アジアン・オプション価格評価のためのガンマ分布計算方法

和 田 良 介

1. は じ め に

アジアン・オプションの価格評価を行うための逆ガンマ・モデルが Milevsky と Posner (1998) により提案されている。この逆ガンマ・モデルの評価式はガンマ分布関数を利用する。実際の応用では，推定されたガンマ分布のパラメター値が大きすぎて，表計算ソフト Excel では計算できないケースが頻発してしまう。本論文の目的はこの問題を回避する計算方法を導出することである。具体的には，計算可能なだけ低いパラメター値を用いて目的の値を求める迂回的な計算方法や簡単な近似法を示すことである。この近似法は実際のオプション価格評価の目的のためには十分な精度を持っている。本論文が導く計算方法あるいは近似法の実証分析上の意義は，十数行のプログラミングを併用することやあるいは，より簡単に近似法を用いることで，逆ガンマモデルの評価式もブラック・ショールズ式と同じように簡便に Excel で利用可能となることである。

本論文の構成は，まず逆ガンマモデルの概略を述べた後，(1)あるパラメター値を持つガンマ分布の値が，異なるパラメター値のガンマ分布密度関数の無限関数列の和として表現可能であることを示し，(2) Exel では直接計算は不可能であるような高いパラメター値の場合でも，対数値を分割計算する方法と(1)の手法を共に用いることにより，ガンマ分布の値が計算可能となる方法を示す。更に(3)低いパラメター値のガンマ分布関数を直接用いた場合の近似誤差を決め

る計算式を導き，この近似法が実証分析例で価格付けの目的のためには十分精度が良いことを示す。

アジアン・オプションとは，原資産価格の平均値と権利行使価格の差額が満期価値を決めるようなオプションである。原資産価格が幾何ブラウン運動に従うものと仮定すると，ある特定時点の価格は対数正規分布に従う。アジアン・オプションが対象とする原資産価格の算術平均は対数正規分布の算術平均となる。対数正規分布の算術平均の確率分布は不明である。そのため，アジアン・オプションの価格評価は，長時間を要するモンテカルロ・オペレーションを行なうかあるいは解析解をもつ近似法を利用することになる。1999年4月時点で，主要誌に掲載された最新のアジアン・オプション解析近似モデルは Milevsky と Posner (1998) の逆ガンマ・モデルである。Milevsky と Posner (1998) はまず，対数正規分布の和が観測時点数と観測期間が長くなるにつれて逆ガンマ分布に収束することを示し，次に無限大の期間について得られた結果を有限期間の算術平均値の近似に用いてアジアン・オプションの価格評価式を導いている。

確率変数 Z の逆数がガンマ分布に従う時，Z は逆ガンマ分布に従うと呼ぶ。Z の逆数を X とすると，逆ガンマ分布の Z とガンマ分布の X では $\Pr(Z < z) = \Pr(X > \frac{1}{z}) = 1 - \Pr(X < \frac{1}{z})$ が成り立つ。これを利用して，逆ガンマ・モデルのオプション評価式は逆ガンマ分布の代わりにガンマ分布を用いている。実証分析にあたっては，ガンマ分布の2つのパラメーター α と β は原資産価格のデータから推定される。実証分析例には日経平均株価指数の65日の算術平均を対象とした白木 他 (1999) がある。表1．に示すように α の推定値は300程度から1,600程になっている。この大きなばらつきは，日経平均65日間算術平均が従う確率過程が様々なパラメター値でもほぼ同じように表現されうる可能性を示唆するものである。実際，低く修正されたパラメター値を用いても，価格評価のためにはさしつかえない程度の誤差に収まりうることを本論文

では示す。

2．1　ガンマ分布パラメターの代替値

確率変数Zの逆数$X\equiv\frac{1}{z}$がガンマ分布に従う時，Zは逆ガンマ分布に従うと呼ぶ。Xのガンマ分布密度関数が$x>0$に対し，次式で与えられるものとする。

$$g\,(x|\alpha,\beta)=\frac{\beta^{-\alpha}x^{\alpha-1}\exp\left(\frac{-x}{\beta}\right)}{\Gamma\,(\alpha)} \tag{1}$$

ただし，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\Gamma\,(\alpha)$はガンマ関数であり，$\Gamma\,(\alpha)=(\alpha-1)\,\Gamma\,(\alpha-1)$が成り立つ。逆ガンマ分布の原点の回りの1次と2次のモーメントは次のように決まる。

$$M_1=E\left[\frac{1}{X}\right]=\frac{1}{\beta(\alpha-1)}$$

$$M_2=E\left[\left(\frac{1}{X}\right)^2\right]=\frac{1}{\beta^2(\alpha-1)\,(\alpha-2)} \tag{2}$$

逆ガンマモデルのオプション評価式は，逆ガンマ分布の代わりにガンマ分布を用いている。このガンマ分布のパラメターαとβの推定値は，$\alpha>2$と仮定して，M_1，M_2から求める。

$$\alpha=\frac{2M_2-M_1^2}{M_2-M_1^2}$$

$$\beta=\frac{M_2-M_1^2}{\mathrm{M_2M_1}} \tag{3}$$

Excelではαの値が470あたりを超えるとガンマ分布の計算ができなくなってしまう。本論文はこの問題を計算可能なαの代替値を利用することによって回避する方法を導く。代替値は，逆ガンマ分布関数の中で期待値が同じであるが，分散が少し大きくかつExcelで直接計算が可能になるだけα値の小さいものから選ぶ。これはM_1の値を一定にしたまま，M_2を少し大きな値に変化させて，(3)式経由で十分小さい代替値を決める操作に等しい。$c=\frac{1}{M_1}$，とした時，

$$c = \beta_0(\alpha_0 - 1) = \beta\ (\alpha - 1) \tag{4}$$

を満たすような α と β の値のうち，Excelで直接計算可能となるだけ小さい α の値とそれに応じた β の値を代替値とするのである。この代替値を α_1，β_1 と表わす。α_0，β_0は本来の推定値。

ガンマ分布密度関数(1)式の形状は $x = \beta\ (\alpha - 1) = c$ の時，最大値をとるユニ・モダルである。(4)式を満たすガンマ密度関数はいずれも，$x = c$ で最大である。期待値は $\beta\alpha = c + \beta$，分散は $\beta^2\alpha = \beta\ (c + \beta)$ である。(4)式を保ったまま α が小さくなるにつれて，期待値と分散が増えてゆく。以下では α の値を α_0，あるいは α_1とした時，β の値はそれぞれ対応したものとして，β の表記を省略する。$g\ (x|\alpha_i) = g\ (x|\alpha_i, \beta_i)$，ただし $i = 0, 1$。

2．2　ガンマ分布の密度関数列の和による表示

ガンマ分布関数の値は同じ β 値で1づつ増加する α 値をもつ密度関数の無限関数列の和として表現可能である。

$$G\ (s|\alpha_1) = \beta_1 g\ (s|\alpha_1)$$
$$\left\{\left(\frac{s}{c}\right)\frac{\alpha_1 - 1}{\alpha_1} + \cdots + \left(\frac{s}{c}\right)^k \frac{(\alpha_1 - 1)^k}{(\alpha_1 + k - 1)\cdots(\alpha_1 + 1)\,\alpha_1} + \cdots\right\} \tag{5}$$

(5)式の証明：ガンマ分布密度関数を微分すると次式を得る。

$$g'\ (x|\alpha_1 + 1) = \frac{1}{\beta_1}\{g\ (x|\alpha_1) - g\ (x|\alpha_1 + 1)\} \tag{6}$$

ただし，β_1の表記は省略されており，$g\ (x|\alpha_1 + k) = g\ (x|\alpha_1 + k, \beta_1)$，$k = 1, 2, \cdots$。(6)の両辺を $[0, s]$ の範囲で積分すると，$G\ (s|\alpha_1) = G\ (s|\alpha_1 + 1) + \beta_1 g\ (s|\alpha_1 + 1)$ を得る。この漸化式を $G\ (s|\alpha_1 + 1)$ 以降に適用して繰り返し代入する。$G\ (s|\alpha_1) = \beta_1 g\ (s|\alpha_1 + 1) + \beta_1 g\ (s|\alpha_1 + 2) + \cdots + G\ (s|\alpha + k)$ ここで，x の値を $x = s$ と一定にしたまま k の値が無限大に向かうと，$g\ (s|\alpha_1 + k)$ は0に近づいて行く。何故ならば $g\ (s|\alpha_1 + k)$ の式のなかで，α の値の増加により変化する

部分である$\left(\frac{s}{\beta_1}\right)^{\alpha_1+k}\frac{1}{\Gamma(\alpha_1+k)}$についてみると，$n>N$であるような全ての$n$について$(\frac{s}{\beta_1})\frac{1}{\alpha_1+n}<1$となる$N$が存在するからである。$g(x|\alpha_1+k)$は$0\leq x\leq s$であるようなどのような$x$でも0に収束する。ゆえに，$G(s|\alpha+k)$は$k$が無限大に向かうにつれて0に収束する。

$$G(s|\alpha_1)=\beta_1\{g(s|\alpha_1+1)+g(s|\alpha_1+2)+\cdots+g(s|\alpha_1+k)+\cdots\} \quad (7)$$

$g(s|\alpha_1+k)$は$g(s|\alpha_1)$で表現可能である。

$$\frac{g(s|\alpha_1+k)}{g(s|\alpha_1)}=\beta_1^{-k}s^k\frac{1}{(\alpha_1+k-1)(\alpha_1+k-2)\cdots\alpha_1}$$

であり，さらに(4)式を代入すると，

$$g(s|\alpha_1+k)=\left(\frac{s}{c}\right)^k\frac{(\alpha_1-1)^k}{(\alpha_1+\mathrm{k}-1)(\alpha_1+\mathrm{k}-2)\cdots\alpha_1}g(s|\alpha_1) \quad (8)$$

これを(7)式の$k=1,2\cdots$に用いると，(5)式を得る。証明終り。

2．3　ガンマ分布関数の分割計算法

$g(x|\alpha_0)$が直接計算できない場合でも$g(x|\alpha_0)=g(x|\alpha_1)\exp(L(x))$と置いて計算を分割することにより，値を求めることが可能である。$\exp(L(x))$はlog値より求める。$L(x)=\log(g(x|\alpha_0))-\log(g(x|\alpha_1))$とする。

$$L(x)=-\alpha_0\log(\beta_0)+\alpha_1\log(\beta_1)+(\alpha_0-\alpha_1)\log x + \left(\frac{1}{\beta_1}-\frac{1}{\beta_0}\right)+\log\left(\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_0)}\right) \quad (9)$$

$L(x)$は定数部分L_1とxによって値の変わるL_2に分けられる。(4)を利用して次のように書き表すことができる。

$$L=L_1+L_2$$
$$L_1=-(\alpha_0-\alpha_1)\log c+\alpha_0\log(\alpha_0-1)+\alpha_1\log(\alpha_1-1)+\log\left(\frac{\Gamma(\alpha_1)}{\Gamma(\alpha_0)}\right) \quad (10)$$
$$L_2=(\alpha_0-\alpha_1)(\log x-\frac{x}{c})$$

L_1は所与のα_0，α_1に応じた定数である。$\log(\Gamma(\alpha_0))$が直接計算できない場合でも$\log(\Gamma(\alpha_0)) = \log(\alpha_0-1)+\log(\alpha_0-2)+\cdots+\log(\alpha_0-k)+\log(\Gamma(\alpha_0-\mathrm{k}))$と十分に小さい$\alpha$まで分割すれば計算は可能である。$L_2$は$x=c$で最大値を取り，$\exp(L_2)$は有限な値である。

$$g(x|\alpha_0) = g(x|\alpha_1)\exp(L_1+L_2) \tag{11}$$

このように$g(x|\alpha_0)$を書き換える。直接計算できない$g(x|\alpha_0)$も，分割することにより計算可能となる。しかしここでは，(11)式は$g(x|\alpha_0)$を計算するためではなく，(6)式に相当する漸化式を導くのに役立てる。そして漸化式を用いて，$G(x|\alpha_0)$を密度関数の無限関数列の和として表わす。

$$\begin{aligned} G(x|\alpha_0) &= \beta_0\exp(L(s))\,g(s|\alpha_1)\\ &\left\{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}\left(\frac{s}{c}\right)+\cdots+\frac{(\alpha_0-1)^k}{(\alpha_0+k-1)\cdots(\alpha_0+1)\alpha_0}\left(\frac{s}{c}\right)^k+\cdots\right\}\end{aligned} \tag{12}$$

(12)式の証明：(11)式を微分すると次式を得る。

$$g(x|\alpha_1+k)\exp(L(x)))' = \frac{e^L}{\beta_1}\{\mathrm{r}(k-1)\,g(x|\alpha_1+k-1) - r(1)\,g(x|\alpha_1+k)\}$$

ただし，$r(k)\equiv\dfrac{\alpha_0+k}{\alpha_1+k}$，$k=0,1,2\cdots$。$[0,s]$の範囲で両辺の積分をとると次のような漸化式が成り立つ。ここで，$J_k\equiv\int_0^s g(x|\alpha_1+k)\exp(L(x))\,dx$，$k=0,1,2,\cdots$である。

$$\begin{aligned} J_k &= \frac{r(k-1)}{r(-1)}J_{k-1}-\frac{1}{r(-1)}\beta_1 g(s|\alpha_1+k)\exp(L(s))\\ &\cdots\\ J_2 &= \frac{r(1)}{r(-1)}J_1-\frac{1}{r(-1)}\beta_1 g(s|\alpha_1+2)\exp(L(s))\\ J_1 &= \frac{r(0)}{r(-1)}J_0-\frac{1}{r(-1)}\beta_1 g(s|\alpha_1+1)\exp(L(s))\end{aligned} \tag{13}$$

上記の漸化式を逐次代入すると，J_k を J_0 で表わすことができる。

$$J_k = \frac{r(k-1)}{r(-1)} \frac{r(k-2)}{r(-1)} \cdots \frac{r(0)}{r(-1)} J_0 - \frac{\beta_1}{r(-1)} g(s|\alpha_1 + k) \exp(L(s))$$

$$\cdots - \frac{\beta_1}{r(-1)} \frac{r(k-1)\cdots r(1)}{(r(-1))^{k-1}} g\ (s|\alpha_1 + 1) \exp\ (L(s))$$

$J_k = \int_0^s g\ (x|\alpha_1 + k) \exp\ (L(x))\ dx$ の式の中で，$\exp\ (L(x))$ は上に有界であり，一定の $x = s$ に対して $g\ (s|\alpha_1 + k)$ は k が無限大に向かうにつれて 0 に収束する。そのため，(7)の導出の場合と同じく，任意の $\delta > 0$ に対し，$n > N$ であるならば $J_n < \delta$ であるような N が存在して J_k は 0 に収束する。ゆえに上記の式より，J_0 を $g\ (s|\alpha_1 + k)\ k = 1, 2, \cdots$ の無限関数列の和として表現可能である。

$$J_0 = \frac{r(-1)^k}{r(k-1)\cdots r(0)} \frac{\beta_1}{r(-1)} g\ (s|\alpha_1 + k) \exp\ (L(s)) \cdots$$

$$+ \frac{r(-1)^2}{r(1)r(0)r(-1)} g\ (s|\alpha_1 + 2) \exp\ (L(s))$$

$$+ \frac{r(-1)}{r(0)} \frac{\beta_1}{r(-1)} g\ (s|\alpha_1 + 1) \exp\ (L(s)) \tag{14}$$

一方(8)式により $g\ (s|\alpha_1 + k)$ は $g\ (s|\alpha_1)$ で表わせる。

$$\frac{r(-1)^k}{r(k-1)\cdots(0)} = \frac{(\alpha_0 - 1)^k (\alpha_1 + k - 1)\cdots\alpha_1}{(\alpha_1 - 1)^k (\alpha_0 + k - 1)\cdots\alpha_0}$$

であることに留意すると，(14)式の第1項の $\dfrac{r(-1)^k}{r(k-1)\cdots r(0)} g(s|\alpha_1 + k)$ の部分は $g\ (s|\alpha_1)$ を用いて次のように書き換えられる。

$$\frac{r(-1)^k}{r(k-1)\cdots r(0)} g\ (s|\alpha_1 + k) = \frac{(\alpha_0 - 1)^k (\alpha_1 + k - 1)\cdots\alpha_1}{(\alpha_1 - 1)^k (\alpha_0 + k - 1)\cdots\alpha_0}$$

$$\frac{(\alpha_1 - 1)^k}{(\alpha_1 + k - 1)\cdots(\alpha_1 + 1)\alpha_1} \left(\frac{s}{c}\right)^k g\ (s|\alpha_1) \tag{15}$$

$$= \frac{(\alpha_0 - 1)^k}{(\alpha_0 + k - 1)\cdots(\alpha_0 + 1)\alpha_0} \left(\frac{s}{c}\right)^k g\ (s|\alpha_1)$$

⒂式を⒁式の $k=1,2,\cdots$ に代入し，また $\dfrac{\beta_1}{r(-1)}=\beta_1\dfrac{\alpha_1-1}{\alpha_0-1}=\dfrac{c}{\alpha_0-1}=\beta_0$ を利用すると次のようになる。

$$J_0=\beta_0\exp\,(L(s))\,g\,(s|\alpha_1)\left\{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}\left(\frac{s}{c}\right)\cdots\right.$$
$$\left.+\frac{(\alpha_0-1)^k}{(\alpha_0+k-1)\cdots(\alpha_0+1)\alpha_0}\left(\frac{s}{c}\right)^k+\cdots\right\}$$

J_0を $G\,(s|\alpha_0)$ とすれば，⑿を得る。証明終り。

3.　実証分析における近似精度

⑿式を利用することにより，$G\,(x|\alpha_0,\beta_0)$ は計算できる。この方法は逐次計算のプログラミングが必要である。もっと簡単な方法は小さいパラメター値の $G\,(x|\alpha_1)$ で直接近似することである。実証分析例として白木 他(1999)を用いる。白木 他(1999)は日経平均株価指数の65営業日間の算術平均のアジアン・オプションに逆ガンマ・モデルを用いている。期間は1996／10／1から1997／9／30である。ガンマ分布の α の推定値を求めている。サンプルサイズは261であり，表1に数字の内訳を示す。最大値2151.8，最小値293.9であった。

近似誤差を AE と表わす。⑿式と⑸式を用いると，AE は次のように表わされる。

$$AE=G\,(s|\alpha_0)-G\,(s|\alpha_1)$$
$$=g\,(s|\alpha_1)\left(\frac{s}{c}\right)\left\{\frac{\alpha_0-1}{\alpha_0}\beta_0\exp\,(L(s))-\frac{\alpha_1-1}{\alpha_1}\beta_1\right\}+\cdots$$
$$+g\,(s|\alpha_1)\left(\frac{s}{c}\right)^k$$
$$\left\{\frac{(\alpha_0-1)^k}{(\alpha_0+k-1)\cdots(\alpha_0+1)\alpha_0}\beta_0\exp\,(L(s))-\frac{(\alpha_1-1)^k}{(\alpha_1+k-1)\cdots(\alpha_1+1)\alpha_1}\beta_1\right\}$$
$$+\cdots \tag{16}$$

オプション評価時点までの算術平均実現値を権利行使価格とする場合を考える。この時，逆ガンマ・モデルの評価式はガンマ分布関数の $x = c$ における値が必要となる。この点における値，$G(c|\alpha_0)$ を $a_1 = 450$のガンマ分布で代用した場合の誤差を⒃式を用いて計算した。450はExcelでガンマ分布が直接計算可能な α の上限付近の値である。推定された α 値が470以上のものについて450の代替値で近似した。その結果，該当する223個のサンプルの誤差は最大0.006813419，最小0.000390761，平均は0.003948316であった。誤差の最大値と最小値が起こったのは $\alpha_0 = 2151.8$と479.3であって，それぞれ代替値の450との開きが最大，最小のケースであった。オプション取引の中心となるのは，評価時点の原資産価格の実現値と権利行使価格が等しいat the moneyのものである。この場合，逆ガンマ・モデルの価格評価式に必要なガンマ分布の値は，上記の計算例のような $x = c$ の付近のものである。$\alpha_1 = 450$のガンマ分布の代用による簡単な近似計算も十分に役立つと考えられる。

表１．ガンマ分布パラメター α の推定値

α_0	1650以上	1650-1450	1450-1250	1250-1050	1050-850	850-650	650-450	450未満
該当日数	17	46	18	20	34	55	38	32

データ：1996／10／１から1997／９／30までの時点で，その日を最終日とする日経平均株価指数の65営業日分の合計より，MilevskyとPresner（1998）の方法により α を推定。サンプルサイズは261。

4．結　　論

逆ガンマモデルの価格評価式はガンマ分布関数の値が必要である。推定されたガンマ分布のパラメター値が大きすぎてExcelで直接計算できない場合でも，本論文の⑿式を経由すれば，Excelでも計算可能である。また計算可能なパラメター値の分布関数で代用する近似計算法でもat the money近辺の場合なら１パーセント未満の誤差でガンマ分布の値を得ることができる。このような計算方法によらずとも *Mathmatica* ならば直接計算できる。しかしながら，

実用上はExcelなどで公式が使えるかどうかは肝心な点であって，ブラック・ショールズ式が実際の取引に盛んに利用される理由の1つは計算の簡便さである。表計算ソフトでも取扱可能とする計算方法は，逆ガンマモデルの利用促進に役立つと考えられる。

参考文献

Milevsky, Moshe Arye and Steven Posner, "Asian Options, the Sum of Lognormals, and the Reciprocal Gamma Distribution", *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 33 (1998), 409 − 422

白木歩，滝浦奈々子，松本若葉，森川功，「数値計算によるアジアン・オプションの価格評価」1999年1月提出，小樽商科大学卒業論文。