

規準化オーソマックス法における因子負荷の標準誤差

小笠原 春 彦*

Standard Errors for Rotated Factor Loadings
by Normalized Orthomax Method

Haruhiko OGASAWARA

The varimax rotation, a special case of the orthomax method, usually contains the process of normalization by the communalities of manifest variables. After rotation, factor loadings are re-scaled so that the communalities have original values. Although the standard errors of rotated factor-loadings have been discussed from the general view point of estimation of parameters with restrictions, the actual standard errors for normalized rotation have not been provided. In this paper a method of estimating the asymptotic standard errors in the normalized orthomax rotation is given. Two artificial examples are provided in which standard errors become extremely large with or without normalization.

1. はじめに

実際のデータ解析の場面で用いられている探索的因子分析の方法のうち多くのものは、単純構造を得ることを目的にした因子回転を利用したものである。そして、最も多く用いられる回転方法のひとつは、直交回転のうちバリマックス回転であろう。例えば、利用頻度の多いと考えられる統計解析パッケージについてみると、BMDP (Dixson, 1992) では、デフォルト値による因子回転の方法は、バリマックス回転である。バリマックス回転では、因子負荷を各観測変量の共通性の平方根で除したものを回転の対象とし、回転後、因子負荷の各値に回転前の共通性の平方根を乗じるといふ、いわゆる規準化 (Kaiser, 1958) が行われることが多い。そのねらいは回転において、各観測変量の共通性の回転結果への影響の大きさを平準化することであ

る。BMDP では、規準化を採用するかどうかは、選択できるようになっているが、デフォルト値は、規準化を行う方法である。SAS (SAS Institute Inc., 1988) では、回転の方法のデフォルト値はないが、特定の回転法を選択した場合は、規準化を行う方法がデフォルト値となっている。

このように探索的因子分析において、規準化バリマックス法は多用されているにもかかわらず、因子負荷に関する標準誤差は、これまでのところ示されていない。この論文の目的は、バリマックス法をそのひとつの場合として含む規準化オーソマックス法 (Harman, 1976; 芝, 1979; 柳井他, 1990 参照) について因子負荷の標準誤差の推定値を求めることにある。また、ある場合において、規準化を行うことにより、標準誤差が著しく大きくなること、あるいは、逆に規準化を行わないと因子負荷の標準誤差が著しく大きいものが規準化を行うことにより、著しく小さくなることがあることを示し、実際面でも注意が必要なることを述べる。

* 小樽商科大学商学部 (Faculty of Commerce, Otaru University of Commerce; 当研究の一部は著者が (財) 鉄道総合技術研究所所属時に行った。)

連絡先氏名 小笠原春彦

郵便宛先 〒047 小樽市緑3-5-21 小樽商科大学商学部社会情報学科

電話番号 0134-27-5376

Email 宛先 hogasa@otaru-uc.ac.jp

2. 因子負荷の標準誤差

観測変数の数を p とし、共通因子の数を k とした場

合の探索的因子分析モデルから構成される分散共分散行列 Σ を次のように記述する。

$$\Sigma = \Lambda \Lambda' + \Psi \quad (1)$$

ここで、 Λ は $p \times k$ の因子負荷行列で、 Ψ は独自因子の分散を対角要素とする対角行列である。(1)式には回転の不定性があるのでそれを除くため、 $(k^2 - k)/2$ 個の制約が Λ に課されているとする。いわゆる最尤解は、 $\Lambda' \Psi^{-1} \Lambda$ が対角行列となる制約を課して得られるものである。これは、回転前の因子負荷行列を求めるのに用いられることが多いが、その漸近的な標準誤差は、 Ψ が既知の場合について、1953年にD.N. Lawleyによって得られた(Lawley, 1967)。 Ψ も未知の場合は、Lawley (1967)によって初めて得られ、Jennrich & Thayer (1973)は、Lawleyの結果の部分的な誤りを訂正した。

回転行列を T としたときの回転後の因子負荷 $B = \Lambda T$ の標準誤差については、それを求める必要性は認識されていたが、 T が推定された因子負荷行列に依存するため、得るのは困難であると考えられていた(Lawley & Maxwell, 1971)。しかし、Archer & Jennrich (1973)は、陰関数に対する微分法(implicit differentiation)を用いて、直交回転後の因子負荷の標準誤差を求めた。また、Jennrich (1973a)は、類似の方法により、斜交回転後の因子負荷の標準誤差を得た。また、Jennrich (1974)は、制約付最尤推定の枠組みから、拡大された情報行列¹⁾を用いることにより、より簡略に回転後の因子負荷の標準誤差の推定値を求めている。

まず、Archer & Jennrich (1973)の結果について(1)式の直交因子モデルに関して、簡単にまとめよう。直交回転後の因子負荷行列を B とすると

$$B = \Lambda T, T' T = T T' = I \quad (2)$$

である。 T は、回転の最適化関数 $h(B)$ が、極値をとるような B をもたらす因子回転のための正規直交行列である。(2)の第2式の T に関する微分をとると、

$$(dT)T + T'dT = 0 \quad (3)$$

である。また、 $h(B)$ の B における微分を dh とあらわすと、 $h(B)$ は B において極値をとることから、(3)式を満たす dT について

$$dh(\Lambda dT) = dh(\Lambda T T' dT) = dh(B T' dT) = 0 \quad (4)$$

である。(3)式より、

$$T' dT = -(T' dT)' \quad (5)$$

であり、 $T' dT$ は歪対称(skew-symmetric)であることがわかる。(4)式は、 $T' dT$ が歪対称の行列について成立しなければならないことから、その r 行 s 列の要素が1で s 行 r 列の要素が-1で、他は0である $k \times k$ の行列 $(I_{rs} - I_{sr})$ を代入したものを $g_{rs}(r < s)$ とすると、

$$g_{rs} = dh(B(I_{rs} - I_{sr})) = \sum_{i=1}^p \left(\beta_{ir} \frac{\partial h}{\partial \beta_{is}} - \beta_{is} \frac{\partial h}{\partial \beta_{ir}} \right) = 0 \quad (r < s) \quad (6)$$

が得られる。ここで β_{ir} は B の i 行 r 列要素である。したがって、 h の具体的な形が与えられると(6)式から因子負荷の制約に関する具体的な形(後述の(10)式、(15)式)が得られることがわかる。

$g_{rs}(r < s)$ を要素として適当な順にならべたベクトルを \underline{g} とすると、 \underline{g} は B の関数 $\underline{g}(B)$ であり、

$$\underline{g}(B) = \underline{0} \quad (7)$$

が、直交回転後の因子負荷の制約をあらわしたものである。

Λ と Ψ における q 個の自由パラメータをならべたベクトルを $\underline{\theta}$ とあらわし、多変量正規分布に基づく対数尤度を l とする。(7)式に対応する $\underline{\theta}$ の制約を $\underline{g}(\underline{\theta}) = \underline{0}$ とし、拡大された情報行列 $I(\underline{\theta})$ の逆行列を次により求める(Jennrich, 1974)。

$$I(\underline{\theta})^{-1} = \begin{bmatrix} E\left(\frac{-\partial^2 l}{\partial \theta \partial \theta'}\right) & \frac{\partial \underline{g}'(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} \\ \frac{\partial \underline{g}(\underline{\theta})}{\partial \underline{\theta}} & 0 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} \bar{I} & * \\ * & * \end{bmatrix} \quad (8)$$

ここでアスタリスクは、そこに何らかの値が入ることを示す。 $q \times q$ の行列 \bar{I} は $\underline{g}(\underline{\theta}) = \underline{0}$ の制約のもとで得られた $\underline{\theta}$ の漸近分散共分散行列の推定値である。したがって、 \bar{I} の対角要素の平方根を $\underline{\theta}$ の標準誤差の推定値とする。

2.1 素オーソマックス

規準化を行わない素(raw)オーソマックス回転の場合、具体的な $\underline{g}(\underline{\theta})$ は次のようになる。オーソマックス

¹⁾ 情報行列に関しては竹内(1963)、また拡大された情報行列についてはSilvey (1975)が参考になる。

ス・ウェイトを w として、最大化基準を $h(B)$ とすると、

$$h(B) = \frac{1}{4} \sum_{i=1}^k \sum_{j=1}^p \left\{ \beta_{ij}^4 - \frac{w}{p} \left(\sum_{i=1}^k \beta_{ij}^2 \right)^2 \right\} \quad (9)$$

である。(6) 式から

$$g_{rs} = \sum_{i=1}^p \beta_{ir} \beta_{is} \left\{ (\beta_{is}^2 - \beta_{ir}^2) - \frac{w}{p} \sum_{j=1}^k (\beta_{js}^2 - \beta_{jr}^2) \right\} \quad (10)$$

である。ところで (10) 式の制約は、バリマックス回転に関する行列表現の結果 (Magnus & Neudecker, 1988; Neudecker, 1981; Sherin, 1966) から得ることができる。これは、バリマックス回転後の因子負荷の制約をラグランジュの未定乗数法を用いて得たものであるが、その未定乗数を消去することにより、

$$Q = (q_{ij}), \quad q_{ij} = \beta_{ij} \left(\beta_{ij}^2 - \frac{1}{p} \sum_{k=1}^p \beta_{kj}^2 \right) \quad (11)$$

とすると、

$$Q'B = B'Q \quad (12)$$

となる (Magnus & Neudecker, 1988, p. 375)。(12) 式は、 $w=1$ のバリマックス回転について得られたものであるが、(11) 式の $\frac{1}{p}$ を $\frac{w}{p}$ に置きかえても成立する。この場合、(12) 式と (10) 式は同等の結果を与えることが容易にわかる。

2.2 規準化オーソマックス

以上は、素オーソマックス回転後の因子負荷の制約に関して、すでに得られている結果である。これに対し、規準化オーソマックス法の因子負荷の制約は次のようになる。まず、 Λ の h 行 i 列の要素を λ_{hi} とし、共通性を対角要素とした対角行列を H とすると、

$$H = \text{diag} \left(\sum_{i=1}^k \lambda_{1i}^2, \dots, \sum_{i=1}^k \lambda_{pi}^2 \right) \quad (13)$$

であるが、規準化後の回転後因子負荷行列 $B^* = (\beta_{ij}^*)$ は

$$B^* = H^{-1/2} \Lambda T \quad (14)$$

である。規準化オーソマックス法の制約は、(10) 式の β_{ij} を β_{ij}^* で置きかえたものであり、

$$\begin{aligned} g_{rs} &= \sum_{i=1}^p \beta_{ir}^* \beta_{is}^* \left\{ (\beta_{is}^{*2} - \beta_{ir}^{*2}) - \frac{w}{p} \sum_{j=1}^k (\beta_{js}^{*2} - \beta_{jr}^{*2}) \right\} \\ &= \sum_{i=1}^p \left\{ \frac{\beta_{ir} \beta_{is} (\beta_{is}^2 - \beta_{ir}^2)}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} \right. \\ &\quad \left. - \frac{w}{p} \frac{\beta_{is} \beta_{ir}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} \sum_{j=1}^k \frac{\beta_{js}^2 - \beta_{jr}^2}{\sum_{m=1}^k \beta_{jm}^2} \right\} \end{aligned} \quad (15)$$

である。なお、規準化オーソマックス法では B^* の各行の共通性の大きさを回転前と同一となるようにもどすので、

$$B = H^{1/2} B^* = H^{1/2} H^{-1/2} \Lambda T = \Lambda T \quad (16)$$

である。(8) 式における $\frac{\partial g'(\theta)}{\partial \theta}$ は、(15) 式を用いると次のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{rs}}{\partial \beta_{ir}} &= \frac{\beta_{is}^3 - 3\beta_{is}\beta_{ir}^2}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} - \frac{4\beta_{ir}^2 \beta_{is} (\beta_{is}^2 - \beta_{ir}^2)}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^3} \\ &\quad - \frac{w}{p} \left\{ \left(\frac{\beta_{is}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} - \frac{2\beta_{ir}^2 \beta_{is}}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} \right) \left(\frac{\beta_{js}^2 - \beta_{jr}^2}{\sum_{m=1}^k \beta_{jm}^2} \right) \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\beta_{ir}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} \right) \left(\frac{2\beta_{ir}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} + \frac{2(\beta_{is}^2 - \beta_{ir}^2)\beta_{ir}}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} \right) \right\} \\ \frac{\partial g_{rs}}{\partial \beta_{is}} &= -\frac{\beta_{ir}^3 - 3\beta_{ir}\beta_{is}^2}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} + \frac{4\beta_{is}^2 \beta_{ir} (\beta_{ir}^2 - \beta_{is}^2)}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^3} \\ &\quad + \frac{w}{p} \left\{ \left(\frac{\beta_{ir}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} - \frac{2\beta_{is}^2 \beta_{ir}}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} \right) \sum_{j=1}^k \frac{\beta_{jr}^2 - \beta_{js}^2}{\sum_{m=1}^k \beta_{jm}^2} \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{\beta_{is} \beta_{ir}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} \right) \left(\frac{2\beta_{is}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} + \frac{2(\beta_{ir}^2 - \beta_{is}^2)\beta_{is}}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} \right) \right\} \\ \frac{\partial g_{rs}}{\partial \beta_{it}} \quad (i \neq r) &= -4\beta_{it} \beta_{ir} \beta_{is} \frac{\beta_{is}^2 - \beta_{ir}^2}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^3} \\ &\quad + \frac{w}{p} \left\{ \frac{2\beta_{it} \beta_{ir} \beta_{is}}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} \sum_{j=1}^k \frac{\beta_{js}^2 - \beta_{jr}^2}{\sum_{m=1}^k \beta_{jm}^2} \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{\beta_{ir} \beta_{it}}{\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2} \right) \frac{2(\beta_{is}^2 - \beta_{ir}^2)\beta_{it}}{\left(\sum_{m=1}^k \beta_{im}^2 \right)^2} \right\} \end{aligned}$$

以上の結果を (8) 式に代入すれば、規準化オーソマックス法における θ の標準誤差の漸近的な推定値が得られる。

3. 数値例と考察

3.1 尺度不変モデル

心理・教育測定においては、(1) 式のような分散共分散行列の因子分析モデルではなく、観測変数の尺度から自由な相関行列の因子分析モデルに関心があることが多い。また、オーソマックス法における Kaiser の規準化は、分散共分散行列のモデルにおいても形式上は採用することは可能であるが、意味のあるのは相関行列のモデルの場合であろう。そこで、ここでは、Jennrich (1974) に従い、尺度不変因子分析モデルを次のように記述する。

$$\Sigma = D(\Lambda\Lambda' + \text{Diag}(I - \Lambda\Lambda'))D \quad (17)$$

ここで D は、観測変数の標準偏差を対角要素とする対角行列である。Diag(・) はかっこ内の行列の対角要素をそのままとし、非対角要素をすべてゼロとした行列を意味する。 $\Lambda\Lambda' + \text{Diag}(I - \Lambda\Lambda')$ の対角要素は、すべて 1 であり、これは相関行列の因子分析モデルである。したがって、前節の θ には Ψ の対角要素はなくなり、 D の対角要素がこれにかわる新たなパラメータとなる。

3.2 逆ウェクスラー現象を示す人工例

因子回転の推測統計的な意味を強調し、体系的な説明を行ったのは、Jennrich (1973b) である。Jennrich は、N. Wexler の仕事を引き継ぎ、回転によって因子負荷の標準誤差が大きく変化する可能性があることを示している。すなわち、対角成分に共通性を入れた分散共分散行列の固有値が接近していると、回転前の因子負荷の標準誤差はきわめて大になる。極端なケースとして、固有値が等しい場合は、解は不定となる。しかし、単純構造等を目的に回転したときに、回転に関する最適化関数の値が大きく変化する場合は、回転後の因子負荷の標準誤差は回転前に比べて著しく小さくなる可能性がある。Jennrich は、これをウェクスラー現象と名付けている。

逆に回転によっても、回転に関する最適化関数が、あまり変化しない場合は、回転後の因子負荷の標準誤差は、一般に回転前に比べて大きくなる。Jennrich は、これを逆ウェクスラー現象と名付けている。

ここでは、規準化を含む因子回転後の因子負荷の標準誤差の算出の意味を、規準化の有無が標準誤差の大きさに著しく影響する例により示す。データとしては

Jennrich の人工例を因子分析モデルとしてより現実的になるようにやや変更した 2 つのケースを用いる。最初の例 (1) は、規準化することにより、逆ウェクスラー現象が現れる例である。Jennrich は、3 変量 2 因子 (成分) で、因子負荷平面において、原点を中心とする正三角形上の 3 点の座標を因子負荷とした場合、回転により、クォーティマックス基準が不変である例を用いているが、ここでは、原点を中心とする単位円上の正六角形の頂点の座標を用いる。すなわち、

$$\Lambda' = \begin{pmatrix} 1 & -a & -a & a & a & -1 \\ 0 & b & -b & b & -b & 0 \end{pmatrix}, \\ a = 1/2, b = \sqrt{3}/2 \cong .866$$

の因子負荷の値を 0.01 以内でノイズを加え変化させ、さらに共通性を次のように変更し、 Λ_A を作る。

$$\Lambda_A = \begin{pmatrix} 1.0 & & & & & \\ & .9 & & & & \\ & & .8 & & & \\ & & & .7 & & \\ 0 & & & & .6 & \\ & & & & & .5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} .99 & 0 \\ -.49 & .86 \\ -.51 & -.87 \\ .50 & .87 \\ .50 & -.86 \\ -.99 & 0 \end{pmatrix}$$

Λ_A を回転前の推定された因子負荷行列とみなし、オーソマックス回転を行った。分散共分散行列のモデルとしては、(17) 式のモデルを想定するが、 D の値にかかわらず、回転後の因子負荷とその標準誤差の推定値は不変である (付録 1 参照) ので、ここでは、 D の対角要素はすべて 1 とする。標準誤差の推定値は、回転後の因子負荷と標本の大きさのみに依存するが、標本数 $N=300$ を仮定する。

表 1 は、クォーティマックス回転後の結果である。規準化を行うと、因子負荷行列が大きく変化するだけでなく、標準誤差も著しく大きくなっていることがわかる。規準化しない場合と比べて標準誤差が 100 倍以上大となっている因子負荷もみられる。すなわち、規準化することによって逆ウェクスラー現象が現れたケースである。なお、 D の対角要素 (d_i) の標準誤差は因子回転により不変である ((8) 式参照)。表 2 はオーソマックス・ウェイトの意味のある範囲 $0 \sim p (=6)$ (Crawford & Ferguson, 1970) を 1 刻みで動かした場合の因子負荷の分散 (以下誤差分散とよぶ) の和である。規準化しない場合は誤差分散の和はオーソマックス・ウェイトによる相違はあまりないが、規準化すると 2,500~2,700 倍も大きくなっている。

表1. 因子負荷と標準誤差 (例1)

回転前因子負荷		共通性	回転後因子負荷 ($w=0$: クォーティマックス法)			
			素		規 準 化	
I	II		I	II	I	II
.990	.000	.980	.988(.032)	-.068(.132)	.871(4.129)	-.471(7.619)
-.441	.774	.794	-.386(.129)	.803(.079)	-.020(7.766)	.891(.175)
-.408	-.696	.651	-.455(.124)	-.666(.092)	-.690(3.663)	-.418(6.051)
.350	.609	.493	.391(.112)	.583(.083)	.598(3.235)	.369(5.247)
.300	-.516	.356	.264(.096)	-.536(.060)	.018(5.178)	-.597(.162)
-.495	.000	.245	-.494(.046)	.034(.080)	-.435(2.062)	.236(3.830)

注 かつこ内の値は標準誤差, d_i の標準誤差=.041。

表2. 因子負荷の分散の和 (例1)

w	素	規準化
0	.1063	269.23
1	.1055	270.29
2	.1047	271.36
3	.1041	272.43
4	.1036	273.50
5	.1031	274.58
6	.1027	275.66

注 w =オーソマックス・ウェイト。

次の例(2)も Jennrich の3変量2因子(成分)の例に基づくもので、クォーティマックス基準が回転により不変なケースであるが、ここでは、例(1)と同じく6変量にする。すなわち、

$$A' = \begin{pmatrix} a & -b & -b & 0 & b & b \\ 0 & b & -b & a & -b & b \end{pmatrix}$$

$$a=1, b=1/\sqrt{2\sqrt{2}} \approx .5946$$

をもとにし、 a, b の値を適宜.05以下変化させる。なお、標本の大きさは、例(1)と同じく $N=300$ とする。表3は、クォーティマックス回転前後の結果である。例(2)では規準化の有無により、回転後の因子負荷は大きな相違はないが、規準化しない場合の標準誤差は規準化した場合にくらべて、3~15倍程度大きくなっている。なお、規準化しない場合の標準誤差が大であることは、これらが因子負荷の値と同程度のものが多いことからわかるが、 D の対角要素の標準誤差が.041(例(1)と(2)に共通)で、推定値の約4%でしかないことからわかる。表4は、オーソマックス・ウェイトを0~6にした場合の誤差分散の和であるが、 w によって大きな

表3. 因子負荷と標準誤差 (例2)

回転前因子負荷		共通性	回転後因子負荷 ($w=0$: クォーティマックス法)			
			素		規 準 化	
I	II		I	II	I	II
.995	.000	.990	.760(.498)	-.642(.586)	.707(.035)	-.701(.035)
-.590	.600	.708	-.063(.633)	.839(.055)	.004(.040)	.841(.018)
-.595	-.590	.702	-.835(.057)	-.067(.630)	-.838(.019)	.000(.040)
.000	.990	.980	.639(.583)	.756(.496)	.697(.035)	.703(.035)
.590	-.590	.696	.070(.627)	-.831(.060)	.004(.040)	-.834(.019)
-.595	-.600	.714	-.842(.063)	-.074(.635)	-.845(.018)	-.007(.041)

注 かつこ内の値は標準誤差, d_i の標準誤差=.041。

表4. 因子負荷の分散の和 (例2)

w	素	規準化
0	2.785	.01287083
1	2.788	.01287058
2	2.790	.01287040
3	2.793	.01287029
4	2.795	.01287024
5	2.798	.01287025
6	2.801	.01287033

注 w =オーソマックス・ウェイト。

相違はなく、いずれも規準化しない場合は、規準化した場合の200倍以上となっている。

3.3 数値例が示すもの

データ解析の立場から、数値例が示すものを次にまとめる。

ここにはのせてないが、実際の例で計算した結果には因子負荷の標準誤差は規準化の有無により大きな変化がないものがあった(各変量の共通性が等しい場合は、規準化の有無によって回転後の因子負荷に相違はない)。これは、もともと因子負荷の推定値があまり大きな変化がなかったことにもよるが、人工例の例(2)のように規準化の有無により、因子負荷の推定値に大きな相違がなくても、標準誤差が大きく異なることがあるので注意が必要である。

回転後の因子負荷が標本誤差の影響を大きく受ける場合には、標本数が少ない場合があるが、これは因子回転と無関係なことである。同一の母集団から独立に得られた複数組のデータにおいて、回転前の因子の寄与に各データ内で十分大きな差があり、一方、データ間で回転前の因子パターンも似ているのに回転後の因子パターンがデータ間で大きく異なる場合があれば、因子回転の最適化関数が回転によりあまり変化しない、逆ウェクスラー現象があらわれている可能性がある。これを統計的に確かめるには、回転後の因子負荷の標準誤差を計算し、因子負荷の推定値と比較してみればよい。簡単のために、検定の多重性の問題を考慮しないで、あるひとつの因子負荷について考えると、因子負荷の推定値をその標準誤差の推定値で除した値は、因子負荷が0という仮説の下で漸近的に規準正規分布に従うので、その検定に用いることができる。

これとは逆に、回転前の因子パターンが、独立なデー

タ間の比較でみると不安定であるのに、回転後の結果が互いに類似して安定した結果が得られる場合(ウェクスラー現象)は、因子回転が解釈上の意味付けを与えるだけでなく、統計的な観点からも標本誤差を小さくしているというメリットを与えているケースである。これは、データ解析で機械的に回転を行っている場合には解析者にとって不都合もなく気付かれにくいことであるが、回転前の因子パターンを解釈するようなケースでは標本誤差の影響を大きく受けているので注意が必要である。

4. 若干の討議

因子分析モデルは、いわゆる共分散構造モデルのひとつとされるが、探索的因子分析が、共分散構造分析の文脈で扱われることは少ない。例えばCALIS(SAS Institute, 1990)では、4種類のオーソマックス法による直交回転法が提供されているのみである。また、数理統計学者による因子分析の成書では、回転はトピックスからはざされることがある(例えば、丘本, 1985)。これは、因子回転の理論が、推測統計的な観点から発生したのではなく、単純構造の概念にみられるように、因子の解釈という実質科学との接点から生じたものであることに関連していると考えられる。探索的因子分析は、今日、SASやBMDPのような統計パッケージで利用されることが多いが、共分散構造分析におけるような統計的扱いは少ない。共分散構造分析は因子分析を含む、より一般的なモデルとして発達しており、その意義は大であるが、探索的データ解析としての回転を含む探索的因子分析の方法の意義がこれによりなくなることは考えにくい。有用な共分散構造モデルを導くまでのデータ解析の基礎的なプロセスとして今後もその意味は残るものと考えられる。その意味でも因子回転に関連する推測統計的な分析は、理論的にもデータ解析の立場からも重要性が認められよう。

なお、本論文の方法を適用するためのコンピュータプログラムについては付録2で述べられている。

付 録

付録1. A の標準誤差の推定に関する補足

数値例においてあてはめた観測変数の分散共分散行列のモデルは、(17)式を想定している。したがって、通常はこのモデルの下で、データとして標本の分散共

分散行列を与え、パラメータ (D と Λ) を最尤法により推定するのであるが、 Λ の推定結果は、分散共分散行列の探索的因子分析モデル ($\Sigma = \Lambda^* \Lambda^{*'} + \Psi^*$) を想定し、標本の相関行列をデータとして与えた場合の Λ^* の最尤推定値と一致することが、次により示される。

1) 分散共分散行列に関する探索的因子分析モデルの最尤推定の結果では、 $\text{Diag}(\hat{\Sigma}) = \text{Diag}(S)$ (S は標本の分散共分散行列) となることが知られている (例えば柳井他, 1990 参照)。

2) したがって、標本の相関行列 (R) をデータとして与えた結果は $\text{Diag}(\hat{\Sigma}) = \text{Diag}(R) = I$ である。

3) 探索的因子分析モデルの Λ^* と Ψ^* と (17) 式の Λ と D の推定値の間には、最尤法の場合その性質より、 $\hat{\Lambda}^* = \hat{D}\hat{\Lambda}$ 、 $\hat{\Psi}^* = \hat{D}^2 \text{Diag}(I - \hat{\Lambda}\hat{\Lambda}')$ の関係がある。

4) 最尤法は尺度不変な推定法であり、2) のケースは (17) 式のモデルにおいて $\hat{D}^2 = \text{Diag}(\hat{\Sigma}) = I$ となるように尺度化したデータから得られた結果に対応している。このとき $\hat{\Lambda}^* = \hat{D}\hat{\Lambda} = \hat{\Lambda}$ である。

5) Λ の推定値の分散共分散行列の推定が、 D の推定値の分散共分散行列の推定と独立に行えることは次により示される。 l を前述のように対数尤度とする。(17) 式のモデルにおいて Λ に関する制約を一般的に $\underline{g}(\Lambda) = \underline{0}$ とした場合の拡大された情報行列の要素は次のように記述される。

$$\begin{aligned} E\left(\frac{-\partial^2 l}{\partial \lambda_{jk} \partial \lambda_{st}}\right) &= (N-1) \{ (R^{-1})_{sj} (\Lambda' R^{-1} \Lambda)_{kt} \\ &\quad + (R^{-1} \Lambda)_{sk} (R^{-1} \Lambda)_{jt} - 2\lambda_{jk} (R^{-1})_{sj} (R^{-1} \Lambda)_{jt} \\ &\quad - 2\lambda_{st} (R^{-1})_{sj} (R^{-1} \Lambda)_{sk} + 2\lambda_{jk} \lambda_{st} (R^{-1})_{js}^2 \} \\ E\left(\frac{-\partial^2 l}{\partial \lambda_{jk} \partial d_s}\right) &= \frac{N-1}{d_s} \{ (R^{-1})_{sj} \lambda_{sk} + \delta_{js} (R^{-1} \Lambda)_{jk} \\ &\quad - 2\delta_{js} \lambda_{jk} (R^{-1})_{jj} \} \\ E\left(\frac{-\partial^2 l}{\partial d_j \partial d_k}\right) &= \frac{N-1}{d_j d_k} \{ (R^{-1})_{jk} R_{jk} + \delta_{jk} \} \end{aligned}$$

ここで () の添え字はかつこの行列の要素を表わす。 $R = \Lambda \Lambda' + \text{Diag}(I - \Lambda \Lambda')$ 、 $\lambda_{jk} = (\Lambda)_{jk}$ 、 $d_k = (D)_{kk}$ であり、 δ_{jk} はクロネッカーのデルタ ($\delta_{js} = 1, j = s$; $\delta_{js} = 0, j \neq s$)、 N はデータ数である (以上の情報行列の要素の表現は Jennrich, 1974 を基にしている)。

したがって、拡大された情報行列 I は次のように表わせる。

$$\begin{aligned} I &= \begin{bmatrix} I_{pk \times pk} & 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{q \times q} \end{bmatrix} \\ &\times \begin{bmatrix} I(\Lambda, \Lambda) & I(\Lambda, D) & \partial \underline{g}'(\Lambda) / \partial \text{vec}(\Lambda) \\ I(\Lambda, D) & I(D, D) & 0 \\ \partial \underline{g}(\Lambda) / \partial \text{vec}(\Lambda) & 0 & 0 \end{bmatrix} \\ &\quad \times \begin{bmatrix} I_{pk \times pk} & 0 & 0 \\ 0 & D^{-1} & 0 \\ 0 & 0 & I_{q \times q} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ここで、 q は制約の数 (ベクトル $\underline{g}(\Lambda)$ の要素の数)、 $I_{q \times q}$ は $q \times q$ の単位行列、 $\text{vec}(\Lambda)$ は Λ の各列を順につなげてひとつの列にしたもの、 $I(\Lambda, \Lambda)$ 、 $I(\Lambda, D)$ 、 $I(D, D)$ はそれぞれ $E\left(\frac{-\partial^2 l}{\partial \lambda_{jk} \partial \lambda_{st}}\right)$ 、 $d_s E\left(\frac{-\partial^2 l}{\partial \lambda_{jk} \partial d_s}\right)$ 、 $d_j d_k E\left(\frac{-\partial^2 l}{\partial d_j \partial d_k}\right)$ を要素とする行列である。なお、上式の右辺中央の行列を $I(R)$ とすると $I(R)$ には D は含まれていない。 I の逆行列は、

$$I^{-1} = \begin{bmatrix} I_{pk \times pk} & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & I_{q \times q} \end{bmatrix} I^{-1}(R) \begin{bmatrix} I_{pk \times pk} & 0 & 0 \\ 0 & D & 0 \\ 0 & 0 & I_{q \times q} \end{bmatrix}$$

であり、 Λ の分散共分散行列に対応する部分 (I^{-1} の左上の $pk \times pk$ の部分行列) には D が含まれず、 R (すなわち Λ) のみにより求められることがわかる。

付録2. 計算のためのプログラムについて

本論文で求められるオーソマックス法の解 (規準化及び規準化のない場合) の標準誤差を求めるプログラムは著者あてに請求することにより、FORTRAN77 で記述されたソースリストを得ることができる。このプログラムは利用しやすいように、SAS や BMDP 等の統計解析パッケージから得られた結果を用いればよいようにしてある。すなわち、回転後の共通因子の因子負荷行列、データ数、回転法の種別 (オーソマックス・ウェイト)、規準化の有無のみを入力すればよい。しかし、回転前の結果は次の方法によって得ることが条件となる。

- 1) 因子分析の対象データは、分散共分散行列ではなく、相関行列であること
- 2) 回転前の解はいわゆる最尤解 (あるいはこれを回転したもの) であること

統計パッケージを利用する場合は、この両者を必ず、オプションで指定しなければならない。上記の入力

データには (17) 式の D の推定値は含まれていないが、 Λ の標準誤差の推定にこれが必要でない理由は、付録 I に述べられている。

謝 辞

広島大学工学部応用数学教室助教授佐藤 学氏には、原稿を丹念にお読み下さり、数多くの貴重なご助言とコメントを頂きました。ここに、心から感謝の気持ちを申し上げます。

参 考 文 献

- Archer, C.O., & Jennrich, R.I. (1973). Standard errors for rotated factor loadings. *Psychometrika*, **38**, 581-592.
- Crawford, C.B., & Ferguson, G.A. (1970). A general rotation criterion and its use in orthogonal rotation. *Psychometrika*, **35**, 321-332.
- Dixon, W.J. (Ed.) (1992). *BMDP statistical software manual*. Los Angeles: University of California Press.
- Harman, H.H. (1976). *Modern factor analysis* (3rd ed.). Chicago: University of Chicago Press.
- Jennrich, R.I. (1973a). Standard errors for obliquely rotated factor loadings. *Psychometrika*, **38**, 593-604.
- Jennrich, R.I. (1973b). On the stability of rotated factor loadings: The Wexler phenomenon. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **26**, 167-176.
- Jennrich, R.I. (1974). Simplified formulae for standard errors in maximum likelihood factor analysis. *British Journal of Mathematical and Statistical Psychology*, **27**, 122-131.
- Jennrich, R.I., & Thayer, D. (1973). A note on Lawley's formulas for standard errors in maximum likelihood factor analysis. *Psychometrika*, **38**, 571-580.
- Kaiser, H.F. (1958). The varimax criterion for analytic rotation in factor analysis. *Psychometrika*, **23**, 187-200.
- Lawley, D.N. (1967). Some new results in maximum likelihood factor analysis. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, A*, **67**, 256-264.
- Lawley, D.N., & Maxwell, A.E. (1971). *Factor analysis as a statistical method* (2nd ed.). London: Butterworth.
- Magnus, J.R., & Neudecker, H. (1988). *Matrix differential calculus with applications in statistics and econometrics*. New York: Wiley.
- Neudecker, H. (1981). On the matrix formulation of Kaiser's varimax criterion. *Psychometrika*, **46**, 343-345.
- 丘本 正 (1985). 因子分析の基礎. 日科技連.
- SAS Institute Inc. (1988). *SAS/STAT user's guide* (release 6.03 ed.). Cary NC: Author.
- SAS Institute Inc. (1990). *SAS/STAT software: CALIS and LOGISTIC procedure* (release 6.04 ed.), SAS technical report P-200. Cary NC: Author.
- Sherin, R.J. (1966). A matrix formulation of Kaiser's varimax criterion. *Psychometrika*, **31**, 535-538.
- 芝 祐順 (1979). 因子分析法 (第2版). 東京大学出版会.
- Silvey, S.D. (1975). *Statistical inference*. New York: Chapman & Hall.
- 竹内 啓 (1963). 数理統計学. 東洋経済新報社.
- 柳井晴夫・繁榎算男・前川眞一・市川雅教 (1990). 因子分析—その理論と方法—. 朝倉書店.

—1995年9月25日受付
1996年6月12日最終修正—