k と予測する方法等がある(後藤他, 1987)。Andrich型で τ_i が単調な増減を示す場合には、事後分布の最大値を用いる方法が簡単であり、Samejima型では後者の方法が容易である。ここでは、両モデルを共通な基準で評

価する必要があるので後者の方法によることとする。

表3~4は、表1~2のパラメータの推定値を用いた予測の結果である。誤分類の率はふたつの型のモデルにおいて対応するデータごとにほぼ近い値が示されている。これら以外のデータや他のモデルを用いた予測の結果は、表5~6に含まれている。表より、全体としては、大きな相違ではないが平行線分析モデルの誤分類の率が最も大で個別モデルが最も小さいという傾向がうかがわれる。しかし、尺度によっては必ずしもそうではない。予測は、ひとつの物理量に対してひとつの反応カテゴリーを対応させるというものであり、これは、モデルの妥当性の一部を検証しているのにすぎない。

そこで、表3~4には各モデルのあてはめの結果得られたAICとパラメータの数を示す。表5.1と6.1において、いずれの尺度も順序カテゴリー間隔比例モデルが最小のAICを示し、当モデルの適切性が示されている。

表5.2と6.2においては、Samejima型とAndrich型の両モデルとも最小AICモデルはどの尺度におい

表4. Andrich型の順序カテゴリー間隔比例モデルにおけるカテゴリーコードの予測

(1) 尺度<快い, 不快な> (10人の6カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	6	計	
実際のコード	1	5	75	17	4	1	102	
	2	3	174	190	43	2	412	
	3		82	279	93	13	467	
	4		13	156	125	10	304	
	5			1	32	90	26	151
	6				4	36	20	64
計	8	345	678	391	72	6	1500	

誤分類数 887 (59.1%)

(2) 尺度<弱い, 強い> (10人の6カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	6	計		
実際のコード	1	13	103	27	2		145		
	2	5	188	165	33	6	397		
	3	3	103	188	122	8	424		
	4		30	136	79	23	1	269	
	5			4	41	73	49	7	174
	6				9	38	28	16	91
計	21	428	566	347	114	24	1500		

誤分類数 967 (64.5%)

(3) 尺度<痛い, 不快な> (7人の5カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	計	
実際のコード	1	1	28	16	4	1	50
	2		72	153	27		252
	3		43	261	53	3	360
	4		6	131	84	16	237
	5			1	32	73	45
計	1	150	593	241	65	1050	

誤分類数 587 (55.9%)

(4) 尺度<弱い, 強い> (7人の5カテゴリーのデータ)

予測したコード	1	2	3	4	5	計	
実際のコード	1		48	16	2		66
	2		154	118	28	6	306
	3		64	122	46	6	238
	4		29	98	88	24	239
	5			4	33	72	92
計		299	387	236	128	1050	

誤分類数 594 (56.6%)

でも個別モデルとなっている。順序カテゴリー間隔比例モデルは(安定な, 不安定な)の尺度をのぞいて、これに次いでいる。なお(安定な, 不安定な)の尺度では、平行線分析モデルのあてはまりも、それほど悪くなく、やや特異な結果を示している。

この結果をみると、個別モデルが最も良いこととなるが、個人によって反応のないカテゴリーについても、小さい反応の確率は想定される訳で、これは、個別モデルによっては、推定の方法がなく、この意味で順序カテゴリー間隔比例モデルはすぐれているといえる。なお、表5.2と6.2において平行線分析モデルをのぞくそれぞれ3つのモデルについて、2つの尺度に関する個人Bの反応確率の推定結果を図2と3に示す。一例ではあるが、個人勾配モデルがあきらかに個別モデルと異なる場合があるのに対して、順序カテゴリー間隔比例モデルが、実用上は個別モデルの推定結果に代替しうることが示されている。

5. おわりに

当論文では Samejima 型モデルと Andrich 型モデルの2つの異なるタイプのモデルに順序カテゴリー間隔比例モデルを設定した。順序カテゴリーを扱うモデルではこれまで Samejima 型モデルが圧倒的に多い。このモデルでは各カテゴリーへの反応確率のモデルは Andrich 型に比べると比較的単純のようにみえるが、比較判断の心理学的過程を表すのに Andrich 型に比べて、必ずしも適切であるとはいえない。モデルの適切性は、現実のデータへの適合とモデルの実質科学的な意味づけによっていると考えられ、モデルの数学的構造だけを比較することは不十分である。

適用例では、AIC については両タイプのモデルは、尺度によって大小関係が異なり、このデータへの適合性は同程度と判断される。しかし、Andrich 型のモデルの特質として、Samejima 型のモデルにおけるパラメータ β_i が各カテゴリー境界値のロジスティック曲線の勾配として等しいことが要請されるのに対して、Andrich 型では必ずしもその必要がないことがあげら

表 5.1. Samejima型の各モデルの予測結果とAIC (10人の6カテゴリーのデータ)

尺 度		快い 不快	弱い 強い	単調な 変化のある	良い 悪い	柔らかい 固い	安定な 不安定な
平行線分析 モデル	誤分類数 (%)	894 (59.6)	940 (62.7)	990 (66.0)	953 (63.5)	910 (60.7)	968 (64.5)
	AIC (パラ メータ数)	4041.0 (15)	4225.2 (15)	4416.5 (15)	4168.1 (15)	4177.0 (15)	4241.5 (15)
個人勾配 モデル	誤分類数 (%)	879 (58.6)	949 (63.3)	923 (61.6)	937 (62.5)	894 (59.6)	947 (63.1)
	AIC (パラ メータ数)	4019.4 (24)	4215.2 (24)	4358.4 (24)	4157.8 (24)	4152.6 (24)	4222.2 (24)
順序カテゴリー 間隔比例モデル	誤分類数 (%)	879 (58.6)	952 (63.5)	922 (61.5)	931 (62.1)	909 (60.6)	947 (63.1)
	AIC (パラ メータ数)	3921.3 (33)	4207.8 (33)	4300.5 (33)	4108.1 (33)	4088.3 (33)	4169.3 (33)
反 応 数		1500	1500	1499	1500	1499	1500

表 5.2. Samejima型の各モデルの予測結果とAIC (7人の5カテゴリーのデータ)

尺 度		快い 不快	弱い 強い	単調な 変化のある	良い 悪い	柔らかい 固い	安定な 不安定な
平行線分析 モデル	誤分類数 (%)	588 (56.0)	601 (57.2)	677 (64.5)	648 (61.7)	611 (58.2)	668 (63.6)
	AIC (パラ メータ数)	2663.8 (11)	2697.0 (11)	2958.1 (11)	2791.6 (11)	2800.1 (11)	2829.7 (11)
個人勾配 モデル	誤分類数 (%)	586 (55.8)	590 (56.2)	668 (63.6)	652 (62.1)	589 (56.1)	653 (62.2)
	AIC (パラ メータ数)	2646.7 (17)	2694.2 (17)	2943.5 (17)	2794.4 (17)	2776.5 (17)	2825.7 (17)
順序カテゴリー 間隔比例モデル	誤分類数 (%)	583 (55.5)	589 (56.1)	669 (63.7)	651 (62.0)	583 (55.6)	646 (61.5)
	AIC (パラ メータ数)	2578.4 (23)	2694.1 (23)	2934.3 (23)	2787.9 (23)	2729.2 (23)	2826.6 (23)
個別モデル	誤分類数 (%)	565 (53.8)	584 (55.6)	644 (61.3)	630 (60.0)	587 (56.0)	647 (61.6)
	AIC (パラ メータ数)	2568.8 (35)	2688.4 (35)	2921.4 (35)	2780.8 (35)	2698.3 (35)	2821.3 (35)
反 応 数		1050	1050	1050	1050	1049	1050

表 6.1. Andrich型の各モデル予測結果とAIC (10人の6カテゴリーデータ)

尺 度		快い 不快	弱い 強い	単調な 変化のある	良い 悪い	柔らかい 固い	安定な 不安定な
平行線分析 モデル	誤分類数 (%)	893 (59.5)	965 (64.3)	1006 (67.1)	957 (63.8)	916 (61.1)	978 (65.2)
	AIC (パラ メータ数)	4040.2 (15)	4221.6 (15)	4409.7 (15)	4152.0 (15)	4161.1 (15)	4231.2 (15)
個人勾配 モデル	誤分類数 (%)	890 (59.3)	973 (64.9)	950 (63.4)	954 (63.6)	922 (61.5)	958 (63.9)
	AIC (パラ メータ数)	4021.4 (24)	4207.8 (24)	4372.2 (24)	4146.7 (24)	4141.4 (24)	4219.3 (24)
順序カテゴリー 間隔比例モデル	誤分類数 (%)	887 (59.1)	967 (64.5)	947 (63.2)	945 (63.0)	915 (61.0)	964 (64.3)
	AIC (パラ メータ数)	3933.1 (33)	4205.2 (33)	4315.8 (33)	4094.3 (33)	4083.2 (33)	4161.0 (33)
反 応 数		1500	1500	1499	1500	1499	1500

表 6.2. Andrich型の各モデルの予測結果とAIC (7人の5カテゴリーデータ)

尺 度		快い 不快	弱い 強い	単調な 変化のある	良い 悪い	柔らかい 固い	安定な 不安定な
平行線分析 モデル	誤分類数 (%)	592 (56.4)	611 (58.2)	690 (65.7)	652 (62.1)	614 (58.5)	672 (64.0)
	AIC (パラ メータ数)	2676.3 (11)	2702.1 (11)	2971.6 (11)	2793.2 (11)	2806.9 (11)	2837.5 (11)
個人勾配 モデル	誤分類数 (%)	585 (55.7)	594 (56.6)	666 (63.4)	663 (63.1)	597 (56.9)	660 (62.9)
	AIC (パラ メータ数)	2660.7 (17)	2697.9 (17)	2959.3 (17)	2795.1 (17)	2789.2 (17)	2835.6 (17)
順序カテゴリー 間隔比例モデル	誤分類数 (%)	587 (55.9)	594 (56.6)	668 (63.6)	662 (63.0)	596 (56.8)	661 (63.0)
	AIC (パラ メータ数)	2590.7 (23)	2699.1 (23)	2957.8 (23)	2788.4 (23)	2740.5 (23)	2839.3 (23)
個別モデル	誤分類数 (%)	583 (55.5)	616 (58.7)	670 (63.8)	637 (60.7)	590 (56.2)	628 (59.8)
	AIC (パラ メータ数)	2577.2 (35)	2688.8 (35)	2932.1 (35)	2779.2 (35)	2702.4 (35)	2831.7 (35)
反 応 数		1050	1050	1050	1050	1049	1050

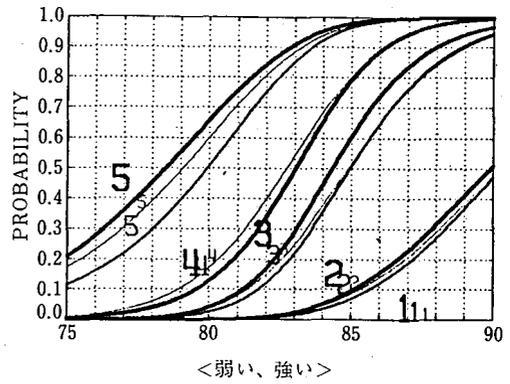
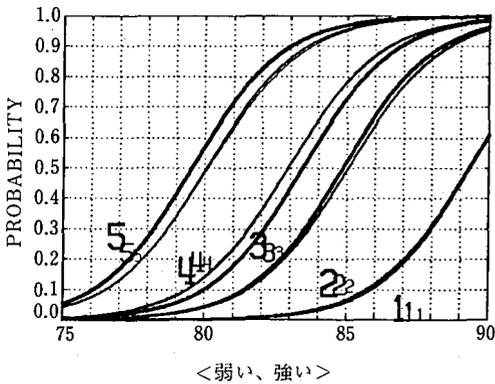
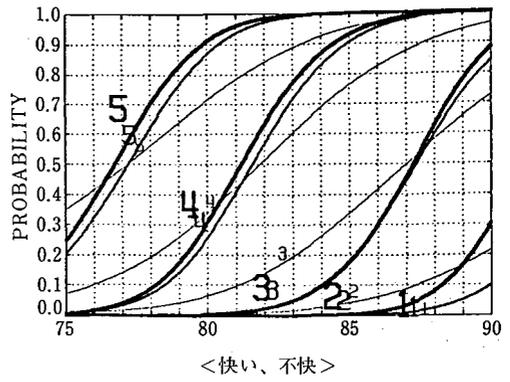
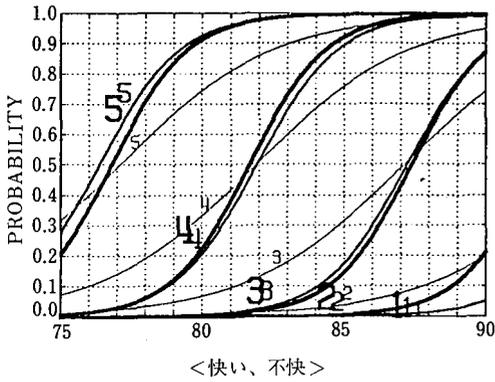


図2. Samejima 型の3つのモデルの個人Bへのあてはめの結果 (横軸は等価振動レベル(dB), 太線は個別モデル, 中程度の線は順序カテゴリー間隔比例モデル, 細線は個人勾配モデルの各カテゴリー以下の確率の境界を示す。図中の数字は振動の大きい方に対応するカテゴリーの順につけたコード値1~5である。)

図3. Andrich 型の3つのモデルの個人Bへのあてはめの結果 (図2の説明を参照のこと)

れる。また、当論文のはじめに述べたように Andrich 型モデルは、名義尺度を反応カテゴリーとするモデルの特殊ケースに相当することから順序尺度と名義尺度の中間のモデルへの発展が比較的安易であることも特質としてあげられる。

当論文の各モデルでは刺激は1種類のみであったが、一般には複数個の刺激が存在する。例えば、適用例では等価振動レベルは前後、左右、上下の3方向のものを一般に用いられている方式により合成した値が使われているが、このデータに最も適合するような各方向の物理量に対する係数を求めることにより当データの特徴を明らかにすることも意義がある。その場合

には β_i はベクトルとなるが、この拡張は容易である。

謝 辞

本論文をまとめるにあたりレフェリーの方からは、全体的なことから細かいことまで数多くの貴重な御指摘を頂きました。ここに、心から謝意を表します。

参 考 文 献

赤池弘次(1976) 情報量基準とは何か。数理科学, 14 (3), 5-11.
 Aitchison, J. & Silvey, S.D. (1957) The generalization of probit analysis to the case of multiple responses. *Biometrika*, 44, 131-140.
 Andersen, E.B. (1977) Sufficient statistics and latent trait models. *Psychometrika*, 42, 69-81.
 Anderson, D.A. & Aitkin, M. (1985) Variance component models with binary response: interviewer variability. *Journal of the Royal Sta-*

- tistical Society (B)*, 47 (2), 203-210.
- Andrich, D. (1978a) A rating formulation for ordered response categories. *Psychometrika*, 43, 561-573.
- Andrich, D. (1978b) Application of a psychometric rating model to ordered categories which are scored with successive integers. *Applied Psychological Measurement*, 2, 581-594.
- Andrich, D. (1979) A model for contingency tables having an ordered response classification. *Biometrics*, 35, 403-415.
- Andrich, D. (1982) An extension of the Rasch model for ratings providing both location and dispersion parameters. *Psychometrika*, 47, 105-113.
- Ashford, J.R. (1959) An approach to the analysis of data for semi-quantal responses in biological assay. *Biometrics*, 15, 573-581.
- Baker, F.B. & Gurland, J. (1968) An extension of item analysis procedures to the case of polychotomous response. *Psychometrika*, 33, 259-266.
- Bock, R.D. (1972) Estimating item parameters and latent ability when the responses are scored in two or more nominal categories. *Psychometrika*, 37, 29-51.
- Bock, R.D. (1975) *Multivariate statistical methods in behavioral research*. McGraw-Hill.
- Finney, D.J. (1944) The application of probit analysis to the results of mental tests. *Psychometrika*, 9, 31-39.
- Gurland, J., Lee, I. & Dahm, P.A. (1960) Polychotomous quantal response in biological assay. *Biometrics*, 16, 382-398.
- Guttman, L. (1954) The principal components of scalable attitudes. In Lazarsfeld, P.F. (Ed.), *Mathematical thinking in the social sciences*. Glencoe, Illinois: The Free Press.
- 後藤昌司, 畠中駿逸, 田崎武信(1980) 解析の方法と演算プログラム(訳者あとがき). 二値データの解析. 朝倉書店. (Cox, D.R. (1970) The analysis of binary data. London: Chapman and Hall.)
- Goto, M., Inoue, T. & Tsuchiya, Y. (1986) Power-transformation for ordered categorical data. *Behaviormetrika*, 19, 17-39.
- 後藤昌司, 井上俊昭(1987) 順序カテゴリー-応答に対する対数ガンマモデルのあてはめ. 行動計量学, 15 (1), 1-9.
- Kolakowski, D. & Bock, R.D. (1973) *LOGOG User's guide*. International Educational Services.
- Lord, F.M. (1980) *Applications of item response theory to practical testing problems*. Lawrence Erlbaum Associates.
- Lord, F.M. & Novick, M.R. (1968) *Statistical theories of mental test scores*. Addison-Wesley.
- Mantel, N. (1966) Models for complex contingency tables and polychotomous dosage response curves. *Biometrics*, 22, 83-95.
- Masters, G.N. (1982) A Rasch model for partial credit scoring. *Psychometrika*, 47, 149-174.
- Muthén, B. (1979) A structural probit model with latent variables. *Journal of the American Statistical Association*, 74, 807-811.
- 西里静彦(1975) 応用心理尺度構成法. 誠信書房.
- 小笠原春彦, 楠神 健(1988) 列車振動乗心地の評価. 日本心理学会第52回大会論文集, 389.
- Prentice, R.L. (1976) A generalization of the probit and logit methods for dose response curves. *Biometrics*, 32, 761-768.
- Rasch, G. (1961) On general laws and the meaning of measurement in psychology. *Proceedings of the Fourth Berkeley Symposium on Mathematical Statistics and Probability*, IV, 321-334.
- Rasch, G. (1980) *Probabilistic models for some intelligence and attainment tests*, expanded edition. Chicago: The University of Chicago. (内田良男監訳(1985) 心理テストの確率モデル. 名古屋大学出版会.)
- 坂本慶行, 石黒真木夫, 北川源四郎(1983) 情報量統計学. 共立出版.
- Samejima, F. (1969) Estimation of latent ability using a response pattern of graded scores. *Psychometrika Monograph*, 4, Part 2.
- Thissen, D. & Steinberg, L. (1986) A taxonomy of item response models. *Psychometrika*, 51, 567-577.

付録 数値計算に用いるグラディエントと情報行列

1. Samejima 型モデル

次の記号を新たに定義する。

$$\bar{Q}_{ijk} \equiv 1 - P_{ijk} \quad (i=1, \dots, N; j=1, \dots, L; k=1, \dots, M),$$

$$\tau_0 \equiv \tau_M \equiv 0$$

(1) グラディエント

$$\frac{\partial l}{\partial a_i} = - \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{S_{ijk}}{P_{ijk}} (\tau_k \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \tau_{k-1} \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})$$

$$(i=1, \dots, N-1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \tau_k} = - \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^L \left(\frac{S_{ijk}}{P_{ijk}} - \frac{S_{ij,k+1}}{P_{ij,k+1}} \right) a_i \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}$$

$$(k=1, \dots, M-1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma_i} = - \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{S_{ijk}}{P_{ijk}} (\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})$$

$$(i=1, \dots, N-1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{S_{ijk} X_{ij}}{P_{ijk}} (\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})$$

$$(i=1, \dots, N)$$

(2) 情報行列

$$E \left(- \frac{\partial^2 l}{\partial a_i^2} \right) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{1}{P_{ijk}} (\tau_k \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \tau_{k-1} \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})^2$$

$$(i=1, \dots, N-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_i \partial \tau_k}\right) = \sum_{j=1}^L \left(\frac{\tau_k \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \tau_{k-1} \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1}}{P_{ijk}} \right. \\ \left. - \frac{\tau_{k+1} \bar{P}_{ij,k+1} \bar{Q}_{ij,k+1} - \tau_k \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}}{P_{ij,k+1}} \right) \alpha_i \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}$$

$$(i=1, \dots, N-1; k=1, \dots, M-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_i \partial \gamma_i}\right) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{1}{P_{ijk}} (\tau_k \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} \\ - \tau_{k-1} \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1}) \\ \times (\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})$$

$$(i=1, \dots, N-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_i \partial \beta_i}\right) = - \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{x_j}{P_{ijk}} (\tau_k \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} \\ - \tau_{k-1} \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1}) \\ \times (\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})$$

$$(i=1, \dots, N-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \tau_k^2}\right) = \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \left(\frac{1}{P_{ijk}} + \frac{1}{P_{ij,k+1}} \right) \alpha_i^2 \bar{P}_{ijk}^2 \bar{Q}_{ijk}^2$$

$$(k=1, \dots, M-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \tau_k \partial \tau_{k+1}}\right) = - \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^M \alpha_i^2 \frac{\bar{P}_{ij,k+1} \bar{Q}_{ij,k+1} \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}}{P_{ij,k+1}}$$

$$(k=1, \dots, M-2)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \tau_k \partial \gamma_i}\right) = \sum_{j=1}^L \left(\frac{\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1}}{P_{ijk}} \right. \\ \left. - \frac{\bar{P}_{ij,k+1} \bar{Q}_{ij,k+1} - \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}}{P_{ij,k+1}} \right) \alpha_i \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}$$

$$(k=1, \dots, M-1; i=1, \dots, N-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \tau_k \partial \beta_i}\right) = - \sum_{j=1}^L \left(\frac{\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1}}{P_{ijk}} \right. \\ \left. - \frac{\bar{P}_{ij,k+1} \bar{Q}_{ij,k+1} - \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}}{P_{ij,k+1}} \right) \alpha_i x_j \bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk}$$

$$(k=1, \dots, M-1; i=1, \dots, N)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_i^2}\right) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{(\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})^2}{P_{ijk}}$$

$$(i=1, \dots, N-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_i \partial \beta_i}\right) = - \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{x_j}{P_{ijk}} (\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})^2$$

$$(i=1, \dots, N-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_i^2}\right) = \sum_{j=1}^L \sum_{k=1}^M \frac{x_j^2 (\bar{P}_{ijk} \bar{Q}_{ijk} - \bar{P}_{ij,k-1} \bar{Q}_{ij,k-1})^2}{P_{ijk}}$$

$$(i=1, \dots, N)$$

2. Andrich 型モデル

次の記号を新たに定義する。

$$\tau_k^* \equiv \sum_{h=1}^k \tau_{h-1}, (\tau_0 \equiv 0)$$

$$\exp(\cdot h-1) \equiv \exp\{\alpha_i \tau_h^* + (h-1)\gamma_i - \{h-1\}\beta_i x_j\}$$

$$A_j \equiv 1 + \sum_{h=2}^M \exp(\cdot h-1)$$

$$B_j \equiv \sum_{h=2}^M \exp(\cdot h-1), B_j^{(k)} \equiv \sum_{h=k+1}^M \exp(\cdot h-1)$$

$$C_j \equiv \sum_{h=2}^M \exp(\cdot h-1)(h-1)$$

$$C_j^{(k)} \equiv \sum_{h=k+1}^M \exp(\cdot h-1)(h-1)$$

$$D_j \equiv \sum_{h=2}^M \exp(\cdot h-1)(h-1)^2$$

$$E_j \equiv \sum_{h=2}^M \exp(\cdot h-1) \tau_h^*, E_j^{(k)} \equiv \sum_{h=k+1}^M \exp(\cdot h-1) \tau_h^*$$

$$F_j \equiv \sum_{h=2}^M \exp(\cdot h-1)(h-1) \tau_h^*$$

$$G_j \equiv \sum_{h=2}^M \exp(\cdot h-1) (\tau_h^*)^2$$

(1) グラデIENT

$$\frac{\partial l}{\partial \alpha_i} = \sum_{j=1}^L \left(\sum_{k=1}^M s_{ijk} \tau_k^* - \frac{E_j}{A_j} \right), (i=1, \dots, N-1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \tau_k} = \sum_{i=1}^N \alpha_i \sum_{j=1}^L \left(\sum_{g=h+1}^M s_{ijg} - \frac{B_j^{(k)}}{A_j} \right), (k=1, \dots, M-1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \gamma_i} = \sum_{j=1}^L \left\{ \sum_{k=2}^M s_{ijk}(k-1) - \frac{C_j}{A_j} \right\}, (i=1, \dots, N-1)$$

$$\frac{\partial l}{\partial \beta_i} = \sum_{j=1}^L \left[-x_j \left\{ \sum_{k=2}^M s_{ijk}(k-1) - \frac{C_j}{A_j} \right\} \right], (i=1, \dots, N)$$

(2) 情報行列

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_i^2} = \sum_{j=1}^L \left(\frac{G_j}{A_j} - \frac{E_j^2}{A_j^2} \right), (i=1, \dots, N-1)$$

$$E\left(-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_i \partial \tau_k}\right) = \alpha_i \sum_{j=1}^L \left(\frac{E_j^{(k)}}{A_j} - \frac{E_j B_j^{(k)}}{A_j^2} \right)$$

$$(i=1, \dots, N-1; k=1, \dots, M-1)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_i \partial \gamma_i} = \sum_{j=1}^L \left(\frac{F_j}{A_j} - \frac{C_j E_j}{A_j^2} \right), (i=1, \dots, N-1)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \alpha_i \partial \beta_i} = - \sum_{j=1}^L x_j \left(\frac{F_j}{A_j} - \frac{C_j E_j}{A_j^2} \right), (i=1, \dots, N-1)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \tau_m \partial \tau_n} = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \sum_{j=1}^L \left(\frac{B_j^{(m)}}{A_j} - \frac{B_j^{(m)} B_j^{(n)}}{A_j^2} \right)$$

$$(m \geq n), (m, n=1, \dots, M-1)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \tau_k \partial \gamma_i} = \alpha_i \sum_{j=1}^L \left(\frac{C_j^{(k)}}{A_j} - \frac{C_j B_j^{(k)}}{A_j^2} \right)$$

$$(k=1, \dots, M-1; i=1, \dots, N-1)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \tau_k \partial \beta_i} = - \alpha_i \sum_{j=1}^L x_j \left(\frac{C_j^{(k)}}{A_j} - \frac{C_j B_j^{(k)}}{A_j^2} \right)$$

$$(k=1, \dots, M-1; i=1, \dots, N)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_i^2} = \sum_{j=1}^L \left(\frac{D_j}{A_j} - \frac{C_j^2}{A_j^2} \right), (i=1, \dots, N-1)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \gamma_i \partial \beta_i} = - \sum_{j=1}^L x_j \left(\frac{D_j}{A_j} - \frac{C_j^2}{A_j^2} \right), (i=1, \dots, N-1)$$

$$-\frac{\partial^2 l}{\partial \beta_i^2} = \sum_{j=1}^L x_j \left(\frac{D_j}{A_j} - \frac{C_j^2}{A_j^2} \right), (i=1, \dots, N)$$

—1988年11月28日受付, 1989年7月10日最終修正—