大規模複雑なシステムの
最適化理論と均衡化理論

奥　田　和　重

1．緒　　論

大規模複雑なシステムを対象にした従来の最適化手法は，分割原理［1］みられるように部分システム間の相互関係を満たし，システム全体の最適化を達成することを統合原則としている。そのために分割原理では，部分システムの最適性をある程度犠牲にすることによってシステム全体の最適化を達成している。自律した部分システムが独自の目的関数に基づいて最適化を達成しょうとするとき，このような方法では部分システムの最適性は保証されない。

本論文では，大規模複雑なシステムに対する上記のような従来の最適化法の問題点を指摘し，指摘した問題点を解決するための方法を提案する。それは「システム全体の最適化」の概念に代る「部分システム間の均衡化」の概念である。この均衡化を達成するために，本論文ではゲーム理論の一分野である非協力ゲームを適用し，決定に優先権がない場合のNash均衡解と，決定に優先権がある場合のStackelberg均衡解を得るための条件を導き，その妥当性について検討する。

2．最適化理論

2．1　最適化問題

最適化問題を一般的に記述すると次のようになる。

$$\text{Min. } f(\boldsymbol{x}) \tag{1}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}) \leq \boldsymbol{b} \tag{2}$$

$$\boldsymbol{h}(\boldsymbol{x}) \leq 0 \tag{3}$$

$$\boldsymbol{x} \geq 0 \tag{4}$$

ここで $\boldsymbol{x}\in R^n$, $\boldsymbol{b}\in R^l$, $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ は m 次ベクトル関数, $n=\sum_{i=1}^m n_i$ である。この最適化問題が

$$\text{Min. } \sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x}_i)$$

$$\text{sub. to } \sum_{i=1}^{m} g_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b}$$

$$h_i(\boldsymbol{x}_i) \leq 0, \quad i=1,\cdots,m$$

$$\boldsymbol{x}_i \geq 0, \quad i=1,\cdots,m$$

と書き換えることができ，これが m 個の部分最適化問題

$$\text{Min. } f_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{9}$$

$$\text{sub. to } g_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b}_i \tag{10}$$

$$h_i(\boldsymbol{x}_i) \leq 0 \tag{11}$$

$$\boldsymbol{x}_i \geq 0 \tag{12}$$

に分割できる場合を考える。ここで $\boldsymbol{x}_i\in R^{n_i}$, $\boldsymbol{b}_i\in R^l$, $\sum_{i=1}^m \boldsymbol{b}_i=\boldsymbol{b}$ である。また $X_i=\{\boldsymbol{x}_i\in R^{n_i} \mid g_i(\boldsymbol{x}_i)\leq \boldsymbol{b}_i,\ h_i(\boldsymbol{x}_i)\leq 0,\ \boldsymbol{x}_i\geq 0\}$ とする。大規模複雑なシステムは，その最適化問題の決定変数 $\boldsymbol{x}$ や制約条件式 $\boldsymbol{g}$, $\boldsymbol{h}$ の数が単に多いという規模の大きさだけでなく，式(9)〜(12)の部分最適化問題で記述できる局所性を持つ部分システムの存在を認識できるシステムである。

2．2　分割原理による最適化

大規模複雑なシステムを対象にした従来の最適化手法は，分割原理にみられるように部分システム間の相互関係を満たすために，それらを統合するコーディネータを部分システムの上位に設置している。このコーディネータは部分

システム間の相互関係を満たし，かつシステム全体を最適にするために部分システム間の調整を行う。すなわち，式(5)~(8)の最適化問題に対する Lagrange 関数を

$$L(\boldsymbol{x}_i, \lambda) \triangleq \sum_{i=1}^{m} f_i(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{\lambda}^{\top}\left(\sum_{i=1}^{m} g_i(\boldsymbol{x}_i) - \boldsymbol{b}\right) + \sum_{i=1}^{m} \mu_i{}^{\top} h_i(\boldsymbol{x}_i)$$
$$= \sum_{i=1}^{m} \{f_i(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{\lambda}^{\top} g_i(\boldsymbol{x}_i) + \mu_i{}^{\top} h_i(\boldsymbol{x}_i)\} - \boldsymbol{\lambda}^{\top} \boldsymbol{b} \tag{13}$$

と定義すると，部分最適化問題は次のようになる。

$$\text{Min. } f_i(\boldsymbol{x}_i) + \boldsymbol{\lambda}^{\top} g_i(\boldsymbol{x}_i) \tag{14}$$
$$\text{sub. to } h_i(\boldsymbol{x}_i) \leq 0 \tag{15}$$
$$\boldsymbol{x}_i \geq 0 \tag{16}$$

ここで $\lambda \in R^{l}$，$\mu_i \in R^{k_i}$ は Lagrange 乗数である。

これは Lagrange 乗数 λ を統合変数とするもので，コーディネータはシステム全体の最適化を達成するために統合変数 λ を適当に定める（図 1）。この方法は "価格による統合" と呼ばれており，この方法以外にも $\boldsymbol{b}_i$ を統合変数とした "資源配分による統合" などがある。

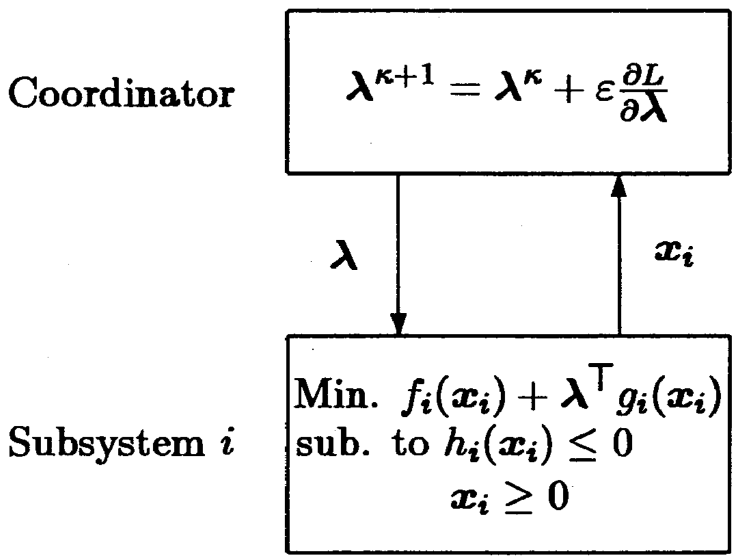

図 1　価格による統合（κ：繰返し回数，ε ステップ幅）

2．3 考 察

これらの統合原則では，システム全体の最適化問題が与えられているとき，式(1)のシステム全体の目的関数と式(2)，(3)の制約条件が式(5)〜(7)のように分離して記述することができるという"分割可能性に関する前提条件"，あるいは逆にシステム全体の最適化問題が存在せず，式(9)の部分システムの目的関数と式(10)の制約条件式が式(5)，(6)のように加算することができるという"加算性に関する前提条件"を必要としている。前記の統合原則は，この前提条件に基づいて行われるのであるが，従来の研究でこれらの前提条件を明示しているものはほとんどない。これは，システム全体の目的関数$f(\boldsymbol{x})$が存在するか，あるいは$f(\boldsymbol{x})=\phi(f_1(\boldsymbol{x}_1), f_2(\boldsymbol{x}_2), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}_m))$というようにシステム全体の目的関数を部分システムの目的関数を持いて構成することができる，という仮定を暗黙のうちに認知していることによる。

システム全体の目的関数がすでに存在している場合，これを分割して小規模な最適化問題をいくつか作成することは，計算効率の立場からその必要性を認識することができる。他方，部分システムの目的関数のみが存在し，システム全体の目的関数が存在しない場合，前述の加算性に関する前提条件の妥当性と共に，システム全体の目的関数を構成することができるのかという問題点を検討する必要がある。経済学［2］や組織論［3］，システム理論［4］ではシステム全体の目的関数が存在しない場合の最適化問題が論じられている。

これらの議論は，部分システムの目的関数によってシステム全体の目的関数が必ずしも構成できないこと，すなわち$f(\boldsymbol{x})=\phi(f_1(\boldsymbol{x}_1), f_2(\boldsymbol{x}_2), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}_m))$が成り立たないことを示唆している。とくに部分システムの自律性が高い自律分散システムなどの場合，部分システムが独自の目的関数を最適にしょうとするとき，加算性に関する前提条件などによってシステム全体の目的関数を構成し，システム全体の最適化を行うと，部分システムの最適化が達成される保証はない。このように部分システムの目的関数でシステム全体の目的関数を構成できる保証はなく，たとえ構成できるとしても，部分システムの最適化を達成できるという保証もない。

分割原理では，部分システム間の相互関係の調整は上位レベルのコーディネータが行うので，部分システムはコーディネータによって提示された統合変数を用いて式(14)〜(16)で与えられる最適化問題を他の部分システムとは独立して最適化を行う。したがって，他の部分システムの変化はコーディネータの統合変数の変化を通じて知ることになるので，最適化の繰り返し過程で変化に対する反応が遅れる。これは各部分システムの情報がコーディネータに集中しているためで，部分システムはコーディネータがこれらの情報に基づいて決定した統合変数を介して間接的にしかその変化を知ることができないからである。

2．4　多目的最適化，同時最適化

あるシステムを異なった視点に基づいて記述することをストレータと呼ぶ（図２）［５］。ストレータ化されたシステムは，相互関係を持つ複数の部分システムで構成され，システム全体の目的関数が定義されない場合がある。あるシステムを相互関係が存在する異なったいくつかの最適化問題で記述することができ，それらの最適化問題を同時に最適化する場合などがストレータ化の例である。このようなシステム全体の目的関数が存在せず，部分システムのみが目的関数を持ち，部分システム間に相互関係が存在する最適化問題の場合，意

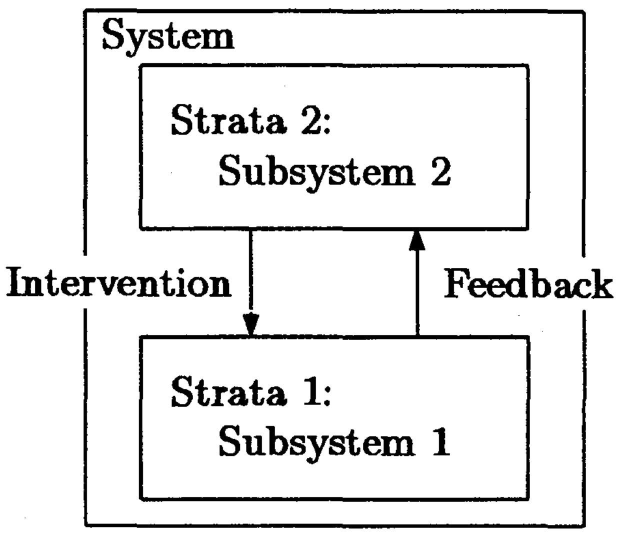

図２　ストレータによる記述

思決定主体について検討する必要がある。

システム全体に対して意思決定主体が唯一であり，かつ部分システムの目的関数が競合している場合,最適化問題は下記のような多目的最適化問題となる。

$$\text{Min. } f(\boldsymbol{x}) = (f_1(\boldsymbol{x}_1), f_2(\boldsymbol{x}_2), \cdots, f_m(\boldsymbol{x}_m))^\top \tag{17}$$

$$\text{sub. to } \sum_{i=1}^{m} g_i(\boldsymbol{x}_i) \leq \boldsymbol{b} \tag{18}$$

$$h_i(\boldsymbol{x}_i) \leq 0, \quad i=1,\cdots,m \tag{19}$$

$$\boldsymbol{x}_i \geq 0, \quad i=1,\cdots,m \tag{20}$$

この場合，意思決定主体はパレート最適解の中から妥協解を合理的に見いだす必要がある［6］。この妥協解を選択するための基準が明確であれば，式［17］で与えられるベクトル目的関数はスカラー化することができ，問題は単一目的最適化問題となる。妥協解を選択するための基準は一般的には明確でないので，これを行うために例えばHaimesらが提案しているSWT法［7］のように意思決定主体のパレート解に対する評価を定量化する必要がある。SWT法では意思決定主体の評価基準の連続性を仮定して代用価値関数を近似的に求めているが，この仮定には無理があるといえる。

意思決定主体が各部分システムに存在している場合，すなわちシステム全体では複数の意思決定主体が存在するとき，各部分システムの意思決定主体は部分システム間の相互関係を満たすように自らの目的関数を最適にしなければならない。このときの部分システムの最適化問題は，m個の最適化問題を同時に最適化する次のような同時最適化問題となる。

$$\text{Min. } f_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) \tag{21}$$

$$\text{sub. to } g_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) \tag{22}$$

$$h_i(\boldsymbol{x}_i) \leq 0 \tag{23}$$

$$\boldsymbol{x}_i \geq 0 \tag{24}$$

このような状況では，部分システムの意思決定主体は他の部分システムの最適

決定 $x_j^*, j \neq i, j=1,\cdots,m$ を知る必要がある。いま，すべての $x_j^* \in X_j$ に対して

$$
\begin{aligned}
&r_i(x_1^*,\cdots,x_{i-1}^*,x_{i+1}^*,\cdots,x_m^*)\\
&\quad=\{x_i^* \in X_i \mid f_i(x_1^*,\cdots,x_{i-1}^*,x_i^*,x_{i+1}^*,\cdots,x_m^*)\\
&\qquad\qquad \leq f_i(x_1^*,\cdots,x_{i-1}^*,x_i,x_{i+1}^*,\cdots,x_m^*)\}
\end{aligned}
\tag{25}
$$

を定義する。この r_i は（最適）反応戦略集合と呼ばれ，すべての $x_j \in X_j$ に対して r_i が唯一存在するとき，r_i を反応関数という。各意思決定主体は，他の部分システムの決定 x_j^* を推測してこの反応戦略集合に基づいて自らの決定を行わなければならない。この推測に基づいて行われた決定は他の部分システムによって推測されるので，部分システムの間で推測が繰り返されることになる。

3．均衡化理論

3．1　情報交換と均衡解

本章ではシステム全体の目的関数が存在せず，各部分システムに意思決定主体が存在する場合を取り上げる。システム全体の目的関数が存在しない場合，部分システムの情報が集中するコーディネータが存在しないので，部分システム間の相互関係を満たすように部分システムが調整しなければならない。これを行うために，各部分システムが持つ情報（目的関数や制約条件の構造，係数の値など）を最適化を行う前に互いに交換すれば，相互関係を満たす最適決定を行うことができる。このような決定問題はゲーム的決定問題［8］と呼ばれ，ゲーム理論における非協力ゲームの理論を適用することができる。とくにある意思決定主体が他の意思決定主体の決定のもとに自らの決定を行うときを”決定に優先権がある”といい，そのときの解を Stackelberg 均衡解といい，決定に優先権がない場合の解を Nash 均衡解という。

部分システム間で交換できる情報には，最適決定を行う前に知ることのできる事前情報と，最適決定後に初めて明らかになる事後情報がある。前者は目的関数や制約条件式の構造，あるいはデータとしてあらかじめ与えられている係

数の値，過去の決定変数の値などであり，後者は最適化問題を解くことによって決定される変数の値やそのときの目的関数の値などである。各部分システムは他の部分システムの事後情報を最適決定前には知ることができないので，情報交換が全くなされなければ，推測の繰り返しとなる。各部分システムが事前情報を部分システム間で交換することによって相互関係の調整を行うことができれば，部分システムの最適解を得ることができる。このようにして得た最適解は部分システム間の相互関係を満たしているが，システム全体の最適解には必ずしもなっていないので，本論文ではこれを”均衡解”と呼び，この均衡解を求めることを”均衡化”と呼ぶことにする。

3．2　非協力ゲームによる均衡化

3．2．1　決定に優先権がない場合の均衡化

部分システムの決定に優先権がないときの均衡解はNash均衡解として知られており，次のように定義される。

> m 個の部分システムがNash均衡解を採用しているとき，いずれの部分システムについても自己の目的関数を改良するような解は存在しない。

この定義を式(21)を用いて表現すると以下のようになる。

$\forall x_i \in X_i^N$,$i = 1, \cdots, m$ に対して

$$f_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_i^*, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) \leq f_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) \quad (26)$$

であれば，このとき $\boldsymbol{x}_i^* \in X_i^N$ はNash均衡解である［9］。ここで

$X_i^N = \{\boldsymbol{x}_i \in R^{n_i} \mid g_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_{i-1}^*, \boldsymbol{x}_i, \boldsymbol{x}_{i+1}^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) \leq \boldsymbol{b}_i,\ h_i(\boldsymbol{x}_i) \leq 0,\ \boldsymbol{x}_i \geq 0\}$

である。いいかえれば，式(26)は，m 個の部分システムの相互関係を満たす均衡解を得るためには，それぞれの均衡化問題が同時に均衡化されなければならないことを意味している。このNash均衡解の存在性はNash自身によって証明されており，存在定理の証明は［10］で不動点定理を用いて証明されている。

式(21)～(24)で記述される部分システムの均衡化問題のLagrange関数を

$$Li(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m, \boldsymbol{\lambda}_i, \boldsymbol{\mu}_i) \triangleq f_i(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m) + \boldsymbol{\lambda}_i^\top (g_i(\boldsymbol{x}_1, \cdots, \boldsymbol{x}_m) - \boldsymbol{b}_i) + \boldsymbol{\mu}_i{}^\top h_i(\boldsymbol{x}_i)$$

と定義すると，式(26)によって定義される $\boldsymbol{x}_i{}^*$，$i=1, \cdots, \mathrm{m}$ が均衡化問題の Nash 均衡解であるための必要条件は $\forall i$ に対して以下のようである。

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{x}_i} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} f_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) + \boldsymbol{\lambda}_i^{*\top} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} g_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) + \boldsymbol{\mu}_i^{*\top} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_i} h_i(\boldsymbol{x}_i^*) = 0 \tag{27}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\lambda}_i} = g_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) - \boldsymbol{b}_i \leq 0 \tag{28}$$

$$\frac{\partial L_i}{\partial \boldsymbol{\mu}_i} = h_i(\boldsymbol{x}_i^*) \leq 0 \tag{29}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^{*\top} (g_i(\boldsymbol{x}_1^*, \cdots, \boldsymbol{x}_m^*) - \boldsymbol{b}_i) = 0 \tag{30}$$

$$\boldsymbol{\mu}_i^{*\top} h_i(\boldsymbol{x}_i^*) = 0 \tag{31}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_i^* \geq 0,\ \boldsymbol{\mu}_i^* \geq 0 \tag{32}$$

一般的には，式(27)～(32)の必要条件を満たす Nash 均衡解は唯一には定まらず，解集合の形になる。しかしながら，部分システムの均衡化問題がある種の２次計画問題のとき，Nash 均衡解は唯一存在することが知られている［11］。

３．２．２　決定に優先権がある場合の均衡化

Stackelberg 均衡解［12］は，次のような規則のもとで決定が行われる［13］。

> 決定に先手（leader）と後手（follower）の区別があり，先手が戦略を示した後に，後手がそれを知って自分の戦略を決定し，ゲームは終了する。

これは先手である部分システムにとって最も良好な解を合理的に決定するための規則である。後手である部分システムは先手に対して受動的で，先手が示した解のもとで自らの問題を最適化する。

いま，部分システムが２つの場合（$n=2$）を考える。部分システム１が先手で決定に優先権があり，部分システム２が後手であるとする。部分システム

2は部分システム1の任意の決定 $\boldsymbol{x}_1^S \in X_1$ に対して，

$$f_2(\boldsymbol{x}_1^S, \boldsymbol{x}_2^S) \leq f_2(\boldsymbol{x}_1^S, \boldsymbol{x}_2),\ \boldsymbol{x}_2 \in X_2 \tag{33}$$

となるように $\boldsymbol{x}_2^S = T(\boldsymbol{x}_1^S)$ を選ぶ。ここで $T(\cdot)$は任意の関数である。このとき

$$f_1(\boldsymbol{x}_1^S, T(\boldsymbol{x}_1^S)) \leq f_1(\boldsymbol{x}_1, T(\boldsymbol{x}_1)),\ \boldsymbol{x}_1 \in X_1 \tag{34}$$

となるような $\boldsymbol{x}_1^S \in X_1$, $\boldsymbol{x}_2^S = T(\boldsymbol{x}_1^S)$ が存在すれば，$(\boldsymbol{x}_1^S, \boldsymbol{x}_2^S)$は部分システム1を先手とするStackelberg均衡解である。この均衡解の存在性については［14］で証明されている。

部分システム2の均衡化問題は，任意の $\boldsymbol{x}_1^0 \in X_1$ に対して

$$\text{Min. } f_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2) \tag{35}$$

$$\text{sub. to } g_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2) \leq \boldsymbol{b}_2 \tag{36}$$

$$h_2(\boldsymbol{x}_2) \leq 0 \tag{37}$$

$$\boldsymbol{x}_2 \geq 0 \tag{38}$$

と書くことができる。この問題に対するLagrange関数は

$$L_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2, \lambda_2, \mu_2) \triangleq f_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2) + \boldsymbol{\lambda}_2^\top (g_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2) - \boldsymbol{b}_2) + \mu_2^\top h_2(\boldsymbol{x}_2)$$

これより最適性の条件は以下のようになる。

$$\frac{\partial L_2}{\partial \boldsymbol{x}_2} = \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} f_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^*) + \boldsymbol{\lambda}_2^{*\top} \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} g_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^*)$$

$$+ \mu^*{}_2{}^\top \frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_2} h_2(\boldsymbol{x}_2^*) = 0 \tag{39}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \boldsymbol{\lambda}_2} = g_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^*) - \boldsymbol{b}_2 \leq 0 \tag{40}$$

$$\frac{\partial L_2}{\partial \mu_2} = h_2(\boldsymbol{x}_2^*) \leq 0 \tag{41}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2^{*\top} (g_2(\boldsymbol{x}_1^0, \boldsymbol{x}_2^*) - \boldsymbol{b}_2) = 0 \tag{42}$$

$$\boldsymbol{\mu}_2^{*\top} \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2^*)=0 \tag{43}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_2^* \geq 0,\ \boldsymbol{\mu}_2^* \geq 0 \tag{44}$$

決定に優先権のある部分システム 1 の均衡化問題は，上記の部分システム 2 の最適条件式を考慮して次のようになる。

$$\text{Min. } f_1(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) \tag{45}$$

$$\text{sub. to } \boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) \leq \boldsymbol{b}_1 \tag{46}$$

$$\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) \leq 0 \tag{47}$$

$$\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\lambda}_2^\top \frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\mu}_2^\top \frac{\partial h_2}{\partial x_2}=0 \tag{48}$$

$$\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2) \leq \boldsymbol{b}_2 \tag{49}$$

$$\boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2) \leq 0 \tag{50}$$

$$\boldsymbol{x}_1 \geq 0 \tag{51}$$

この問題の Lagrange 関数は

$$\begin{aligned} &L_1(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2,\ \boldsymbol{\lambda}_1,\ \boldsymbol{\lambda}_2,\ \boldsymbol{\mu}_1,\ \boldsymbol{\mu}_2,\ \boldsymbol{\nu}_1,\ \boldsymbol{\nu}_2,\ \boldsymbol{\nu}_3) \\ &\triangleq f_1(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)+\boldsymbol{\lambda}_1^\top (\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{b}_1)+\boldsymbol{\mu}_1^\top \boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1) \\ &\quad +\boldsymbol{\nu}_1^\top\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\lambda}_2^\top \frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\mu}_2^\top \frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right)+\boldsymbol{\nu}_2^\top (\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1,\ \boldsymbol{x}_2)-\boldsymbol{b}_2)+\boldsymbol{\nu}_3^\top \boldsymbol{h}_2(\boldsymbol{x}_2) \end{aligned}$$

となる。これより最適性の条件は，以下のようになる。

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial \boldsymbol{x}_1}=&\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1} f_1(\boldsymbol{x}_1^S,\ \boldsymbol{x}_2^S)+\boldsymbol{\lambda}_1^{S\top}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\boldsymbol{g}_1(\boldsymbol{x}_1^S,\ \boldsymbol{x}_2^S)+\boldsymbol{\mu}_1^{S\top}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\boldsymbol{h}_1(\boldsymbol{x}_1^S) \\ &+\boldsymbol{\nu}_1^{S\top}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\left(\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\lambda}_2^{S\top}\frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\mu}_2^{S\top}\frac{\partial h_2}{\partial x_2}\right) \\ &+\boldsymbol{\nu}_2^{S\top}\frac{\partial}{\partial \boldsymbol{x}_1}\boldsymbol{g}_2(\boldsymbol{x}_1^S,\ \boldsymbol{x}_2^S)=0 \end{aligned} \tag{52}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \lambda_1}=g_1(\boldsymbol{x}_1^S,\ \boldsymbol{x}_2^S)-\boldsymbol{b}_1\leq 0 \tag{53}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \mu_1}=h_1(\boldsymbol{x}_1^S)\leq 0 \tag{54}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \nu_1}=\frac{\partial f_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\lambda}_2^{S\top}\frac{\partial g_2}{\partial x_2}+\boldsymbol{\mu}_2^{S\top}\frac{\partial h_2}{\partial x_2}=0 \tag{55}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \nu_2}=g_2(\boldsymbol{x}_1^S,\ \boldsymbol{x}_2^S)-\boldsymbol{b}_2\leq 0 \tag{56}$$

$$\frac{\partial L_1}{\partial \nu_3}=h_2(\boldsymbol{x}_2^S)\leq 0 \tag{57}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1^{S\top}(g_1(\boldsymbol{x}_1^S,\ \boldsymbol{x}_2^S)-\boldsymbol{b}_1)=0 \tag{58}$$

$$\boldsymbol{\mu}_1^{S\top}h_1(\boldsymbol{x}_1^S)=0 \tag{59}$$

$$\boldsymbol{\nu}_2^{S\top}(g_2(\boldsymbol{x}_1^S,\ \boldsymbol{x}_2^S)-\boldsymbol{b}_2)=0 \tag{60}$$

$$\boldsymbol{\nu}_3^{S\top}h_2(\boldsymbol{x}_2^S)=0 \tag{61}$$

$$\boldsymbol{\lambda}_1^S\geq 0,\ \boldsymbol{\lambda}_2^S\geq 0,\ \boldsymbol{\mu}_1^S\geq 0,\ \boldsymbol{\mu}_2^S\geq 0, \boldsymbol{\nu}_1^S\geq 0,\ \boldsymbol{\nu}_2^S\geq 0,\ \boldsymbol{\nu}_3^S\geq 0 \tag{62}$$

この条件において，$\boldsymbol{x}_2^S$，$\boldsymbol{\lambda}_2^S$，$\boldsymbol{\mu}_2^S$が，たとえば任意の関数 $T(\cdot)$，$H(\cdot)$，$K(\cdot)$ を用いて$\boldsymbol{x}_2^S=T(\boldsymbol{x}_1^S)$，$\boldsymbol{\lambda}_2^S=H(\boldsymbol{x}_1^S)$，$\boldsymbol{\mu}_2^S=K(\boldsymbol{x}_1^S)$ と陽的に表すことができれば，式(52)〜(62)は，$\boldsymbol{x}_1$，$\boldsymbol{\lambda}_1$，$\boldsymbol{\mu}_1$，$\boldsymbol{\nu}_1$，$\boldsymbol{\nu}_2$，$\boldsymbol{\nu}_3$ について解くことができる。

f_i，g_i，h_i がともに線形関数である場合 [15] と，先手の最適化問題が線形計画問題で，後手の最適化問題が2次計画問題のときの最適化解析が行われている [16]。

3．3 考　察

いままでに述べてきた均衡化問題の妥当性を検討するために，2つの部分システムで構成されるシステムを考える。各部分システムの最適化問題は次のようであるとする。

部分システム1：

$$\text{Max. } f_1(x_1,\ x_2)=-\frac{1}{2}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+10x_1+14x_2 \tag{63}$$

部分システム２：

$$\text{Max. } f_2(x_1, x_2) = -\frac{1}{2}(2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2) + 15x_1 + 12x_2 \qquad (64)$$

f_1とf_2を図示すると図３のようになる。点Ａは部分システム１を単独で最適化したときのの最適解で$x_1^*=4$，$x_2^*=12$，$f_1^*(x_1^*, x_2^*)=104$である。点Ｂは部分システム２の最適解で$x_1^*=3$，$x_2^*=9$，$f_2^*(x_1^*, x_2^*)=79.5$ である。

f_1，f_2が加算可能で，次のようにシステム全体の目的関数$f(x_1, x_2)$を$f_1(x_1, x_2)$と$f_2(x_1, x_2)$によって構成できるとする。

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f_1(x_1, x_2) + f_2(x_1, x_2) \\ &= -\frac{1}{2}(3x_1^2 + 3x_1x_2 + 2x_2^2) + 25x_1 + 26x_2 \end{aligned} \qquad (65)$$

これを最大にする最適解は図中の点Ｃで $x_1^g = \frac{44}{15}$，$x_2^g = \frac{54}{5}$ であり，そのときの各部分システムの目的関数の最適値は $f_1^g(x_1^g, x_2^g)=102.07$，$f_2^g(x_1^g, x_2^g)=75.00$ である。

意思決定主体が単一のとき，最適化問題は次の多目的最適化問題になる。

$$\text{Max. } \{f_1(x_1, x_2), f_2(x_1, x_2)\} \qquad (66)$$

この問題のパレート最適解は曲線ACBで，その近似関数は次のようである。

$$x_2 = -1.54x_1^2 + 12.21x_1 - 12.23 \qquad (67)$$

部分システム1, 2の反応関数は$\partial f_1/\partial x_1$，$\partial f_2/\partial x_2$よりそれぞれ次のようになる。

$$r_1(x_2) = 10 - \frac{1}{2}x_2 \qquad (68)$$

$$r_2(x_1) = 12 - x_1 \qquad (69)$$

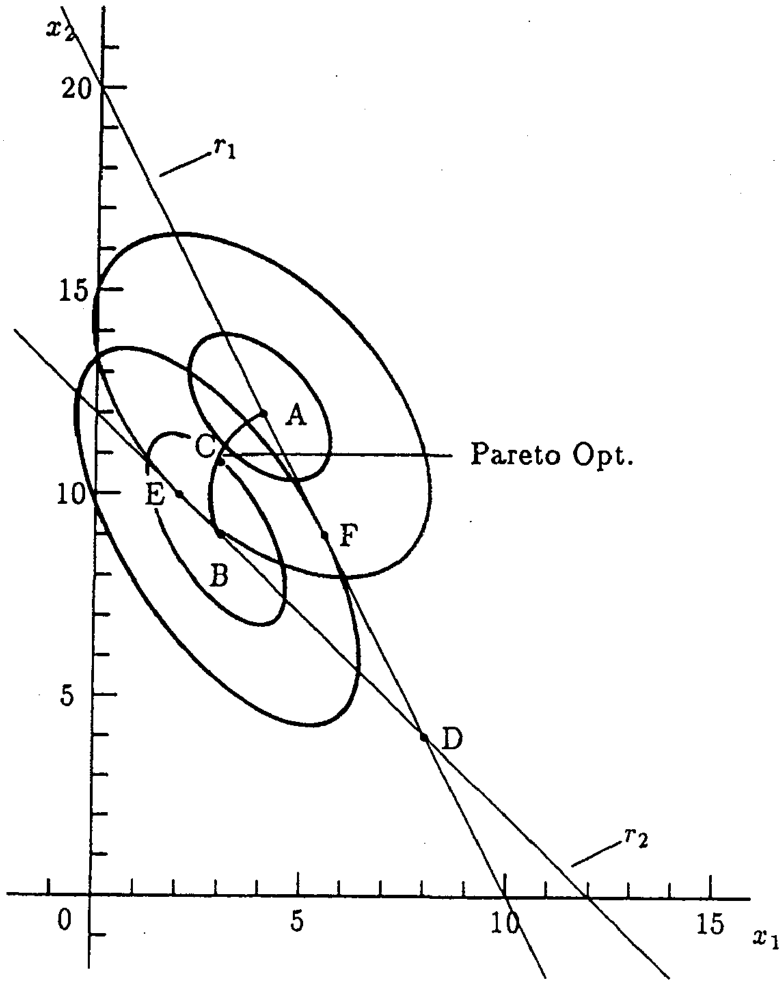

図3　最適解，パレート解，均衡解

表1　最適解，パレート解，均衡解

	x_1	x_2	f_1	f_2
A	4.00	12.00	104.00	–
B	3.00	9.00	–	76.50
C	2.93	10.80	102.07	75.00
D	8.00	4.00	80.00	64.00
E	2.00	10.00	98.00	76.00
F	5.50	9.00	100.63	70.25
ACB	$x_2 = -1.54x_1^2 + 12.21x_1 - 12.23$			

Nash 均衡解は図中の点 D で，$x_1^N=8$，$x^N{}_2=4$。このときの目的関数の最適値は $f_1^N=80$，$f_2^N=64$ である。

部分システム 1 が先手の Stackelberg 均衡解は，後手である部分システム 2 の最適条件を制約条件とした次の問題を解くことによって求めることができる。

$$\text{Max. } f_1(x_1, x_2)=-\frac{1}{2}(x_1^2+x_1x_2+x_2^2)+10x_1+14x_2 \tag{70}$$

$$\text{sub. to } x_1+x_2=12 \tag{71}$$

$$x_1\geq 0 \tag{72}$$

制約条件式(71)より $x_2=T(x_1)=12-x_1$ ．これを式(72)に代入すると

$$f_1(x_1)=-\frac{1}{2}x_1^2+2x_1+96 \tag{73}$$

これを解くと先手である部分システム 1 の均衡解は $x_1^{S_1}=2$ となる。これより後手の最適決定は $x_2^{S_1}=12-x_1^{S_1}=10$ となる（点 E)。そのときの目的関数の値は $f_1^{S_1}=98$，$f_2^{S_1}=7$　である。

部分システム 2 が先手の場合は，次のようになる。

$$\text{Max. } f_2(x_1, x_2)=-\frac{1}{2}(2x_1^2+2x_1x_2+x_2^2)+15x_1+12x_2 \tag{74}$$

$$\text{sub. to } 2x_1+x_2=20 \tag{75}$$

$$x_2\geq 0 \tag{76}$$

この場合の Stackelberg 均衡解は図中の点 F で $x_1^{S_2}=5.5$，$x_2^{S_2}=9$，$f_1^{S_2}=100.63$，$f_2^{S_2}=72.25$ である。これらの解をまとめると表 1 のようになる。

f_1 と f_2 が加算可能であるときのシステム全体の最適解は点 C であった。この点は図からも明らかなように各部分システムの最適解にはなっていない。システム全体の最適化よりも部分システムの最適化を優先するのであれば，各部分システムは x_j^g, $j=1,2$ に対する r_i $(x_i^{g_1}$，$x_j^g)=0$，$i\neq j$ となる $x_i^{g_1}$ なる解を選択する。いまの場合，部分システム 1 は $x_2^g=10.80$，に対して $x_1^{g_1}=1.53$ を選択

し，部分システム2は$x_1^g=2.93$に対して$x_2^{g1}=9.07$を選択する。さらにx_1^{g1}に対する部分システム2の最適決定は，$x_2^{g2}=7.40$であり，x_2^{g1}に対する部分システム1の最適決定は$x_1^{g2}=5.47$となる。このように各部分システムの最適決定は，r_i上を移動していき，点Dに収束する。また任意の$x_j^{(0)}$を初期値として$f_i(x_1, x_2)$，$i \neq j$を最適化し，その解$x_i^{(1)}$を用いて$f_j(x_i^{(1)}, x_j)$を最適化するという繰り返し計算を行っても解は点Dに収束する。このように点DのNash均衡解は，2．4節で述べたストレータ化された最適化問題の最適解である。これは自律した部分システムで構成されるシステムにおける決定に優先権のない場合の最適解となる。

決定に優先権がある場合，Stackelberg均衡解は後手の反応戦略関数上に必ず存在するので後手の最適性は保証されている。この後手の最適性を保証するという条件のもとに先手の最適化を行うので点Eあるいは点F以外に最適解は存在しない。

4．結　論

本論文では，以下のことを行った。

・大規模複雑なシステムに対する従来の最適化手法として分割原理を取り上げ，その問題点を指摘した。

・システム全体の目的関数が存在しない場合の大規模複雑なシステムを対象に，従来の最適化の概念に変わる均衡化の概念を提案した。

・均衡化の方法としてゲームの理論の一分野である非協力ゲームを適用し，決定に優先権がない場合のNash均衡解と，優先権がある場合のStackelberg均衡解を求めるための条件をそれぞれ導いた。

・提案した方法の妥当性を検討した。

謝　辞

本論文を執筆するにあたり多大なご協力を賜った小樽商科大学情報処理センターに対して謝意を表する。

参考文献

[1] たとえば L.S.Lasdon: *Optimization Theory for Large Systems*, MaCmillan, (1970), 志水清孝（訳）：大規模システムの最適化理論，(1973)，日刊工業新聞社。

[2] K.J.Arrow: *Social Choice and Individual Values*, Yale Univ. Pr., (1951), 長名寛明(訳): 社会選択と個人的評価,(1978), 日本経済新聞社。

[3] Y.S.Lincoln(ed.): *Organizational Theory and Inquiry: The paradigm revolution*, Sage Pub., (1985), 寺本，神田，小林，岸（訳）：組織理論のパラダイム革命，(1990)，白桃書房，43－82。

[4] 中野文平：大規模システム理論，計測と制御， Vol.25, No.3, (1986), 204-210。

[5] M.D.Mesarović, D.Macko, & Y.Takahara: *Theory of Hierarchical, Multilevel Systems*, (1970), Academic Press.

[6] たとえば J.L.Cohon: *Multiobjective Programming and Planning*, (1978), Academic Press.

[7] Y.Y.Haimes, W.A.Hall, & H.T.Freedman: *Multiobjective Optimization in Water Resources Systems*, (1975), Elsevir Scientific Pub..

[8] 市川惇信：意思決定論，(1983)，共立出版，20－21。

[9] J.Nash: Non-Cooperative Games, *Annals of Mathematics*, Vol.54, No.2, (1951).

[10] J.B.Rosen: Existence and Uniqueness of Equilibrium Points for Concave N-Person Games, *Econometrica*, Vol.33, No.3, (1965), 520-534.

[11] T.Başr, G.T.Olsder: *Dynamic Noncooperative Game Theory*, (1982), Academic Press, 243-245.

[12] H.von Stackelberg: *The Theory of the Market Economy*, (1952), William Hodge and Co..

[13] 鈴木光男：ゲーム理論入門，(1981)，共立出版，54。

[14] M.Simann: On the Stackelberg Strategy in Nonzero-Sum Games, *J. of Optimization Theory and Applications*, Vol.11, No.5, (1973).

[15] 奥田和重：分権的システムにおける資源配分による統合問題の解析，システムと制御， Vol.29, No.9, (1985), 601-608。

[16] K.Okuda: Studies of Coordination Problem in Decentralized Production Systems, *Int. Conference on Economics/Management and Information Technology*, Tokyo-Japan, (1992), 181-184.