整数ナップサックの周期性について：補遺の補遺

飯田浩志*

整数ナップサック問題における最適解の周期性に関連して, 拙稿 [5] で提案した, 周期のはじまりを指示する重量制限の大きさへの上界について, 他の上界との比較をとおしてその有用性を探るべく, まずは, いかなる場合に優れているのか, その場合分けを試みる.

キーワード：組合せ最適化, 整数ナップサック問題, 最適解の周期性

整数ナップサック問題 (以降, UKP と記す [2, p. 6]) の重量制限 b が, ある b^{**} 以上のとき, その UKP が効率 (単位重量あたりの価値) 最大の項を少なくとも一つ含む最適解を持つことは, よく知られている．これを UKP の最適解の周期性といい, 拙稿 [4, 5] の主題であった.

古典的な 0–1 ナップサックにおいては各項 (品物) が一つずつしか用意されない一方で, 各項をいくつでも取れるとしたのが UKP である．変数 $x_j \in \mathbb{Z}_+ := \{0, 1, 2, \dots\}$ が項 j をナップサックに詰める個数を表すとして, UKP は $z = \max\{\sum_{j=1}^{n} v_j x_j \mid \sum_{j=1}^{n} w_j x_j \leq b;\ x_j \in \mathbb{Z}_+,\ j = 1, 2, \dots, n\}$ で定式化される．ここに, z を実現する n 次元ベクトル $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ を最適解という．以下では, 重量制限 b ならびにすべての価値 v_j および重量 w_j を正の整数と仮定する.† 加えて, UKP の支配関係 (dominance relations [2, 8.2 節][1]) を考慮し, $w_j \neq w_k$ $(1 \leq j < k \leq n)$ とする．また, 項 j の効率 $\rho_j := v_j/w_j$ とおき, 以後, Nemhauser and Wolsey [3, p. 433] および拙稿 [5] にならって $\rho_1 \geq \rho_2 \geq \cdots \geq \rho_n$ を, さらに $\rho_1 > \rho_2$ を仮定する.

---

* E-mail: `auau2.a.go.go@gmail.com`

† じつのところ v_j にあっては正であればよく, 整数性は使っていない.

さて拙稿 [5] では, 次を満たす UKP には最も効率の良い項 1 を含む最適解があると主張した:

$$b \geq \left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1 - \sum_{j=2}^{n}(w_{j-1}-w_j)\rho_j}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil . \tag{6}$$

では, この式 (6) が与える b^{**} への上界, すなわち (6) の右辺が Nemhauser and Wolsey [3] の II.6.1 節, 命題 1.2. (p. 435) で紹介されている上界

$$(w_1-1)\max_{j\neq 1} w_j \tag{7}$$

より悪くない——つまり, 以下である——のは, いかなる場合か. これについては, その形から, 次が成立することにはすぐ気づく.

補題 5.

$$w_2 \geq \frac{\rho_1}{\rho_1-\rho_2}\ , \quad w_1 > w_2 > \cdots > w_n$$

であれば, (6) が与える b^{**} への上界は, (7) より悪くない.

証明. 与えられた条件の下で,

$$\begin{aligned}&\left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1 - \sum_{j=2}^{n}(w_{j-1}-w_j)\rho_j}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil \\ &\quad\leq \left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil \leq (w_1-1)w_2 = (w_1-1)\max_{j\neq 1} w_j. \qquad \square\end{aligned}$$

条件 $w_2 \geq \rho_1/(\rho_1-\rho_2)$ の右辺には, 左辺の w_2 が隠れているけれども, ρ_2 を一定に保ったまま w_2 を大きくできるので, 実現不可能な条件というわけではない. 実際, $w_2 \geq \rho_1/(\rho_1-\rho_2) > 1$ に注意すると, $w_2 \geq \rho_1/(\rho_1-\rho_2)$ は $\rho_1 \geq v_2/(w_2-1)$ と書き換えることができる.

この補題 5 とよく似てはいるものの, 次も成り立つ.

補題 6.
$$w_1 \geq \frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2}\ , \quad w_2 > w_3 > \cdots > w_n$$
であれば, (6) が与える b^{**} への上界は, (7) より悪くない.

証明. まず, 条件 $w_2 > w_3 > \cdots > w_n$ から
$$\left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1 - \sum_{j=2}^{n}(w_{j-1}-w_j)\rho_j}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil \leq \left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1 - (w_1-w_2)\rho_2}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil$$
を得る. もうひとつの条件 $w_1 \geq \rho_1/(\rho_1-\rho_2) = \rho_2/(\rho_1-\rho_2)+1$ から, $\rho_2 \leq (w_1-1)(\rho_1-\rho_2)$. この両辺に w_2-1 ($w_2 \geq 1$ に注意) を乗じてから変形すると,
$$(w_1-1)\rho_1 - (w_1-w_2)\rho_2 \leq (w_1-1)w_2(\rho_1-\rho_2)$$
が出る. これから,
$$\left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1 - (w_1-w_2)\rho_2}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil \leq (w_1-1)w_2. \qquad \square$$

参考までに, 条件 $w_1 \geq \rho_1/(\rho_1-\rho_2)$ は $(1-1/w_1)\rho_1 \geq \rho_2$ とも書ける.

じつは, 補題 5 の条件を満足する $\rho_1, \rho_2, w_1, \ldots, w_n$ は補題 6 の条件をも満たすので, 補題 5 の証明は無用だった. さらに, 補題 6 の亜種として次がいえる.

補題 7. $n=3$ で

$$w_1 \geq \frac{\rho_1-\rho_3}{\rho_1-\rho_2}\ , \quad w_2 > w_3 = 1$$

であれば, (6) が与える b^{**} への上界は, (7) より悪くない.

証明は簡単で, 与えられた条件下では

$$\frac{(w_1-1)\rho_1-(w_1-w_2)\rho_2-(w_2-1)\rho_3}{\rho_1-\rho_2} \leq (w_1-1)w_2$$

が示せる (逆にたどってみるとよい. 途中, 左辺の分子の第二項を $-(w_1-1)\rho_2+(w_2-1)\rho_2$ と分けるのがポイント).‡

さらにもうひとつ, $n=2$ で $w_1 > w_2 = 1$ の場合をつけ加えておきたい.

さて, これらの他に, (6) が与える b^{**} への上界が (7) より好ましいのはどんな場合か. より直感的でわかりやすい (そして包括的な) 条件については, 今後の課題としたい.

また, 拙稿 [5] での議論をまとめると, b^{**} への上界として, (6) の右辺より大きくない

$$\left\lceil \frac{(w_1-1)\rho_1-\max_{1\leq k\leq n}\sum_{j=2}^{k}(w_{j-1}-w_j)\rho_j}{\rho_1-\rho_2} \right\rceil \tag{8}$$

を提案したともいえる (ただし $k=1$ のとき, 分子の第二項は 0 を表す. じつは, $k=1$ のみ考えた——つまり, 分子の第二項がない——(8) は, 拙稿 [5] の補題 3 で示した b^{**} への上界である). こちらと (7) との比較についても,

‡ 補題 7 の一般化のひとつとして, ほぼ同様の証明から: $n \geq 3$, $w_1 \geq (\rho_1-\rho_3)/(\rho_1-\rho_2)$, $\max_{j\neq 1} w_j = w_2$, $w_n = 1$, $\rho_3=\rho_4=\cdots=\rho_n$ ならば, (6) の右辺は (7) 以下といえる. とはいえ, かなりきつい条件なので, さほど使い道があるようには見えない. ただし, (6) の右辺ではなく後述する (8) を対象としたとき, 上記の一般化された補題 7 の条件は: $w_1 \geq (\rho_1-\rho_3)/(\rho_1-\rho_2)$ と $\max_{j\neq 1} w_j = w_2$ はそのままで, $w_k = 1$ かつ $\rho_3=\rho_4=\cdots=\rho_k$ を満たす k $(3 \leq k \leq n)$ が存在すれば——(8) は (7) 以下である——と若干緩和される.

今後の課題としたい．いわずもがな，ここで示した補題 5–7 (ともうひとつ) の場合，(8) は (7) より悪く (大きく) ない．加えて，

$$\frac{\rho_1}{\rho_1 - \rho_2} \leq \max_{j \neq 1} w_j$$

も，我々の求める条件である．このことは，先に言及した，式 (8) で $k = 1$ のみ考えたもの——もちろん，それは (6) の右辺と同様に，(8) 以上である——と (7) を見比べればすぐに分かる．ときに，この条件は補題 5 のそれとよく似ている．その差異は，(6) の右辺では項 n まで考慮せざるを得ないという枷(かせ)がある一方，(8) では勝手な k $(1 \leq k \leq n)$ を固定して考えられる利点があることに因(よ)る．

同様のことが補題 6 と 7 からも引き出せる．具体的には，(6) の右辺の代わりに (8) を対象とすることで，補題 6 の条件は，$w_1 \geq \rho_1/(\rho_1 - \rho_2)$, $\max_{j \neq 1} w_j = w_2$ ならば；他方，補題 7 の条件は，$w_1 \geq (\rho_1 - \rho_3)/(\rho_1 - \rho_2)$, $\max_{j \neq 1} w_j = w_2$, $w_3 = 1$ ならば，それぞれ，(8) は (7) 以下といえる．

もうひとつ，(6) の右辺について考察した $n = 2$, $w_2 = 1$ の場合と同様にして，$w_2 = 1$ が挙げられる．要するに $w_2 = 1$ のとき，$k = 2$ のみ考えた (8)——拙稿 [5] の補題 4 で示した b^{**} への上界——は $w_1 - 1$ に等しいので，$\max_{j \neq 1} w_j$ (≥ 1) が掛かる (7) の方が不利である．

参考文献

[1] H. Iida, Two topics in dominance relations for the unbounded knapsack problem. *Open Applied Mathematics Journal* **2**, 16-9 (2008) [doi:10.2174/1874114200802010016].

[2] H. Kellerer, U. Pferschy and D. Pisinger, *Knapsack Problems.* Springer 2004.

[3] G. L. Nemhauser and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization.* paperback reprinted, Wiley-Interscience 1999.

[4] 飯田, 整数ナップサックの周期性について. Discussion paper series no. 118, 小樽商科大学ビジネス創造センタ, 2009; ⟨http://hdl.handle.net/10252/2207⟩ から入手可能.

[5] 飯田, Discussion paper series no. 118 への補遺. Discussion paper series no. 119, 小樽商科大学ビジネス創造センタ, 2009; ⟨http://hdl.handle.net/10252/2791⟩ から入手可能.